11 Novembre 2018

1. Gruppo Generale Lineare

Sia $GL(n, \mathbb{F}_p)$ il gruppo delle matrici invertibili $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{F}_p$[1].
Si indichi con a_{ij} ogni singolo elemento di queste matrici; in particolare i rappresenta l'indice di riga dell'elemento e j l'indice di colonna.
Sia $G = \{D \in GL(n, \mathbb{F}_p) | a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$[2].

$i)$ Dimostrare che G è un sottogruppo commutativo di $GL(n, \mathbb{F}_p)$ rispetto alla moltiplicazione fra matrici.
$ii)$ Determinare $Z(G)$, il centro del gruppo G, e dimostrare che $Z(G) \lhd G$[3] (ed è contenuto propriamente).
Non è difficile notare che $Z(G) = Z(GL(n, \mathbb{F}_p))$.
$iii)$ La cardinalità di $GL(n, \mathbb{F}_p)$ è data dalla seguente formula

$$|GL(n, \mathbb{F}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)...(p^n - p^{n-1})$$

Si consideri adesso il gruppo $GL(2, \mathbb{F}_5)$.
Sia $G = \{D \in GL(2, \mathbb{F}_5) | a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$.
Sia inoltre $\pi : GL(2, \mathbb{F}_5) \longrightarrow GL(2, \mathbb{F}_5)/Z(GL(n, \mathbb{F}_p))$ la proiezione canonica.
Si definisce $PGL(2, \mathbb{F}_5) = GL(2, \mathbb{F}_5)/Z(GL(n, \mathbb{F}_p))$ come il gruppo proiettivo[4]. Calcolarne la cardinalità. Dire che relazione c'è tra il numero di sottogruppi di $PGL(2, \mathbb{F}_5)$ e il numero dei sottogruppi di $GL(2, \mathbb{F}_5)$ che contengono $Z(G)$.
$iv)$ Dimostrare che $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
$v)$ Sia $\mathbb{F}_5^* = \mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$. Sia $\varphi : GL(2, \mathbb{F}_5) \longrightarrow \mathbb{F}_5^*$ l'omomorfismo definito da $\varphi(A) = det(A)$, con $A \in GL(2, \mathbb{F}_5)$, dove $det(A)$ indica il determinante della matrice A.
Definire $Ker\varphi \stackrel{def}{=} SL(2, \mathbb{F}_5)$ il gruppo lineare speciale[5].
$\varphi|_{Z(G)}$ è iniettivo? Si suggerisce di calcolare $|SL(2, \mathbb{F}_5)|$ e $|SL(2, \mathbb{F}_5) \cap Z(G)|$.
$vi)$ Sia $f : G \longrightarrow \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ un omomorfismo. Dire quanti omomorfismi f surgettivi/iniettivi/bigettivi esistono.

---

[1] Campo finito di caratteristica p, con p primo, cioè vale che "$p = 0$".
[2] si precisa che $a_{ii} \neq 0$.
[3] Si ricorda che il centro di un gruppo è sempre un sottogruppo normale; tuttavia non è deleterio fare una verifica.
[4] Non si chiede di studiarlo in questa occasione poichè è un argomento che richiede conoscenze più approfondite; è comunque interessante scoprire la sua esistenza.
[5] preferibilmente senza guardare la definizione su un motore di ricerca.