Esercizio 1. Sia G un gruppo commutativo mostrare che $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) = G$.

Esercizio 2. Mostrare che $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ e che $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_{gcd(n,m)}$.

Esercizio 3. Mostrare che se A, B e C sono dei gruppi abeliani allora

$$\mathrm{Hom}(C, A \times B) = \mathrm{Hom}(C, A) \times \mathrm{Hom}(C, B)$$
$$\mathrm{Hom}(A \times B, C) = \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C).$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}^2).$$

Eserczio 6. Sia G un gruppo. Mostrare che

i) fissato $g \in G$ l'applicazione

$$\begin{aligned} f_g : G &\to G \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

definisce una bigezione da G in G,

ii) presi $g, h \in G$ vale la formula $f_{gh} = f_g \circ f_h$,

iii) $f_g = Id_G$ se e solo se $g = 1$,

iv) l'applicazione

$$\begin{aligned} F : G &\to \mathrm{Big}(G) \\ g &\mapsto f_g \end{aligned}$$

definisce un omomomorfismo iniettivo,

Concluderne che ogni gruppo finito è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n per un opportuno n.

Esercizio 7. Sia G un gruppo finito. Mostrare che

i) fissato $g \in G$ l'applicazione

$$\begin{aligned} c_g : G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

definisce un automorfismo di G,

ii) $\mathrm{Inn}(G) := \{c_g \mid g \in G\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$.

Mostrare inoltre che $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ for all } x \in G\}$ è un sottogruppo di G e che

$$\mathrm{Inn}(G) = \frac{G}{Z(G)} .$$

Esercizio 8. Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ due campi. Mostrare che un omomorfismo di anelli $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{K}$ è nullo oppure iniettivo.

Esercizio 9. Sia $\mathbb{F}$ un campo. Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un estensione di $\mathbb{F}$. Mostrare che $\text{Aut}(\mathbb{F}|\mathbb{K}) = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{K}) \text{ t.c. } \varphi|_{\mathbb{F}} = Id_{\mathbb{F}}\}$ è un sottogruppo di $\text{Aut}(\mathbb{K})$. Mostrare inoltre che se G è un sottogruppo di $\text{Aut}(\mathbb{F}|\mathbb{K})$ allora

$$\text{Fix}(G) = \{x \in \mathbb{K} \mid \varphi(x) = x \text{ for all } \varphi \in G\}$$

forma un sottocampo di $\mathbb{K}$ che contiene $\mathbb{F}$.

Esercizio 10. Sia $\mathbb{F}$ un campo e $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ un omomorfismo di anelli. Mostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_* : \mathbb{F}[x] &\to \mathbb{F}[x] \\ \sum_i a_i x^i &\to \sum_i \varphi(a_i) x^i \end{aligned}$$

definisce un omomorfismo di anelli. Chi è il suo nucleo?

Esercizio 11. Sia $\mathbb{F}$ un campo e $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ un polinomio irriducibile. Sia $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}$ una radice di p. Mostrare che il gruppo $\text{Aut}(\mathbb{F}|\mathbb{F}(\alpha))$ è finito e che il suo ordine è minore o uguale a $n = \deg p(x)$.