PROVA COMPITINO DI ARITMETICA
8 Dicembre 2014

1. Sia $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{30}$

- Determinare i sottogruppi di ordine 30 di G.
- Determinare i sottogruppi di ordine 90 di G.

2. Sia Q_8 il gruppo $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ con l'operazione descritta da

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = k, ji &= -k \\ ik = -j, ki &= j \\ jk = i, kj &= -i \end{aligned}$$

Contare i morfismi $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow Q_8$.

3. Sia $D \in \mathbb{Z}$ un intero che non è un quadrato. Definiamo $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ come il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$, e quindi che se $D > 0$, $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ è un sottoanello di $\mathbb{R}$.

(b) Definamo $N : \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \longrightarrow \mathbb{Z}$ (*norma*) mediante la formula

$$N(a + b\sqrt{D}) = a^2 - Db^2$$

Dimostrare che N è moltiplicativa, cioè che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Dedurne che un elemento invertibile ha sempre norma 1.

(c) Trovare la formula per l'inverso di un elemento $a + b\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

(d) Usando la formula trovata sopra provare che un elemento ha norma 1 se e solo se l'elemento è invertibile.

(e) Usando il punto precedente trovare gli invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ per $D < -1$ e per $D = -1$.

(f) Provare che $1+\sqrt{2}$ è invertibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Mostrare che ci sono infiniti invertibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.