

✦ Gara a squadre ✦

16 dicembre 2019

- Gli esercizi vanno risolti in gruppi di tre o quattro persone.
- Scrivete sul foglio che consegnate il nome della squadra.
- Tutte le risposte vanno motivate bene, vince chi motiva meglio!

Esercizio 1. • Dimostrare che le funzioni uniformemente continue mandano successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.

- (*Bonus*) Dire che nel caso di funzioni continue l'enunciato non è sempre vero producendo un controesempio di una funzione f continua e di una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy tali che la successione $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy.

Esercizio 2. Calcolare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^b(n)}{n^a}.$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < \frac{1}{e}; \\ |1 - \log^3 x| & x \geq \frac{1}{e}. \end{cases}$

1. Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali per cui f è continua e derivabile in $x = \frac{1}{e}$.
2. Con questi valori di a, b studiare segno, crescita e/o decrescita, eventuali punti di massimo o minimo, locali o assoluti. Studiare la convessità e tracciare un grafico approssimativo di f .
3. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ ha esattamente due soluzioni.