Partizioni di insiemi di cardinalità $\aleph_\alpha$

Alberto Landi

19 agosto 2021

Sommario

Nel presente scritto studiamo le partizioni di insiemi di cardinalità $\aleph_\alpha$ nell'ambito della teoria di Zermelo-Frenken-Choice (ZFC). Nel seguito indicheremo con lettere greche quali α,β e γ degli ordinali (Ord). Preso X insieme di cardinalità $|X| = \aleph_\alpha$ poniamo $\mathbb{X}(X)^\gamma_\beta = \{F \subset P(P(X)) : F \textit{ partizione} \wedge |F| = \aleph_\gamma \wedge \forall A \in F\ |A| = \aleph_\beta\}$, dove dato Z insieme $P(Z)$ indica l'insieme delle parti di Z. Allora $\gamma = \alpha$ oppure $\beta = \alpha$, e nel seguito mostriamo che $|\mathbb{X}(X)^\gamma_\alpha| = |\mathbb{X}(X)^\alpha_\beta| = 2^{\aleph_\alpha}$.

Indice

1 Il Teorema

Definizione 1.1. *Dato X insieme di cardinalità $|X| = \aleph_\alpha$, con $\alpha \in Ord$, poniamo $\mathbb{X}(X)^\gamma_\beta = \{F \subset P(P(X)) : F \textit{ partizione} \wedge |F| = \aleph_\gamma \wedge \forall A \in F\ |A| = \aleph_\beta\}$, dove dato Z insieme $P(Z)$ indica l'insieme delle parti di Z, dove $\beta, \gamma \in Ord$.*

Ci accingiamo ora a enunciare e dimostrare il seguente

Teorema 1.1. *Sia X un insieme di cardinalità $|X| = \aleph_\alpha$, con $\alpha \in Ord$. Allora $\forall \beta \in Ord$ tale che $\beta \leq \alpha$ vale che $|\mathbb{X}(X)^\beta_\alpha| = |\mathbb{X}(X)^\alpha_\beta| = 2^{\aleph_\alpha}$.*

Dimostrazione. Sia Y un insieme di cardinalità $\aleph_\beta$, e consideriamo $\mathbb{X}(X \times Y)^\alpha_\beta$. Ora, risulta chiaro che $|\mathbb{X}(X \times Y)^\alpha_\beta| = |\mathbb{X}(X)^\alpha_\beta|$, essendo $|X \times Y| = |X|$. Consideriamo ora la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : \{A \in P(X) : |A| \geq \aleph_0\} &\longrightarrow \mathbb{X}(X \times Y)^\alpha_\beta \\ A &\longrightarrow \{\{x\} \times Y : x \notin A\} \cup \{K \times Y : K \in F_A\} \end{aligned}$$

dove F_A è una partizione di A in insiemi di due elementi (che esiste sempre essendo $|A| \geq \aleph_0$). E' immediato verificare allora che Φ è ben definita, in quanto (almeno) uno dei due insiemi che compaiono nell'unione sulla destra deve avere cardinalità $\aleph_\alpha$ e ogni insieme della partizione $\Phi(A)$ ha cardinalità $Y = \aleph_\beta$. Essendo infine Φ iniettiva, in quanto $\Phi(A) = \Phi(B) \implies \forall x\ (x \notin A \iff x \notin B)$, si ha allora che

$$|\mathbb{X}(X)^\alpha_\beta| = |\mathbb{X}(X \times Y)^\alpha_\beta| \geq |\{A \in P(X) : |A| \geq \aleph_0\}| = 2^{\aleph_\alpha}$$

dove l'ultima uguaglianza è una facile verifica. Analogamente, per $\mathbb{X}(X\times Y)^\beta_\alpha$, consideriamo la mappa

$$\begin{aligned}\Psi:\{A\in P(X):|A|=\aleph_\alpha\wedge|A^c|=\aleph_\alpha\wedge 0\notin A\} &\longrightarrow \mathbb{X}(X\times Y)^\beta_\alpha\\ A &\longrightarrow \{A\times\{x\}:x\in Y\}\cup\{A^c\times\{x\}:x\in Y\}\end{aligned}$$

Risulta allora chiaro che Ψ sia ben definita, in quanto $\forall A\in P(X)$ vale $|A\times\{x\}|=|A^c\times\{x\}|=\aleph_\alpha$ e $|\{A\times\{x\}:x\in Y\}\cup\{A^c\times\{x\}:x\in Y\}|=|Y|=\aleph_\beta$. Infine, per costruzione Ψ risulta essere iniettiva (grazie al fatto che $0\notin A$), da cui otteniamo

$$|\mathbb{X}(X)^\beta_\alpha|=|\mathbb{X}(X\times Y)^\beta_\alpha|\geq|\{A\in P(X):|A|=\aleph_\alpha\wedge|A^c|=\aleph_\alpha\wedge 0\notin A\}|=2^{\aleph_\alpha}$$

dove l'ultima uguaglianza è un facile esercizio. Per il teorema di Cantor-Bernstein è allora sufficiente mostrare le disuguaglianze opposte, che seguono immediatamente considerando le mappe che associano ad ogni partizione $F\in\mathbb{X}(X)^\alpha_\beta$ la funzione θ_F da X a F con $\theta_F(x)=A\in F$ con $x\in A$ (analogamente per $\mathbb{X}(X)^\beta_\alpha$). Segue la tesi. $\square$