Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 1

Enrico Berni, 582049

01/03/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Coppia ordinata di Kuratowski, buona definizione
2. Ordine totale di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con l'ordine della minima differenza
3. Ordine totale di $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, con l'ordine della massima differenza
4. Forme equivalenti dell'assioma della scelta
5. Cardinalità e operazioni fondamentali
6. Operazioni su insiemi numerabili

1 Coppia ordinata di Kuratowski, buona definizione

Dati due insiemi a e b, si dice **coppia** di a e b l'insieme $\{a, b\}$ i cui soli elementi sono a e b. Per l'assioma di estensionalità, si nota che $\{a, b\} = \{b, a\}$. Una coppia **ordinata**, invece, è una coppia tale che la precedente uguaglianza non sia vera. Secondo la definizione data da Kuratowski, una coppia ordinata (a, b) è l'insieme della forma $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Proposizione 1.1. *Per ogni coppia ordinata (a, b), valgono i seguenti fatti:*

1. *Se X è una coppia ordinata, esiste un unico elemento x tale che $x \in A$ per ogni $A \in X$.*
2. *Se $(a, b) = (a, b')$, allora $b = b'$.*
3. *$(a, b) = (a', b')$ se e solo se $a = a'$ e $b = b'$.*

Dimostrazione. 1. Sia X della forma $X = (a, b)$. Allora, si nota che $a \in \{a\}$ e $a \in \{a, b\}$. Ora, se $x \in \{a\}$ e $x \in \{a, b\}$, necessariamente $x = a$, altrimenti varrebbe $x \notin A$, assurdo.

2. Per estensionalità, $(a, b) = (a, b')$ se e solo se hanno gli stessi elementi. Cioè,
   - $\{a\} = \{a\}$ e $\{a, b\} = \{a, b'\} \Rightarrow b = b'$
   - $\{a\} = \{a, b'\}$ e $\{a'\} = \{a, b\} \Rightarrow b = a = b'$.
3. $\Leftarrow$: Se $a = a'$ e $b = b'$, si ha che

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = (a', b')$$

   $\Rightarrow$: Supponiamo che valga $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Se $a \neq b$, $\{a\} = \{a'\}$ per estensionalità, e $\{a, b\} = \{a', b'\}$. Sostituendo, si trova che $\{a, b\} = \{a, b'\}$, e dunque sempre per estensionalità $b = b'$. Se invece $a = b$, $\{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$. Cioè, $\{a\} = \{a'\}$, e $\{a\} = \{a', b'\} \rightarrow a = a' = b'$, cioè $a = a'$ e $b = b'$ vale anche in questo caso.

$\square$

2 Ordine totale di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con l'ordine della minima differenza

Definiamo una relazione d'ordine $<$ su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, tale che, date f e $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f < g$ se e solo se $f(k) < g(k)$, dove $k := \min X_{f,g} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq g(n)\}$.

Proposizione 2.1. *La relazione d'ordine $<$ è un ordine totale su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ma non un buon ordine.*

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che $<$ è un ordine parziale su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

- $X_{f,f} = \emptyset$, dunque k come sopra non esiste, e quindi $f \not< f$.
- Se $f < g$, allora $f(k) < g(k) \Rightarrow g(k) \not< f(k) \Rightarrow g \not< f$.
- Siano $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, e siano $k_1 = \min X_{f,g}$ e $k_2 = \min X_{g,h}$. Distinguiamo in tre casi:
  - se $k_1 = k_2 := k$, $f(k) < g(k) < h(k)$, cioè $f < h$.
  - Se $k_1 < k_2$, $f(k_1) < g(k_1) = h(k_1) \Rightarrow f < h$
  - Se $k_1 > k_2$, $f(k_2) = g(k_2) < h(k_2) \Rightarrow f < h$

Mostriamo che vale la tricotomia dell'ordine: siano f e $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; se $f = g$, $X_{f,g} = \emptyset$, che implica $f \not< g \wedge g \not< f$. Se invece $f \neq g$, $X_{f,g} \neq \emptyset$; sia k il minimo di $X_{f,g}$. Abbiamo due casi:

- $f(k) < g(k) \Rightarrow f < g$

- $f(k) > g(k) \Rightarrow g < f$

Resta da dimostrare che $<$ non è un buon ordine. Sia $\langle a_{k,n} \rangle_n$ una successione di successioni di questa forma:

$$a_{k,n} = \begin{cases} 2 & \text{se } n = k \\ 1 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che $\langle a_{k,n} \rangle_n$ abbia minimo, e sia $\langle a_{k,n_0} \rangle$ tale minimo. Allora, vale $\langle a_{n_0+1,k} \rangle_k < \langle a_{n_0,k} \rangle_k$, in quanto $a_{n_0+1,k} = 1$ per $k \leq n_0$, ma $a_{n_0,n_0} = 2 > 1 = a_{n_0+1,n_0}$, e $a_{n_0,k} = a_{n_0+1,k} = 1$ per $k < n_0$. Cioè, usando la notazione di cui sopra, $n_0 = \min X_{\langle a_{n_0,n} \rangle, \langle a_{n_0+1,n} \rangle}$. Ciò implicherebbe che $\langle a_{n_0+1,k} \rangle < \langle a_{n_0,k} \rangle$, assurdo. □

3 Ordine totale di $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, con l'ordine della massima differenza

Prendiamo il sottoinsieme $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definito come

$$Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | \, \exists n_0 \; f(m) = 0 \; \forall m > n_0\}$$

Definiamo una relazione d'ordine $<$ su $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, tale che date f e $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f < g$ se e solo se $f(k) < g(k)$, dove $k := \max X_{f,g} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq g(n)\}$.

Proposizione 3.1. *La relazione d'ordine $<$ è un ordine totale su $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.*

Dimostrazione. Per mostrare che $<$ è effettivamente una relazione d'ordine, si procede come sopra. Mostriamo che vale la tricotomia: se $f = g$, $X_{f,g} = \emptyset$, e non ha massimo. Dunque, $f \not< g \wedge g \not< f$. Se invece $f \neq g$, $X_{f,g} \neq \emptyset$, ed è limitato superiormente. Sia ora $k = \max X_{f,g}$: se $f(k) < g(k)$, vale $f < g$, mentre se $f(k) > g(k)$, vale $g < f$. □

4 Forme equivalenti dell'assioma di scelta

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti.

Definizione 4.1. *(Funzione di scelta) Una funzione*

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$$

*si dice **funzione di scelta per** $\mathcal{F}$ se, per ogni $A \in \mathcal{F}$, $f(A) \in A$.*

Definizione 4.2. *(Insieme selettore) Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. Si dice **insieme di scelta** o **insieme selettore** per $\mathcal{F}$ un insieme Y tale che, per ogni $A \in \mathcal{F}$, $|A \cap Y| = 1$.*

L'assioma di scelta dice che

Assioma 1. *(di scelta) Sia $\langle A_i | i \in I \rangle$ una I-sequenza infinita di insiemi. Allora,*

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

.

Esistono numerose formulazioni equivalenti dell'assioma della scelta. Di seguito ne elenchiamo alcune e ne dimostriamo l'equivalenza.

1. AC
2. Ogni famiglia non vuota di insiemi non vuoti ammette una funzione di scelta
3. Ogni insieme $A \neq \emptyset$ ammette una funzione di scelta

$$f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$$

4. Ogni famiglia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ di insiemi disgiunti a due a due ammette un selettore
5. Ogni funzione suriettiva ammette un'inversa destra
6. $$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} F_{i,f(i)}$$

Proposizione 4.1. *I fatti sopraelencati (1)-(6) sono tra loro equivalenti.*

Dimostrazione. Lo schema dimostrativo seguito è

$$(AC) \to (2) \to (4) \to (5) \to (AC) \leftrightarrow (6), \ (2) \leftrightarrow (3)$$

- $(AC) \rightarrow (2)$: Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. Se $\mathcal{F}$ è finita, si procede per induzione sulla cardinalità. Sia $n = |\mathcal{F}|$.
  - $n = 0$: La proprietà è vera a vuoto
  - $n \rightarrow \hat{n}$: Se $|\mathcal{F}| = n + 1$, scrivo $\mathcal{F}$ come $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \{X\}$, con $|\mathcal{F}'| = n$. Per $\mathcal{F}'$ esiste dunque una funzione di scelta f', che si può estendere a funzione di scelta per $\mathcal{F}$ ponendo
  $$f_{|\mathcal{F}'} = f', \ f(X) \in X$$

  Se invece $\mathcal{F}$ è infinita, considero $\prod_{A \in \mathcal{F}} A$. Posso indicizzare $\mathcal{F}$ usando la funzione identità: la I-sequenza $\langle A_i | i \in I \rangle$ è non vuota, e ogni A_i è non vuoto. Dunque, per (AC) esiste $f \in \prod_{i \in I} A_i$. Tale f è per definizione una funzione di scelta per $\mathcal{F}$, dato che $f(i) \in A_i$, e quindi $f(A_i) \in A_i$.

- $(2) \rightarrow (3)$: Basta notare che, se $A \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, e quindi per (2) ammette una funzione di scelta.

- $(3) \rightarrow (4)$: Consideriamo $\bigcup \mathcal{F}$: dal momento che gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti, $\mathcal{F}$ è una partizione di $\bigcup \mathcal{F}$, e dunque $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F})$. Dato che $\bigcup \mathcal{F}$ è non vuoto, esiste per (3) una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$. Costruiamo il selettore utilizzando la f: per definizione, $f(A) \in A$ per ogni $A \in F$ (osserviamo che la funzione è ben definita peché gli elementi di $\mathcal{F}$ sono disgiunti a due a due). L'insieme $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} f(A) = Imf$ è per costruzione un selettore per $\mathcal{F}$.

- $(4) \rightarrow (5)$: Sia $f : A \longrightarrow B$ surgettiva, e sia $X = \{f^{-1}(\{b\}) | b \in B\}$. Innanzitutto, sappiamo che X esiste per l'assioma di separazione, e dato che f è una funzione surgettiva, X è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, disgiunti a due a due. Allora, X ammette un selettore Y. Definiamo ora
  $$g : B \longrightarrow A$$
  $$b \longmapsto a'$$
  dove $a' := f^{-1}(\{b\}) \cap Y$. Mostriamo che $f \circ g = id_B$. $f \circ g(\{b\}) = f(a') = \{b\}$.

- $(5) \rightarrow (AC)$: Sia $\langle A_i | i \in I \rangle$ una I-sequenza infinita di insiemi non vuoti, e $\forall a \in \bigcup_{i \in I}$ considero $X_a = \{i \in I | a \in A_i\}$. Posto $X = \{X_a \times \{a\} | a \in \bigcup_{i \in I} A_i\}$, che esiste per l'assioma di separazione, $X_a \times \{a\} \in \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} A_i)$. La funzione $f : \bigcup X \longrightarrow I, (i, a) \longmapsto i$ è surgettiva, e ha quindi un'inversa destra g. Definiamo dunque $g' : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, i \longmapsto a'$, dove a' è la seconda componente di $g(i)$, cioè $a' = \bigcup((\bigcup(g(i)) \setminus \{i\})$. Inoltre, $g' \in \prod_{i \in I} A_i$.

- $(AC) \leftrightarrow (6)$: Mostriamo una freccia per volta.
  $\Rightarrow$: Considero I e J infiniti, altrimenti si procede per induzione sulla cardinalità in modo simile a quanto visto sopra.

– $\subseteq$: Fissata una coppia di indici (i,j), si ha che $a \in \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{i,j}$ se e solo se $\forall i \exists j \; a \in A_{i,j}$. Usando (AC), ne scegliamo uno in particolare. Prendiamo dunque $a \in \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{i,j}$, e per ogni $i \in I$ sia $X_i = \{j \in J | a \in A_{i,j}\}$. $\langle X_i | i \in I\rangle$ è una I-sequenza infinita di insiemi non vuoti, dunque per (AC) esiste $f \in \prod_{i\in I} X_i$; ora, si osserva che $f \in J^I$, e $a \in \bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$. Segue la tesi.

– $\supseteq$: Se $a \in \bigcup_{f\in J^I} \bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$, ciò significa che esiste $f \in J^I$ tale che $\forall i \in I$ vale $a \in A_{i,f(i)}$. Dunque, $a \in \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in I} A_{i,j}$ per quanto detto sopra.

$\Leftarrow$: Sia $\langle A_i | i \in I\rangle$ una I-sequenza infinita di insiemi non vuoti, e sia $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Consideriamo la $(I \times X)$-sequenza

$$g : (I \times X) \longrightarrow \{A_i | i \in I\} \cup \{\emptyset\}$$

$$(i,x) \longmapsto \begin{cases} X & \text{se } x \in A_i \\ \emptyset & \text{se } x \notin A_i \end{cases}$$

Da (6), si ottiene che

$$\bigcap_{i\in I} \bigcup_{x\in X} g(i,x) = \bigcup_{f\in X^I} \bigcap_{i\in I} g(i,f(i))$$

Notare che il LHS è non vuoto (è proprio X), e quindi anche RHS è non vuoto. Pertanto, esiste $f : I \longrightarrow X$ tale che $\forall i \in I$ vale $g(i,f(i)) \neq \emptyset$, cioè $f(i) \in A_i$. Tale f è quindi una funzione di scelta per $\langle A_i | i \in I\rangle$.

□

5 Cardinalità e operazioni fondamentali

Proviamo le due seguenti proposizioni:

Proposizione 5.1. *Siano A e B due insiemi, e A' e B' due insiemi tali che $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $|A \sqcup B| = |A' \sqcup B'|$
2. $|A \times B| = |A' \times B'|$
3. $|B^A| = |B'^{A'}|$
4. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$

Dimostrazione. Siano $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ due bigezioni.

1. La funzione
$$\phi : A \sqcup B \longrightarrow A' \sqcup B'$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$
è bigettiva, dato che è unione disgiunta di due funzioni bigettive con immagini disgiunte.

2. La funzione
$$\phi : A \times B \longrightarrow A' \times B'$$
$$(a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$
è bigettiva. Infatti, la funzione $A' \times B' \ni (a', b') \mapsto (f^{-1}(a'), g^{-1}(b')) \in A \times B$ è la sua inversa.

3. La funzione
$$\phi : B^A \longrightarrow B'^{A'}$$
$$\psi \longmapsto g \circ \psi \circ f^{-1}$$
è bigettiva. Verifichiamolo esibendo un'inversa:
$$\Gamma : B'^{A'} \longrightarrow B^A$$
$$\psi' \longmapsto g^{-1} \circ \psi' \circ f$$
è l'inversa cercata.

4. La funzione
$$\phi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A')$$
$$B \longmapsto f[B] = \{f(b) | b \in B\}$$
è bigettiva.

□

Proposizione 5.2. *Siano A e B due insiemi, e A' e B' due insiemi tali che $|A| \leq |A'|$ e $|B| \leq |B'|$. Valgono i seguenti fatti:*

- $|A \sqcup B| \leq |A' \sqcup B'|$
- $|A \times B| \leq |A' \times B'|$
- $|Fun(A, B)| \leq |Fun(A', B')|$
- $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(A')|$

Dimostrazione. La dimostrazione fatta sopra è valida anche se f e g sono funzioni iniettive. Infatti, non abbiamo bisogno di ipotesi particolari per esibire inverse sinistre di funzioni iniettive. □

6 Operazioni su insiemi numerabili

Dimostriamo qualche proprietà riguardo a operazioni insiemistiche con insiemi numerabili.

Proposizione 6.1. *L'unione di due insiemi numerabili è numerabile.*

Dimostrazione. Siano A e B i due insiemi in questione. Allora, esistono due funzioni bigettive $\psi : A \longrightarrow 2\mathbb{N}$ e $\phi : B \longrightarrow 2\mathbb{N} - 1$. Inoltre, la loro unione, che si suppone disgiunta per comodità, è in bigezione con l'unione disgiunta $2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N} - 1) = \mathbb{N}$, ed è quindi numerabile. $\square$

Osservazione 6.1. *Con lo stesso procedimento si dimostra che un'unione finita di n insiemi numerabili è numerabile. Per vederlo, basta fare una congruenza modulo n e procedere come sopra.*

Proposizione 6.2. *La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{1, ..., k\}, \quad n \mapsto n + k$ è bigettiva per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che f è bigettiva esibendo un'inversa. Sia $g : \mathbb{N} \setminus \{1, ..., k\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad m \mapsto m - k$. Mostriamo che le due funzioni sono inverse.

$$(f \circ g)(n) = (n - k) + k = n$$
$$(g \circ f)(n) = (n + k) - k = n$$

Dunque, $f \circ g = id_{\mathbb{N} \setminus \{1,...,k\}}$, e $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$. Le funzioni f e g sono pertanto bigettive. $\square$

Proposizione 6.3. *Sia A numerabile, e sia $F \subset A$ finito. Allora, $A \setminus F$ è numerabile.*

Dimostrazione. Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ due bigezioni. Sia $F' = (g \circ f)[F]$, e sia $x := \min(\pi_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \pi_1(F))$, dove π_1 è la proiezione sulla prima coordinata. Allora, la controimmagine di x secondo π_1 è l'insieme $\{x\} \times \mathbb{N}$, disgiunto da F' per costruzione ed equipotente ad $\mathbb{N}$: tornando indietro, $(f^{-1} \circ g^{-1})[\{x\} \times \mathbb{N}] \subseteq A \setminus F$. Vale allora la seguente catena di disuguaglianze:

$$\aleph_0 = |A| \geq |A \setminus F| \geq |\{x\} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$

Si conclude usando il teorema di Cantor-Bernstein. $\square$

Proposizione 6.4. *Sia A numerabile, e sia F finito e disgiunto da A. Allora, $A \sqcup F$ è numerabile.*

Dimostrazione. Sia $|F| = k$. Se A è numerabile, esiste una bigezione $g : A \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{1, ..., k\}$. Allora, F è in bigezione con $\{1, ..., k\}$. Enumeriamo F, $F = \{x_1, ..., x_n\}$, e definiamo la funzione

$$\phi : A \sqcup F \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a \longmapsto g(a) & \forall a \in A \\ x_i \longmapsto i & \forall x_i \in F \end{cases}$$

Notiamo che la funzione è iniettiva: infatti, è unione disgiunta di funzioni iniettive con immagine disgiunta. Vale dunque la seguente catena di disuguaglianze:

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \geq |A \sqcup F| \geq |A| = \aleph_0$$

Si conclude con il teorema di Cantor-Bernstein. □

Proposizione 6.5. *Sia A un insieme numerabile, e B un insieme tale che $A\Delta B$ sia finito. Allora, B è numerabile.*

Dimostrazione. Scriviamo $A\Delta B$ in due modi diversi:

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Notiamo che $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ per costruzione.
Ora, $|A\Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$. Dato che dev'essere finita, è necessario che entrambi gli addendi del RHS siano finiti. Se B fosse finito, l'intersezione $A \cap B$ sarebbe finita, e dunque l'insieme $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$ sarebbe finito, assurdo. Dunque, B è infinito. Se in particolare B fosse più che numerabile, si avrebbe che $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ sarebbe più che numerabile, in quanto unione di un insieme più che numerabile, $B \setminus A$, e uno numerabile, $A \setminus B$, assurdo. Dunque, B è numerabile. □

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 2

Enrico Berni, 582049

21/03/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Equipotenza di insiemi di funzioni infiniti
2. Dimostrazione alternativa del fatto che $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$
3. Equipotenza di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e del prodotto cartesiano di due sue copie
4. Sequenze finite e parti finite di insiemi infiniti
5. Cardinalità di sottoinsiemi di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
6. Cardinalità della topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$
7. Unione al più continua di insiemi al più continui è al più continua, con condizioni sufficienti per la continuità
8. Differenze di insiemi infiniti
9. Paradosso della classe universale
10. Cardinalità di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$
11. Bigezioni canoniche tra unioni e prodotti di insiemi equipotenti
12. Equipotenza di parti finite e sequenze finite di insiemi equipotenti

1 Equipotenza di insiemi di funzioni

Proposizione 1.1. *Siano A e B due insiemi disgiunti. Allora, dato un insieme X, vale $|X^A \times X^B| = |X^{A \sqcup B}|$.*

Dimostrazione. La funzione

$$\phi : X^A \times X^B \longrightarrow X^{A \sqcup B}$$

$$(f,g) \longmapsto \psi_{f,g}$$

dove

$$\psi_{f,g} : A \sqcup B \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

è bigettiva. □

2 Dimostrazione alternativa del fatto che $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

Proposizione 2.1. *Vale l'equipotenza* $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Dimostrazione. Dimostreremo che, equivalentemente, $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
Siano

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,,\, n \longmapsto 2n$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,,\, n \longmapsto 2n-1$$

due funzioni iniettive. Sia ora

$$\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$(A,B) \longmapsto f[A] \sqcup g[B]$$

Mostriamo che è bigettiva: date due coppie ordinate (A,B) e (C,D) diverse tra loro, dal momento che sia la f che la g sono iniettive si ha che $f[A] \sqcup g[B]$ e $f[C] \sqcup g[D]$ sono due insiemi diversi. Per mostrare che è suriettiva, basta notare che, dato un insieme $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, la coppia $(\{\frac{n}{2}|n \in 2X\}, \{\frac{n+1}{2}|n \in 2X-1\})$ ha come immagine proprio X. Dunque, vale la seguente uguaglianza:

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$

□

3 Equipotenza di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e del prodotto cartesiano di due sue copie

Proposizione 3.1. *Vale l'uguaglianza* $|\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dimostrazione.

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |2^{\mathbb{R}}| = |2^{2\times\mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{R}\sqcup\mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{R}} \times 2^{\mathbb{R}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

□

4 Sequenze finite e parti finite di insiemi infiniti

Definizione 4.1. *Sia X un insieme. L'insieme $\mathfrak{F}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) | A \text{ è finito}\}$ si chiama* ***insieme delle parti finite*** *di X.*

Definizione 4.2. *Sia X un insieme. L'insieme $Seq(X) = \{f : n \to X | n \in \mathbb{N}\}$ si chiama* ***insieme delle sequenze finite*** *di X.*

Proposizione 4.1. *Sia X un insieme infinito, tale che $|X \times X| = |X|$. Allora, vale che $|Seq(X)| = |\mathfrak{F}(X)| = |X|$.*

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che $Seq(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$. Ora, banalmente $|X| \leq |\mathfrak{F}(X)|$, dato che $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva. Inoltre, possiamo enumerare un elemento di $A \in \mathfrak{F}(X)$, e mandarlo nella sequenza finita che ha come coordinate gli elementi enumerati di A ($\langle a_k \rangle_{k \in \{1,...,n\}} \mapsto (a_1, ..., a_n)$). Dunque, $|\mathfrak{F}(X)| \leq |Seq(X)|$. Infine, $|Seq(X)| = |\bigcup_{\mathbb{N}} X^n| = |\mathbb{N} \times X| \leq |X \times X| = |X|$. Vale pertanto la seguente catena di disuguaglianze:

$$|X| \leq |\mathfrak{F}(X)| \leq |Seq(X)| \leq |X \times X| = |X|$$

Si conclude usando il teorema di Cantor-Bernstein. □

5 Cardinalità di sottoinsiemi di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Proposizione 5.1. *Vale la seguente catena di uguaglianze:*

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |[\mathbb{R}]^{\aleph_0}| = |[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}| = \mathfrak{c}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la catena di uguaglianze in tre parti:

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

$$\mathfrak{c} = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| \geq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \geq |2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| \geq |[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}| \geq |[\mathbb{R}]^{\aleph_0}| \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Qualche parola sulle disuguaglianze di sopra: $[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}$ può essere visto come insieme delle immagini delle successioni a valori in $\mathbb{R}$: infatti, se un sottoinsieme di $X \subseteq \mathbb{R}$ è finito, posso enumerarlo (per esempio in ordine crescente), generando una successione definitivamente costante: considero $X = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, e la successione $x_k = \begin{cases} \lambda_k & k < n \\ \lambda_n & k \geq n \end{cases}$, mentre se è numerabile, posso enumerarlo, inducendo un buon ordine, e poi costruire la successione similmente a quanto fatto sopra. Dunque, $|[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$. Per quanto riguarda il passaggio seguente, $[\mathbb{R}]^{\aleph_0} \subseteq [\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}$. Infine, c'è un'iniezione tra $2^{\aleph_0}$ e i sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$, ottenuta mandando una funzione indicatrice nell'insieme su cui è positiva. Si conclude usando il teorema di Cantor-Bernstein. □

6 Cardinalità della topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$

Sia τ la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 6.1. *Vale l'uguaglianza* $|\tau| = \mathfrak{c}$.

Definizione 6.1. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico. Una* ***base*** *di* τ *è un insieme di aperti* $\mathcal{B} \subseteq \tau$ *tale che ogni aperto di* τ *si possa esprimere come unione di elementi di* $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Banalmente, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ è un aperto per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, dunque $\mathfrak{c} \leq |\tau|$. Ora, sappiamo che la topologia euclidea è a base numerabile. Sia $\mathcal{B} = \langle B_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una tale base. La funzione

$$\phi : \tau \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$$
$$U \longmapsto \{B \in \mathcal{B} | B \subseteq U\}$$

è iniettiva. Infatti, è inversa destra della funzione unione

$$\bigcup : \mathcal{P}(\mathcal{B}) \longrightarrow \tau$$

$$\langle B_i \rangle \longmapsto \bigcup_i B_i$$

suriettiva per definizione di base. Ciò garantisce che $|\tau| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B})| = \mathfrak{c}$. Si conclude con Cantor-Bernstein. □

7 Unione al più continua di insiemi al più continui è al più continua, con condizioni sufficienti per la continuità

Proposizione 7.1. *(AC) Sia* $\langle A_i | i \in I \rangle$ *una* I*-sequenza di insiemi tale che* $|A_i| \leq \mathfrak{c}$ *per ogni* i*, e* $|I| \leq \mathfrak{c}$*. Allora,* $|\bigcup_I A_i| \leq \mathfrak{c}$.
Inoltre, se una delle due seguenti condizioni è vera, $|\bigcup_I A_i| = \mathfrak{c}$:

1. *Esiste* $j \in I$ *tale che* $|A_j| = \mathfrak{c}$
2. $|I| = \mathfrak{c}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$

Dimostrazione. Usando (AC), considero la I-sequenza $\mathfrak{F} = \langle f_i | i \in I \rangle$, dove per ogni i

$$f_i : \mathbb{R} \longrightarrow A_i$$

è una funzione suriettiva. Esiste anche una funzione suriettiva

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow I$$

Consideriamo adesso la funzione

$$\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \bigcup_I A_i$$

$$(x, y) \longmapsto f_{\psi(x)}(y)$$

Osserviamo che la τ è suriettiva per costruzione. Dato che $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, segue che $|\bigcup_I A_i| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.
Mostriamo adesso che le due condizioni di cui sopra sono sufficienti affinché valga $|\bigcup_I A_i| = \mathfrak{c}$:

1. Sappiamo che esiste una funzione bigettiva da $\mathbb{R}$ ad A_j. Esiste un'iniezione canonica da A_j in $\bigcup_I A_i$, e dunque esiste un'iniezione da $\mathbb{R}$ a $\bigcup_I A_i$. Vale quindi $\mathfrak{c} \leq |\bigcup_I A_i|$. Per quanto detto prima vale anche la disuguaglianza opposta, e per Cantor-Bernstein segue la tesi.

2. Dato che $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi disgiunti a due a due, per (AC) esiste un selettore X per $\langle A_i \rangle$. La funzione

$$\phi : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$i \longmapsto X \cap A_i$$

è iniettiva, essendo gli A_i disgiunti a due a due. Vale quindi che $\mathfrak{c} \leq |\bigcup_I A_i|$, e similmente al punto (1) segue la tesi.

□

8 Differenze di insiemi infiniti

Proposizione 8.1. *(AC) Siano A e B due insiemi infiniti tali che $A \subseteq B$, $|A| < |B|$. Allora, $|B \setminus A| = |B|$.*

Dimostrazione. Assumendo l'assioma di scelta, vale che $|B \times B| = |B|$. Sia quindi $\psi : B \longrightarrow B \times B$ una bigezione. Consideriamo $A' = \psi[A]$, naturalmente equipotente ad A, e dunque $|A'| < |B \times B|$. Sia ora $\pi_1 : B \times B \longrightarrow B$ la proiezione sulla prima coordinata (è suriettiva). Dato che $|A| < |B|$, esiste un elemento $b_0 \in (\pi_1[B \times B] \setminus \pi_1[A'])$. La sua fibra tramite π_1 è $\{b_0\} \times B$, che ha la cardinalità di B, ed è disgiunto da A' per costruzione. Vale dunque la seguente catena:

$$|B| = |B \times B| \geq |(B \times B) \setminus A'| = |B \setminus A| \geq |B|$$

Si conclude per Cantor-Bernstein. □

9 Paradosso della classe universale

Sia ξ la classe universale, $\xi = \{x|x \text{ è un insieme}\}$.

Proposizione 9.1. *Sia ξ come sopra. Allora, non esiste un insieme A tale che $A = \xi$.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo che un tale A esista: consideriamo l'insieme delle parti di A, $\mathcal{P}(A)$. Per il teorema di Cantor, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Tuttavia, per ipotesi $\mathcal{P}(A) \subseteq A$, e dunque $|\mathcal{P}(A)| \leq |A|$; ciò è assurdo, pertanto un tale A non esiste. □

10 Cardinalità di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$

Proposizione 10.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ infnito. Allora, A è numerabile.*

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Definiamo per ricorsione numerabile

$$a_0 = a,\ a_{n+1} = \min\{A \setminus \{a_0, ..., a_n\}\}$$

Allora, la successione $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ è una funzione iniettiva da $\mathbb{N}$ in A. Vale quindi $\aleph_0 \leq |A|$. Ma A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, e quindi l'iniezione canonica da A in $\mathbb{N}$ garantisce che $|A| \leq \aleph_0$. Si conclude per Cantor-Bernstein. □

11 Bigezioni canoniche tra unioni e prodotti di insiemi equipotenti

Proposizione 11.1. *Siano $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ e $\langle A'_i \rangle_{i\in I}$ due I-sequenze di insiemi tali che $|A_i| = |A'_i|$ per ogni $i \in I$. Allora, $|\prod_I A_i| = |\prod_I A'_i|$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{F} = \langle f_i \rangle_{i\in I}$ una I-sequenza di funzioni, tali che $f_i : A_i \longrightarrow A'_i$ sia bigettiva per ogni i. La funzione

$$\phi : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A'_i$$

$$\langle a_i \rangle_I \longmapsto \langle f_i(a_i) \rangle_I$$

è bigettiva. Infatti, dati due elementi $\langle a_i \rangle \neq \langle b_i \rangle \in \prod_I A_i$, esiste un $j \in I$ tale che $a_j \neq b_j$, e dunque $f_j(a_j) \neq f_j(b_j)$ per bigettività di f_j, da cui $f(\langle a_i \rangle_I) \neq f(\langle b_i \rangle_I)$.
Per la suriettività, basta notare che per ogni $\langle a_i \rangle_I \in \prod_I A'_i$, vale $f(\langle f_i^{-1}(a_i) \rangle_I) = \langle a_i \rangle_I$. □

Proposizione 11.2. *Siano $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ e $\langle A'_i \rangle_{i\in I}$ due I-sequenze di insiemi a due a due disgiunti e tali che $|A_i| = |A'_i|$ per ogni $i \in I$. Allora, $|\bigcup_I A_i| = |\bigcup_I A'_i|$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{F} = \langle f_i | i \in I \rangle$ una I-sequenza di funzioni bigettive come sopra. Per ogni $a \in \bigcup_I A_i$, esiste un certo indice $j(a) \in I$ dipendente da a tale che $a \in A_{j(a)}$. Allora, la funzione

$$\phi : \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A'_i$$

$$a \longmapsto f_{j(a)}(a)$$

è bigettiva. La dimostrazione della bigettività è analoga a quella fatta per il prodotto. □

12 Equipotenza di parti finite e sequenze finite di insiemi equipotenti

Proposizione 12.1. *Siano X e Y due insiemi equipotenti. Allora,* $|\mathfrak{F}(X)| = |\mathfrak{F}(Y)|$.

Dimostrazione. Sia $g : X \longrightarrow Y$ una bigezione. Consideriamo la funzione

$$\psi : \mathfrak{F}(X) \longrightarrow \mathfrak{F}(Y)$$

$$A \longmapsto g[A]$$

La ψ è bigettiva, segue dalla bigettività di g. □

Proposizione 12.2. *Siano X e Y due insiemi equipotenti. Allora,* $|Seq(X)| = |Seq(Y)|$.

Dimostrazione. Sia $g : X \longrightarrow Y$ una bigezione. Consideriamo la funzione

$$\psi : Seq(X) \longrightarrow Seq(Y)$$

$$(x_0, ..., x_n) \longmapsto (g(x_0), ..., g(x_n))$$

La ψ è bigettiva, segue dalla bigettività di g. □

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 3

Enrico Berni, 582049

30/03/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Esistenza di dominio e immagine di una relazione
2. Esistenza di insiemi quoziente
3. Esistenza di insiemi di funzioni
4. Esistenza di prodotti cartesiani di sequenze di insiemi
5. Bigezione tra $[0, 1]$ e $(0, 1)$
6. Ordine totale di $(\omega, \in)$
7. Proprietà dei numeri naturali
8. Esempi di naturali non ben definiti
9. Equivalenza del principio del buon ordinamento e della forma debole del principio di induzione
10. Unione di funzioni compatibili è una funzione
11. Forma forte del teorema di ricorsione numerabile

1 Esistenza di dominio e immagine di una relazione

Proposizione 1.1. *Sia R una relazione binaria su $A \times B$. Allora, esistono gli insiemi $DomR$ e ImR.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che $R \subseteq A \times B$, e dunque

$$DomR = \{a | \exists b(a, b) \in R\} \subseteq A$$

$$ImR = \{b | \exists a(a, b) \in R\} \subseteq B$$

Entrambi esistono per l'assioma di separazione. $\square$

2 Esistenza di insiemi quoziente

Proposizione 2.1. *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su A. Allora, esiste l'insieme quoziente $A/\sim$.*

Dimostrazione. Notiamo che, fissato $a \in A$, la classe di equivalenza di a è $[a] = \{a' | a \sim a'\} \subseteq A$, e dunque esiste per separazione. Ora, per ogni a, $[a] \in \mathcal{P}(A)$ che esiste per l'assioma delle parti. Dunque, l'insieme

$$\{U | \exists a \in A \quad U = [a]\} = A/\sim$$

esiste per separazione. □

3 Esistenza di insiemi di funzioni

Proposizione 3.1. *Siano A e B due insiemi. Allora, esiste $B^A = \{f : A \to B | f \; funzione\}$.*

Dimostrazione.

$$B^A = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) | \forall a \in A \, \exists! b \, (a, b) \in f\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times B))$$

e dunque esiste per separazione. □

4 Esistenza di prodotti cartesiani di sequenze di insiemi

Proposizione 4.1. *Sia $\langle A_i | i \in I\rangle$ una I-sequenza di insiemi. Allora, esiste $\prod_{i\in I} A_i$.*

Dimostrazione.

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \in Fun(I, \bigcup_{i\in I} A_i) | f(i) \in A_i\} \subseteq Fun(I, \bigcup_{i\in I} A_i)$$

Dunque, il prodotto esiste per separazione. □

5 Bigezione tra $[0, 1]$ e $(0, 1)$

Proposizione 5.1. *Vale l'equipotenza $|[0, 1]| = |(0, 1)|$.*

Dimostrazione. Esibiamo una bigezione esplicita tra i due intervalli reali $[0,1]$ e $(0,1)$: consideriamo i due insiemi $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $B = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, numerabili perché sottoinsiemi di un insieme numerabile. Stabiliamo due enumerazioni di A e B: $A = \langle a_n | n \in \omega \rangle$, $B = \langle b_n | n \in \omega \rangle$. Definiamo adesso la nostra funzione come

$$f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \notin A \\ b_i & \text{se } x = a_i \text{ per qualche } i \in \omega \end{cases}$$

La f è la bigezione cercata, con inversa

$$g : (0,1) \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \notin B \\ a_i & \text{se } x = b_i \text{ per qualche } i \in \omega \end{cases}$$

□

6 Ordine totale di $(\omega, \in)$

Sia $(X, <)$ un insieme ordinato. Un elemento $x \in X$ si dice **confrontabile** se, per ogni $y \in X$, vale una tra le tre: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

Proposizione 6.1. *Sia* $(\omega, \in)$ *l'insieme dei numeri naturali di Von Neumann, con la relazione di appartenenza canonica.* $(\omega, \in)$ *è totalmente ordinato.*

Dimostrazione. Supponiamo di sapere che la relazione $\in$ è un ordine parziale su ω: mostriamo che ogni elemento di ω è confrontabile secondo $\in$. Sia $p(x)$ la proprietà "x è confrontabile"; dimostriamola per induzione su x.

- $\underline{x = 0}$: $0 \in n$ per ogni $n \in \omega$, per una proposizione dimostrata a lezione.
- $\underline{x \Rightarrow \hat{x}}$: Sappiamo che x è confrontabile; dunque, comunque preso $y \in \omega$, abbiamo tre casi:
  - Se $x = y$, $y \in \{x\}$, e dunque $y \in \hat{x}$.
  - Se $y \in x$, banalmente $y \in \hat{x}$.
  - Se $x \in y$, allora $x \subset y$, e $x \in y$ implica $\hat{x} = y$ o $\hat{x} \in y$.

Vale dunque la tricotomia dell'ordine, che è pertanto un ordine totale. □

7 Proprietà dei numeri naturali

Proposizione 7.1. *Sia ω l'insieme dei numeri naturali di Von Neumann, e siano $x, y \in \omega$ due naturali. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $x \in y$ *se e solo se* $x \subset y$
2. $\hat{x} \in \hat{y} \to x \in y$
3. *Per ogni* $y \in \omega$, *se* $x \in y \in \omega$, *allora* $x \in \omega$
4. $x \cap y$ *è un naturale, e* $x \cap y = \min\{x, y\}$
5. $x \cup y$ *è un naturale, e* $x \cup y = \max\{x, y\}$
6. $\hat{x} = S(x)$, *cioè non esiste* $y \in \omega$ *tale che* $x \in y \in \hat{x}$

Dimostrazione.

1.
   - $\underline{\Rightarrow}$: $\in$ è transitiva, essendo una relazione d'ordine, quindi $n \in m \to n \subseteq m$: dal momento che $n \in m$ e $m \notin m$, $m \neq n$, e dunque l'inclusione è stretta.
   - $\underline{\Leftarrow}$: Sia $p(m)$="$\forall n \subset m$, $n \in m$": dimostriamola per induzione.
     - $\underline{m = 0}$: $\nexists n$ $n \subset \emptyset$, dunque la proposizione è vera a vuoto.
     - $\underline{m \Rightarrow \hat{m}}$: Se $n \subset m$ e $m \notin n$, allora $n \subseteq m$, e si rientra nell'ipotesi induttiva. Altrimenti, se fosse $m \in n$, allora varrebbe che $m \subseteq n$, assurdo.
2. Se $\hat{x} \in y \cup \{y\}$, ci sono due casi: se $\hat{x} = y$, banalmente $x \in y$. Se invece $\hat{x} \in y$, $x \in \hat{x} \in y$.
3. Sia $p(y)$ l'enunciato numero 3: dimostriamolo per induzione su y.
   - $\underline{y = 0}$: La proposizione è vera a vuoto.
   - $\underline{y \to \hat{y}}$: Sia $x \in \hat{y} \in \omega$, allora $x = y$ o $x \in y$. Se $x = y$, allora $x \in \omega$, dato che $y \in \omega$. Se $x \in y$ si conclude per ipotesi induttiva.
4. Sia (WLOG) $x = \min\{x, y\}$. Allora, per il punto (1) vale che $x \subset y$, e quindi $x \cap y = x \in \omega$.
5. Sia (WLOG) $x = \max\{x, y\}$. Allora, per il punto (1) vale che $y \subset x$, e quindi $x \cup y = x \in \omega$.
6. Supponiamo che esista un tale y: allora, dato che $y \in \hat{x}$, abbiamo due casi. Se $y = x$, per l'irriflessività dell'ordine vale $x \notin y$, assurdo; se invece $y \in x$, $x \notin y$ per l'asimmetria dell'ordine, assurdo.

$\square$

8 Esempi di naturali non ben definiti

Proposizione 8.1. *1. L'insieme $X = \{\{\emptyset\}\}$ non è un numero naturale.*

2. L'insieme $Y = \{\emptyset, X\}$ non è un numero naturale.

Dimostrazione. 1. Basta notare che $0 \notin X$, mentre per una proposizione vista a lezione $0 \in n$ per ogni $n \in \omega$.

2. Notiamo che $Y = \{0, \{1\}\}$: dunque, si ha che $\{1\} \in Y$, ma $1 \not\subset Y$. Per quanto detto sopra, ciò è sufficiente a dimostrare che Y non è transitivo e dunque $Y \notin \omega$.

□

9 Equivalenza del principio del buon ordinamento e della forma debole del principio di induzione

Proposizione 9.1. *La forma forte del teorema di induzione è equivalente alla forma debole.*

Dimostrazione. Abbiamo mostrato a lezione che la forma forte del teorema di induzione è equivalente al teorema del buon ordinamento. Mostreremo dunque che il teorema del buon ordinamento implica l'induzione debole, e che l'induzione debole implica quella forte.

- (BO)$\rightarrow$(Ind.D):
  Sia P una proprietà tale che $P(0)$ e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: mostriamo che P vale per ogni $n \in \omega$. Sia $X = \{n \in \omega | \neg P(n)\}$, e supponiamo che non sia vuoto. Allora, per il teorema del buon ordinamento, X ammette un minimo k; innanzitutto, $k \neq 0$, dato che per ipotesi $P(0)$, e quindi k sarà un successore, della forma $n + 1$ per qualche $n \in \omega$. Per ipotesi però, anche $P(n)$ è vera, dato che k è il minimo controesempio, e ciò implica che sia vera anche $P(k)$, e ciò è assurdo. Pertanto, X non ha minimo, e per il principio del buon ordinamento questo implica direttamente che X è vuoto. La tesi segue immediatamente.

- (Ind.D)$\rightarrow$(Ind.F):
  Sia P una proprietà tale che valga $P(0)$ e $(\forall x < yP(x)) \Rightarrow P(y)$. Mostriamo che P è vera per ogni $n \in \omega$. Sia $Y = \{n \in \omega | P(n)\}$; vogliamo mostrare usando l'induzione forte che $Y = \omega$.

  - $0 \in Y$ per ipotesi;
  - Se $n \in Y$, e per ogni $m < n$ vale $P(m)$, in particolare vale anche $P(n)$ per ipotesi, e dunque $n \in Y$ per ogni n successore.

Dato che Y contiene 0, ed è chiuso per successore, per il teorema di induzione debole si conclude che $Y = \omega$, come voluto.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

10 Unione di funzioni compatibili è una funzione

Proposizione 10.1. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni a due a due compatibili. Allora, $F = \bigcup \mathfrak{F}$ è una funzione di dominio $\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} Dom f$.*

Dimostrazione. Se $(a, b) \in F$, allora esiste $f \in F$ tale che $(a, b) \in f$; se ci fosse una coppia del tipo $(a, b') \in f$, con $b' \neq b$, ovviamente per definizione di funzione $(a, b) \notin f$, ma ciò non escluderebbe l'esistenza di una g tale che $(a, b') \in g$. Tuttavia, dato che le funzioni sono compatibili a due a due, deve valere $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in Dom f \cap Dom g$. Ciò assicura che F sia una funzione.
Mostriamo adesso una doppia inclusione per far vedere che $Dom F = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} Dom f$.

- $\subseteq$: Sia $a \in Dom F = Dom(\bigcup \mathfrak{F})$: allora, esiste $f \in \mathfrak{F}$ tale che $a \in Dom f$, e dunque $a \in \bigcup Dom f$.
- $\supseteq$: Viceversa, supponiamo di avere $a \in \bigcup Dom f$: allora, esiste $f \in \mathfrak{F}$ tale che $a \in Dom f$, e quindi $a \in Dom(\bigcup_{\mathfrak{F}} f) = Dom F$.

$\square$

11 Forma forte del teorema di ricorsione numerabile

Teorema 11.1 (di ricorsione numerabile, forma forte). *Sia A un insieme, sia $a \in A$ un suo elemento e sia $g : \omega \times Seq(A) \longrightarrow A$ una funzione. Allora, esiste ed è unica $f : \omega \longrightarrow A$ tale che*

$$\begin{cases} f(0) = a; \\ f(n+1) = g(n, f_{|\{0,\dots,n\}}) \end{cases}$$

Dimostrazione. Mostriamo che le approssimazioni finite (AF) di f sono a due a due compatibili. Se ϕ e ψ fossero due AF non compatibili, sia $k := \min\{i \in \omega | \phi(i) \neq \psi(i)\}$. Innanzitutto osserviamo che $k \neq 0$, dato che per definizione $\phi(0) = \psi(0) = a$. Dunque, $k = m+1$ per qualche $m \in \omega$. Tuttavia, $\phi(m+1) = g(m, \phi_{|\{0,\dots,m\}}) = g(m, \psi_{|\{0,\dots,m\}}) = \psi(m+1)$, assurdo.
Non resta dunque che dimostrare l'esistenza delle AF, per induzione su $p(n) =$"Esiste un'AF $\phi_n : n+1 \to A$".

- $\underline{n=0}$: $\phi : 1 \longrightarrow A$ tale che $\phi(0) = a$ è l'AF cercata.
- $\underline{n \to \hat{n}}$: Se $\phi : n+1 \longrightarrow A$ è AF, anche $\tilde{\phi} = \phi \cup (n+1, g(n, \phi_{|\{0,\dots,n\}}))$ è AF, e $Dom\phi = n+1 \cup \{n+1\} = n+2$.

Adesso, definiamo $f := \bigcup_{\phi \mathrm{AF}} \phi$: f è ben definita, dato che è unione di funzioni a due a due compatibili. Si nota che $f(0) = \phi(0) = a$ per ogni AF ϕ, e che, se ψ è un'AF tale che $n+1 \in Dom\psi$, allora $\psi(n+1) = g(n, \psi_{|\{0,\dots,n\}}) = g(n, f_{|\{0,\dots,n\}}) = f(n+1)$.
Adesso che sappiamo per certo esistere una funzione f come da tesi, mostriamo che è unica per induzione. Siano f e f' due funzioni che estendono le AF a tutto ω: ovviamente vale $f(0) = f'(0) = a$ per definizione; inoltre, si ha anche che

$$f(n+1) = g(n+1, f_{|\{0,\dots,n\}}) = g(n+1, f'_{|\{0,\dots,n\}}) = f'(n+1)$$

Per induzione al secondo ordine, $\{n \in \omega | f(n) = f'(n)\} = \omega$, e quindi $f = f'$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 4

Enrico Berni, 582049

07/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Immersione di ω in insiemi infiniti
2. Operazioni elementari su insiemi finiti
3. Proprietà di relazioni e famiglie finite
4. Proprietà algebriche di PA_{II} come semianello
5. Ogni modello dell'aritmetica di Peano è totalmente ordinato
6. Definizione di somma e prodotto in ω mediante ricorsione numerabile
7. Isomorfismo tra insiemi finiti totalmente ordinati
8. Separabilità di $\mathbb{Z}^{\omega}$, con l'ordine della minima differenza
9. Esistenza e unicità del completamento di insiemi densi
10. Campi ordinati non completi
11. Operazioni su tagli di Dedekind
12. Una classe di equipotenza non è un insieme

1 Immersione di ω in insiemi infiniti

Proposizione 1.1. *(AC) Sia A un insieme infinito. Allora, esiste una funzione $\phi : \omega \longrightarrow A$ iniettiva.*

Dimostrazione. Dato che A è infinito, è non vuoto. Dunque, per (AC) esiste una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$ tale che $f(B) \in B$ per ogni $B \in \mathcal{P}(A)$. Utilizzando la forma forte del teorema di ricorsione numerabile, definiamo una funzione

$$g : \omega \times Seq(A) \longrightarrow A$$

$$(n, \langle a_i \rangle_{0,...,n}) \longmapsto f(A \setminus \{a_0, ..., a_n\}) := a_{n+1}$$

Tale funzione si estende dunque ad una ed una sola funzione

$$\phi : \omega \longrightarrow A$$

$$n \longmapsto \begin{cases} f(A) & \text{se } n = 0 \\ f(A \setminus \{a_0, ..., a_{n-1}\}) := a_n & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

La ϕ è iniettiva per definizione di funzione di scelta, e dunque segue la tesi. □

2 Operazioni elementari su insiemi finiti

Proposizione 2.1. *Siano A e B due insiemi finiti. Allora,*

1. *$A \sqcup B$ è finito;*
2. *$A \times B$ è finito;*
3. *$\mathcal{P}(A)$ è finito;*
4. *B^A è finito;*

Dimostrazione. Durante tutta la dimostrazione, siano $f : n \to A$ e $g : m \to B$ due bigezioni.

1. Per induzione su n:
   Se $n = 0$, $A \sqcup B = B$, finito per ipotesi.
   Per il passo induttivo, sia $\hat{f} : \hat{n} \longrightarrow A$ bigettiva. Allora, la restrizione $\hat{f}_{|n} : n \longrightarrow A \setminus \{f(n)\} = A'$ è bigettiva; per ipotesi induttiva, si ha che $A' \sqcup B$ è finito. Sia $h : A' \sqcup B \longrightarrow k$ una bigezione, per qualche naturale k; abbiamo due casi possibili:

   - Se $f(n) \in B$, si conclude per ipotesi induttiva.
   - Se $f(n) \notin B$, estendiamo la h a

   $$\hat{h} : A \sqcup B \longrightarrow \hat{k}$$

   $$\begin{cases} \hat{h}_{|A' \sqcup B} = h \\ \hat{h}(f(n)) = k \in \hat{k} \end{cases}$$

   La funzione $\hat{h}$ è bigettiva, e dunque $A \sqcup B$ è finito.

2. Per induzione su n:
Se $n = 0$, $A \times B = \emptyset$, che è ovviamente finito.
Per il passo induttivo, basta notare che $|A \times B| = |\hat{n} \times m|$, e $\hat{n} \times m = (n \times m) \sqcup (\{n\} \times m)$. Entrambi gli insiemi sono finiti, uno per ipotesi induttiva, l'altro perché equipotente a B, e quindi la tesi segue dal punto (1).

3. Per induzione su n:
Se $n = 0$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ovviamente finito.
Per il passo induttivo, consideriamo la bigezione tra $\hat{n}$ e A: questa induce un'altra bigezione, questa volta tra $\mathcal{P}(\hat{n})$ e $\mathcal{P}(A)$, pertanto ci restringiamo a studiare $\mathcal{P}(\hat{n})$. La funzione
$$\phi : \mathcal{P}(\hat{n}) \longrightarrow \mathcal{P}(n) \times 2$$
$$C \longmapsto \begin{cases} (C \cap n, 0) & \text{se } n \notin C \\ (C \cap n, 1) & \text{se } n \in C \end{cases}$$
è bigettiva, con inversa
$$\tilde{\phi} : \mathcal{P}(n) \times 2 \longrightarrow \mathcal{P}(\hat{n})$$
$$(C', i) \longmapsto \begin{cases} C' & \text{se } i = 0 \\ C' \cup \{n\} & \text{se } i = 1 \end{cases}$$
Dunque, $\mathcal{P}(\hat{n})$ è in bigezione con $\mathcal{P}(n) \times 2$, che sappiamo essere finito per il punto (2), dato che $\mathcal{P}(n)$ è finito per ipotesi induttiva e 2 è banalmente finito.

4. Per definizione, ogni funzione $f : A \to B$ è un sottoinsieme di $A \times B$; pertanto, $B^A = \{f : A \to B\}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A \times B)$. L'iniezione canonica ci garantisce che $|B^A| \leq |\mathcal{P}(A \times B)|$, finito per i punti (2) e (3). Dato che un sottoinsieme di un insieme finito è finito, segue la tesi.

□

3 Proprietà di relazioni e famiglie finite

Proposizione 3.1. *Sia R una relazione su un insieme finito $A \times B$. Allora, $DomR$ e ImR sono finiti.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che un sottoinsieme di un insieme finito è finito. Infatti, per definizione $DomR \subseteq A$, e $ImR \subseteq B$, e quindi entrambi sono finiti. □

In particolare, dato che una funzione è una particolare relazione, l'immagine di un insieme finito tramite una funzione è ancora un insieme finito.

Proposizione 3.2. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia finita di insiemi finiti. Allora, $\bigcup \mathfrak{F}$ è un insieme finito.*

Dimostrazione. Per induzione su $n = |\mathfrak{F}|$:
Se $n = 0$, $\mathfrak{F} = \emptyset$, ovviamente finito.
Per il passo induttivo, se $|\mathfrak{F}| = \hat{n}$, considero la bigezione $\phi : \hat{n} \longrightarrow \mathfrak{F}$; la restrizione $\phi_{|n} : n \longrightarrow \mathfrak{F} \setminus \{\phi(n)\} := \mathfrak{F}'$ è ancora bigettiva. Possiamo dunque scrivere $\mathfrak{F}$ come $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' \cup \{\phi(n)\}$. Questa scrittura induce una disintegrazione su $\bigcup \mathfrak{F}$, che si scrive come $\bigcup \mathfrak{F} = \bigcup \mathfrak{F}' \cup \bigcup f(n)$, che è un'unione di insiemi finiti (qui si usa l'ipotesi induttiva), e dunque finita per quanto detto sopra (Proposizione 2.1). $\square$

4 Proprietà algebriche di PA_{II} come semianello

In questa sezione dimostreremo che un modello dell'aritmetica di Peano del secondo ordine è un semianello commutativo con unità.
Durante tutta la dimostrazione, sia $(\mathcal{N}, 0, S, +, \cdot)$ un modello di PA_{II}.

Proposizione 4.1. *Somma e prodotto su $\mathcal{N}$ godono della proprietà associativa. Cioè, per ogni $n, m, k \in \mathcal{N}$ vale $n + (m + k) = (n + m) + k$, e $n(mk) = (nm)k$.*

Dimostrazione. Somma
Per induzione su k:
Se $k = 0$, $n + (m + 0) = n + m = (n + m) + 0$.
Per il passo induttivo, si ha che $n + (m + S(k)) = n + (S(m + k)) = S(n + (m + k)) = S((n + m) + k) = (n + m) + S(k)$.
Prodotto
Per induzione su k:
Se $k = 0$, $n(m \cdot 0) = n \cdot 0 = 0 = (nm) \cdot 0$.
Per il passo induttivo, vale che $n(m \cdot S(k)) = n(mk + m) = n(mk) + nm = (nm)k + nm = (nm) \cdot S(k)$. $\square$

Si è utilizzato in modo pesante la distributività del prodotto rispetto alla somma, dimostrata più avanti.

Dimostriamo adesso tre lemmi che ci aiuteranno nelle dimostrazioni successive:

Lemma 4.1. *Per ogni $n \in \mathcal{N}$, si ha $0 + n = n$.*

Dimostrazione. Per induzione su n:
Se $n = 0$, banalmente $0 + 0 = 0$.
Per il passo induttivo, basta notare che $0 + S(n) = S(0 + n) = S(n)$. $\square$

Lemma 4.2. *Per ogni $n \in \mathcal{N}$, si ha $0 \cdot n = 0$.*

Dimostrazione. Per induzione su n:
Se $n = 0$, banalmente $0 \cdot 0 = 0$.
Per il passo induttivo, basta notare che $0 \cdot S(n) = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0$. $\square$

Lemma 4.3. *Per ogni $m, n \in \mathcal{N}$, vale $S(n) + m = n + S(m)$.*

Dimostrazione. Per induzione su m:
Se $m = 0$, allora $S(n) + 0 = S(n)$ e $n + S(0) = S(n + 0) = S(n)$. Per il passo induttivo, notiamo che $S(n) + S(m) = S(S(n) + m) = S(n + S(m)) = n + S(S(m))$. $\square$

Proposizione 4.2. *Somma e prodotto su $\mathcal{N}$ godono della proprietà commutativa. Cioè, per ogni $n, m \in \mathcal{N}$, vale $n + m = m + n$ e $n \cdot m = m \cdot n$.*

Dimostrazione. Somma
Per induzione su m:
Se $m = 0$, segue da (PA3) e dal Lemma 4.1.
Per il passo induttivo, si ha che $n+S(m) = S(n+m) = S(m+n) = m+S(n) = S(m)+n$ per il Lemma 4.2.
Prodotto
Per induzione su m:
Se $m = 0$, segue da (PA4) e dal Lemma 4.2.
Per il passo induttivo, vale che $n \cdot S(m) = (nm)+n = n+(nm) = n+(mn) = S(m) \cdot n$. $\square$

Anche in questo caso, abbiamo usato la distributività del prodotto rispetto alla somma, che dimostriamo subito.

Proposizione 4.3. *Il prodotto su $\mathcal{N}$ è distributivo rispetto alla somma. Cioè, per ogni $n, m, k \in \mathcal{N}$ vale $n(m + k) = nm + nk$.*

Dimostrazione. Per induzione su k:
Se $k = 0$, allora $n(m + 0) = nm = nm + 0 = nm + n \cdot 0$.
Per il passo induttivo, $n(m + S(k)) = n \cdot S(m + k) = n(m + k) + n = (nm + nk) + n = nm + (nk + n) = nm + n \cdot S(k)$. $\square$

5 Ogni modello dell'aritmetica di Peano è totalmente ordinato

Proposizione 5.1. *Sia $(\mathcal{N}, 0, S, +, \cdot)$ un modello di PA_{II}. $\mathcal{N}$ è totalmente ordinato.*

Dimostrazione. La verifica delle proprietà di relazione d'ordine di $<$ è simile a quella fatta per ω: mostriamo che l'ordine è totale, cioè che comunque presi $n, m \in \mathcal{N}$, vale la tricotomia dell'ordine.
Per induzione su m:

$\underline{m=0}$: $0 < n$ per ogni $n \in \mathcal{N}$, per definizione di 0.
$\underline{m \Rightarrow S(m)}$: Sappiamo che m è confrontabile; dunque, comunque preso $n \in \mathcal{N}$, abbiamo tre casi: se $m = n$, $n < m + 1$, e dunque $n < S(m)$. Se $n < m$, banalmente $n < S(m)$. Se $m < n$, allora per la definizione di successore vale $n = S(m)$ oppure $S(m) < n$. Ciò conclude la dimostrazione. □

6 Definizione di somma e prodotto in ω mediante ricorsione numerabile

Proposizione 6.1. *È possibile definire somma e prodotto su ω usando il teorema di ricorsione numerabile.*

Dimostrazione.

- Somma: Usando il teorema di ricorsione numerabile, consideriamo la funzione

$$f : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$$

$$(a, b) \longmapsto b + 1$$

Costruiamo adesso la funzione

$$S_n : \omega \longrightarrow \omega$$

$$\begin{cases} S_n(0) = n \\ S_n(\hat{m}) = S_n(m) + 1 \end{cases}$$

È immediato vedere che l'espressione $S_n(m)$ non rappresenta altro che $n+m$. Inoltre, verificare che l'applicazione descritta soddisfi PA-3 è altrettanto immediato.

- Prodotto: Come sopra, consideriamo la funzione

$$g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$$

$$g(a, b) = S_n(b)$$

Costruiamo la funzione

$$P_n : \omega \longrightarrow \omega$$

$$\begin{cases} P_n(0) = 0 \\ P_n(\hat{m}) = S_n(P_n(m)) \end{cases}$$

Verificare che la funzione descritta sopra rispetta PA-4 è immediato.

□

7 Isomorfismo tra insiemi finiti totalmente ordinati

Proposizione 7.1. *Siano* $(A, <_A)$ *e* $(B, <_B)$ *due insiemi finiti, equipotenti e totalmente ordinati. Allora,* $A \cong B$*.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che un insieme finito totalmente ordinato è anche ben ordinato. Infatti, se l'ordine è totale, ogni coppia ha un minimo, e per induzione si mostra che questa proprietà vale per ogni sottoinsieme finito.
Dunque, A e B sono insiemi ben ordinati. Sia $|A| = |B| = n$; esistono dunque due bigezioni $\psi : A \longrightarrow n$ e $\phi : n \longrightarrow B$ tali che

$$\begin{cases} a_0 := \min A \longmapsto \emptyset \\ a_{k+1} := \min(A \setminus \{a_0, ..., a_k\}) \longmapsto k+1 \end{cases} \quad e \begin{cases} \emptyset \longmapsto \min B := b_0 \\ k+1 \longmapsto \min(B \setminus \{b_0, ..., b_k\}) := b_{k+1} \end{cases}$$

Le due bigezioni di cui sopra sono in realtà due isomorfismi d'ordine (la verifica è immediata, segue dalla costruzione). La composizione dei due isomorfismi ϕ e ψ è l'isomorfismo cercato. □

8 Separabilità di $\mathbb{Z}^\omega$, con l'ordine della minima differenza

Proposizione 8.1. *Sia* $(\mathbb{Z}^\omega, <)$ *l'insieme delle funzioni da* ω *a valori in* $\mathbb{Z}$*, con l'ordine della minima differenza.* $(\mathbb{Z}^\omega, <)$ *è separabile.*

Dimostrazione. Mostriamo che l'insieme $X = Fun_0(\omega, \mathbb{Z})$ delle funzioni a supporto finito da ω in $\mathbb{Z}$ è il denso numerabile che cerchiamo.
Innanzitutto, X è numerabile; infatti, $X = \bigcup_{n \in \omega} \mathbb{Z}^n$, e dato che $\mathbb{Z}^n$ è equipotente ad ω per ogni $n \in \omega$, si ha che X è unione numerabile di insiemi numerabili, e dunque è numerabile.
Mostriamo adesso la densità di X: siano $f < g$ due elementi di $\mathbb{Z}^\omega$, e sia $k := \min\{n \in \omega | f(n) \neq g(n)\}$. Per definizione, $f(k) < g(k)$. Posso definire dunque la seguente funzione

$$\phi : \omega \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} f(n) & \text{se } n \leq k \\ f(k+1) + 1 & \text{se } n = k+1 \\ 0 & \text{se } n > k+1 \end{cases}$$

Per costruzione, $f < \phi < g$, e dunque X è denso in $\mathbb{Z}^\omega$. Ciò conclude la dimostrazione. □

9 Esistenza e unicità del completamento di insiemi densi

Proposizione 9.1. *Sia $(P,<)$ un insieme totalmente ordinato, denso e che non ammette massimo né minimo. Allora, esiste un completamento $(\tilde{P},<)$ in cui P è denso, unico a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{P} = \{\text{Tagli di Dedekind di } P\}$; dimostriamo che $\tilde{P}$ è completo, e che P è denso in $\tilde{P}$. Innanzitutto, identifichiamo un elemento $p \in P$ come $P_p = \{x \in P | x < p\} \in \tilde{P}$, e dotiamo $\tilde{P}$ dell'ordine dell'inclusione, canonico per insiemi di tagli.
Siano ora $X, Y \in \tilde{P}$, tali che $X < Y$. Allora, per definizione esiste un certo $p \in Y \setminus X$, $p \in P$, che induce la catena $X \leq P_p \leq Y$. Tuttavia, $p \notin P_p$, e $p \in Y$; abbiamo dunque due casi: se $X < P_p$, abbiamo finito. Se invece $X = P_p$, dato che Y non ha massimo posso trovare un elemento $p' \in Y \setminus P_p$, e quindi avere la catena $X = P_p < P_{p'} < Y$. Pertanto, P è denso in $\tilde{P}$.
Sia $\Gamma \subseteq \tilde{P}$ superiormente limitato: mostriamo che Γ ammette estremo superiore. Indicizziamo gli elementi di Γ, e consideriamo $Z := \bigcup_{x_i \in \Gamma} \tilde{P}_{x_i}$, e mostriamo che è un taglio: se $p \in Z$, vuol dire che esiste un indice i_0 tale che $p \in \tilde{P}_{x_{i_0}}$, ed essendo $\tilde{P}_{x_{i_0}}$ un taglio, per ogni $q < p$ vale $q \in \tilde{P}_{x_{i_0}} \subseteq Z$, cioè $q \in Z$. Notiamo anche che Z non ha massimo: infatti, se per assurdo fosse $z := \max Z$, si avrebbe che $z \in \tilde{P}_{x_i}$ per qualche i. Essendo $\tilde{P}_{x_i}$ un taglio, in particolare non ammette massimo, e dunque esisterebbe un certo $z' \in \tilde{P}_{x_i} \subseteq Z$ tale che $z' > z$, e questo è contraddittorio. Infine, dato che Γ è limitato superiormente, esiste un certo $X \in \tilde{P}$, $X \neq P$, tale che $\tilde{P}_{x_i} \subseteq X$ per ogni $x_i \in \Gamma$. Allora, $Z \subseteq X \neq P$, e quindi $Z \neq P$ (naturalmente $Z \neq \emptyset$). Pertanto, Z è un taglio.
A questo punto, vogliamo dimostrare che $Z = \sup \Gamma$. Dato che per ogni i, $\tilde{P}_{x_i} \subseteq Z$, $\tilde{P}_{x_i} < Z$ per ogni $x_i \in \Gamma$; Z è dunque un maggiorante di Γ. Comunque preso un altro maggiorante Y, vale che $\tilde{P}_{x_i} \subseteq Y$ per ogni i, e quindi $\bigcup \tilde{P}_{x_i} = Z \subseteq Y$, da cui $Z \leq Y$. Dunque, l'esistenza di un completamento che soddisfi le richieste è garantita: mostriamo che tale completamento è unico a meno di isomorfismo.
Sia $(C, <')$ un altro completamento di P: costruiamo la mappa

$$\Phi : C \longrightarrow \tilde{P}$$

$$c \longmapsto \{x \in P | x <' c\}$$

Notiamo innanzitutto che è ben definita, dato che per definizione di completamento $P \subseteq \tilde{P}$ e $P \subseteq C$. Mostriamo che Φ è un isomorfismo: innanzitutto è iniettiva, dato che se ho $c \neq c \in C$, $c < c'$, esiste $p \in P$ tale che $c < p < c'$, e quindi $p \in \Phi(c') \setminus \Phi(c)$, da cui segue che $\Phi(c') \neq \Phi(c)$. La Φ è anche suriettiva, dato che preso comunque $X \in \tilde{P}$ posso considerare $\bar{x} := \sup\{c \in P | \Phi(c) \subseteq X\}$, che esiste per la completezza di C e $\tilde{P}$. La verifica che $X = \Phi(\bar{x})$ è semplice ma tediosa, e non la riportiamo. Per finire, mostriamo che la Φ

preserva l'ordine: infatti, presi due elementi $a, b \in C$, supponiamo che valga $a <' b$. Per la densità di P, esiste un certo $p_0 \in P$ tale che $a < p_0 < b$; allora, $\Phi(a) = \{p \in P | p <' a\}$, e $\Phi(b) = \{p \in P | p <' b\}$. Si ha che banalmente $\Phi(a) \subseteq \Phi(b)$, e il contenimento è stretto dato che $p_0 \in \Phi(b) \setminus \Phi(a)$. Per definizione quindi $\Phi(a) < \Phi(b)$. Vale quindi $(\tilde{P}, <) \cong (C, <')$, come richiesto. □

10 Campi ordinati non completi

Proposizione 10.1. *Sia $(F, <)$ un campo ordinato senza massimo né minimo. Se $\mathbb{Q}$ non è denso in F, allora F non è completo.*

Dimostrazione. Innanzitutto, osserviamo che se F non è completo, esistono per esempio degli elementi $\xi \in F$ tali che $\xi < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, essendo $\mathbb{Q}$ non denso, esistono due elementi f_1 e $f_2 \in F$ tali che non esista un $q \in \mathbb{Q}$ tale che $f_1 < q < f_2$. Possiamo assumere per esempio $f_1 = 0$, e chiamiamo $f_2 := x$. Consideriamo allora l'insieme $X = \{f \in F | \forall n \in \mathbb{N}\, f < \frac{1}{n}\}$; si nota che $X \neq \emptyset$, dato che $x \in X$. Vogliamo mostrare che X non ammette sup, e dunque F non è completo. Per assurdo, sia $\xi = \sup X$; notiamo che in particolare varrebbe $\xi \in X$, e dunque ξ sarebbe un massimo di X. Infatti, se fosse $\xi \notin X$, dovrebbe valere $\xi \geq \frac{1}{n_0}$ per un certo naturale n_0, e dunque $\frac{1}{2n_0}$ sarebbe un maggiorante di X strettamente minore di ξ, contraddicendo la minimalità di quest'ultimo. Dunque, $\xi \in X$. Ora, è banalmente vero che $2\xi > \xi$, e $2\xi \in X$, dato che se valesse $2\xi \geq \frac{1}{m}$ per un certo $m \in \mathbb{N}$, varrebbe anche $\xi \geq \frac{1}{2m}$, e dunque $\xi \notin X$. Quindi, ξ non è il massimo di X, e questo è assurdo.
Ciò conclude la dimostrazione. □

11 Operazioni su tagli di Dedekind

Proposizione 11.1. *Siano X e Y due tagli di Dedekind di $\mathbb{Q}$. Allora, l'insieme $X + Y = \{x + y | x \in X\, y \in Y\}$ è un taglio di Dedekind. In particolare, se $X = \mathbb{Q}_p$, $Y = \mathbb{Q}_q$, allora $X + Y = \mathbb{Q}_{p+q}$.*

Dimostrazione. Siano X e Y due tagli come da ipotesi. Se $\alpha \in X + Y$, allora per ogni $\beta < \alpha$, $\beta \in X + Y$. infatti, sia $\alpha = x + y$; allora, $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$, e $\beta = (x - (\alpha - \beta)) + y \in X + Y$, in quanto $x - (\alpha - \beta) \in X$ per definizione. Inoltre, $X + Y$ non ha massimo. Infatti, se fosse per assurdo $z := \max(X + Y)$, si avrebbe che $z = x_0 + y_0$ per certi $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Ma X non ammette massimo, e dunque esiste un certo $x' > x_0 \in X$, e similmente per Y, esiste $y' > y_0 \in Y$. Pertanto, $z' = x' + y' > x + y = z = \max X + Y$. Infine, $X + Y$ è ovviamente diverso da $\emptyset$ e da $\mathbb{Q}$, poiché essendo X e Y limitati, esistono $p \in \mathbb{Q} \setminus X$ e $p' \in \mathbb{Q} \setminus Y$, e dunque $p + p' \notin X + Y$.
Siano adesso $X = \mathbb{Q}_p$, e $Y = \mathbb{Q}_q$: mostriamo che $X + Y = \mathbb{Q}_{p+q}$. Sia $a \in X + Y$; allora

$a = x + y$, con $x < p$, $y < q$. Allora $a < p + q$, e quindi $a \in \mathbb{Q}_{p+q}$. Viceversa, sia $r \in \mathbb{Q}_{p+q}$, ossia $r < p + q$. Posti

$$x = p - \frac{p+q-r}{2} \text{e } y = q - \frac{p+q-r}{2}$$

sia ha che $x < p$, $y < q$ e $r = x + y$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Proposizione 11.2. *Sia X un taglio di Dedekind. Allora, $-X$ è un taglio, e $-X + X = \mathbb{Q}_0$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, $-X := \{-p | p \notin X\}$: mostriamo che è un taglio. Innanzitutto, $-X$ non è banale perché X non è banale, e in particolare esistono $p \in -X$ e $p' \notin -X$. Se $x \in -X$, allora $-x \notin X$; sia $y < x$, e mostriamo che $-y \notin X$. Se vale $y < x$, allora $-x < -y$: se $-y$ appartenesse a X, dato che X è un segmento iniziale, avremmo che anche $-x$ vi apparterrebbe, e questo è assurdo. Dunque, $-X$ è un segmento iniziale. Mostriamo che non ammette massimo. Se $-X$ è generato, non ci sono problemi, è un taglio per definizione. Altrimenti, se non è generato, mostriamo che equivalentemente X^{c} non ammette minimo. Se per assurdo fosse $z := \min X^{\mathsf{c}}$, avremmo che $X = \{q \in \mathbb{Q} | q < z\} = \mathbb{Q}_z$, e questo è assurdo.
Mostriamo adesso che $-X + X = \mathbb{Q}_0$. Abbiamo che $-X + X = \{x + y | x \in X, y \in -X\} = \{x + y | x \in X, -y \notin X\} = \{x - y | x \in X, y \notin X\}$. Allora vale che $y > x$, e dunque $x - y < 0 \to x - y \in \mathbb{Q}_0$. Viceversa, se $r \in \mathbb{Q}_0$, considero $x = \sup(X) + r$, e $y = \sup(X)$. Questi due x e y soddisfano le richieste. □

12 Una classe di equipotenza non è un insieme

Proposizione 12.1. *Sia A un insieme non vuoto: la collezione $\Omega_A = \{B | |B| = |A|\}$ non è un insieme.*

Dimostrazione. Fissiamo un elemento $a \in A$: allora, per ogni singoletto $\{x\}$,
$(A \setminus \{a\}) \cup \{x\}$ è equipotente ad A. Se la classe di equipotenza di A fosse un insieme, si avrebbe che anche $\bigcup \Omega_A$ sarebbe un insieme per l'assioma dell'unione, ma ciò è assurdo perché Ω_A conterrebbe l'intero universo V, e dunque sarebbe esso stesso V, che sappiamo non esistere. □

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 5

Enrico Berni, 582049

14/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Unicità di isomorfismi tra buoni ordini
2. Un sottoinsieme ben ordinato di $\mathbb{R}$ è al più numerabile
3. Somma interna di sottoinsiemi ben ordinati di $\mathbb{R}$
4. Caratterizzazione di buoni ordini isomorfi a ω
5. $ot(\omega)$ è il più piccolo order type infinito
6. Una famiglia di buoni ordini ammette elementi minimali
7. Proprietà della somma di buoni ordini
8. Proprietà del prodotto di buoni ordini
9. Non commutatività del prodotto di buoni ordini
10. Numerabilità delle funzioni a supporto finito da ω in ω
11. Proprietà dell'esponenziazione di buoni ordini
12. Operazioni tra ordini totali isomorfi
13. Unioni finite di insiemi infiniti equipotenti

1 Unicità di isomorfismi tra buoni ordini

Proposizione 1.1. *Siano A e B due buoni ordini. Allora, esiste al più un isomorfismo tra di loro.*

Dimostrazione. Se A e B non sono isomorfi, non ci sono isomorfismi tra di loro. Se invece lo sono, siano $\phi : A \longrightarrow B$ e $\psi : A \longrightarrow B$ due isomorfismi. Allora, $(\psi^{-1} \circ \phi) : A \longrightarrow A$ è un automorfismo di A, e dunque è l'identità. Lo stesso vale per $(\phi \circ \psi^{-1}) : B \longrightarrow B$. Pertanto, per l'unicità dell'inversa bilatera, si ha che $\phi^{-1} = \psi^{-1} \Rightarrow \phi = \psi$. $\square$

2 Un sottoinsieme ben ordinato di $\mathbb{R}$ è al più numerabile

Proposizione 2.1. *(AC) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme ben ordinato di $\mathbb{R}$. Allora, $|A| \leq \aleph_0$.*

Dimostrazione. Consideriamo $x \in A$, $x \neq \max A$, se esiste. Consideriamo $y := \min A \setminus A_x$; vogliamo costruire un'iniezione sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$ e usando l'assioma della scelta: per (AC), esiste una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Definisco la funzione

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \longmapsto f(\mathbb{Q} \cap (x, y))$$

Notiamo che l'applicazione è ben definita perché $\mathbb{Q}$ è denso, e dunque interseca ogni aperto di $\mathbb{R}$. Se esiste, mappiamo $\max A \longmapsto f(\mathbb{Q} \cap (\max A, +\infty))$. La ϕ è chiaramente iniettiva, e dunque $|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. □

3 Somma interna di sottoinsiemi ben ordinati di $\mathbb{R}$

Proposizione 3.1. *Siano A e B due sottoinsiemi ben ordinati di $\mathbb{R}$: allora, l'insieme $A + B = \{a + b | a \in A\, b \in B\}$ è ben ordinato.*

Dimostrazione. Supponiamo che $A+B$ non sia ordinato: allora, esiste $X \subseteq A+B$ che non ammette minimo. Consideriamo allora i due insiemi $X_A = \{a \in A | \, \exists b \in B\, a+b \in X\} \subseteq A$ e $X_B = \{b \in B | \, \exists a \in A\, a + b \in X\} \subseteq B$. Per ipotesi, entrambi ammettono minimo, siano essi $a_0 \in X_A$ e $b_0 \in X_B$. Allora, $a_0 + b_0$ è per costruzione il minimo di X; infatti, ogni elemento di X è somma di elementi di X_A e X_B, somma che per costruzione domina $a_0 + b_0$. Ciò è assurdo, e dunque $A + B$ è ben ordinato. □

4 Caratterizzazione di buoni ordini isomorfi a ω

Proposizione 4.1. *Valgono i seguenti due fatti:*

1. *Un insieme ben ordinato A è isomorfo a ω se e solo se A è infinito ed ogni suo segmento iniziale è finito.*

2. *Un insieme ben ordinato A è isomorfo a ω se e solo se A ogni suo sottoinsieme infinito è privo di massimo.*

Dimostrazione. 1. • $\Rightarrow$: Ovvia.

- $\Leftarrow$: Per tricotomia, se fosse $ot(A) < ot(\omega)$ si avrebbe che $A \cong \omega_n = n$, e ciò sarebbe assurdo perché A è infinito. Altrimenti, se fosse $ot(\omega) < ot(A)$, si avrebbe che $\omega \cong A_x$, ma questo è assurdo perché ogni i segmenti iniziali di A sono finiti e ω è infinito. Dunque, deve essere $ot(\omega) = ot(A)$, e quindi $\omega \cong A$.

2.
- $\Rightarrow$: Ovvia.
- $\Leftarrow$: Se ogni sottoinsieme infinito di A è privo di massimo, ogni segmento iniziale di A è finito. Infatti, se fosse $\omega \subseteq A$, si avrebbe che $\omega \cong A_x$ per qualche $x \in A$. Consideriamo quindi $A_x \cup \{x\} \subseteq A$: esso contiene ω strettamente, e ha massimo (x). Questo è assurdo, e dunque vale che $\omega \cong A$.

□

5 $ot(\omega)$ è il più piccolo order type infinito

Proposizione 5.1. *Sia A un buon ordine infinito. Allora, $ot(\omega) \leq ot(A)$.*

Dimostrazione. Se A è un insieme infinito ben ordinato, definiamo per ricorsione numerabile la successione

$$\begin{cases} a_0 = \min A \\ a_{k+1} = \min(A \setminus \{a_1, ..., a_k\}) \end{cases}$$

La successione definita sopra è iniettiva per costruzione, e dunque $\omega \cong A_x$ per un certo $x \in A$.
Altrimenti, basta notare che ogni segmento iniziale di ω è finito, e quindi A non può essere isomorfo a un segmento iniziale di ω, dato che sono tutti finiti. □

6 Una famiglia di buoni ordini ammette elementi minimali

Proposizione 6.1. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di buoni ordini. Allora, $\mathfrak{F}$ ammette elementi minimali.*

Dimostrazione. Consideriamo $A \in \mathfrak{F}$, e confrontiamolo con tutti gli altri elementi di $\mathfrak{F}$, sfruttando la tricotomia: se $ot(A) \leq ot(B)$ per ogni $B \in \mathfrak{F}$, allora A è l'elemento minimale cercato. Altrimenti, considero $x := \min\{a \in A | \exists B \in \mathfrak{F} \quad B \cong A_a\}$; allora, per proprietà note, A_x è minimale in $\mathfrak{F}$. □

7 Proprietà della somma di buoni ordini

Proposizione 7.1. *Siano A, B e C due insiemi totalmente ordinati. Allora, $(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$.*

Dimostrazione. Costruiamo l'applicazione

$$\phi : (A \oplus B) \oplus C \longrightarrow A \oplus (B \oplus C)$$

$$\begin{cases} ((a,0),0) \\ ((b,1),0) \\ (c,1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (a,0) \\ ((b,0),1) \\ ((c,1),1) \end{cases}$$

La ϕ è bigettiva, dato che ha funzione inversa

$$\psi : A \oplus (B \oplus C) \longrightarrow (A \oplus B) \oplus C$$

$$\begin{cases} (a,0) \\ ((b,0),1) \\ ((c,1),1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} ((a,0),0) \\ ((b,1),0) \\ (c,1) \end{cases}$$

Inoltre, $\phi((0_A,0),0) = (0_A,0)$, e la funzione è crescente per definizione di ordine nell'insieme di arrivo. Dunque, è un isomorfismo d'ordine. □

Proposizione 7.2. *$A \oplus B$ è totalmente ordinato se e solo se A e B sono totalmente ordinati.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Leftarrow:}$ Consideriamo (x,i) e $(y,j) \in A \oplus B$: se $i < j$ allora $(x,i) < (y,j)$, e se $j < i$, $(y,j) < (x,i)$. Se invece $i = j$, usando la tricotomia dell'ordine in A e B possiamo dire che x e y sono confrontabili, e dunque lo sono anche in $A \oplus B$.
- $\underline{\Rightarrow:}$ Per come è definito l'ordine su $A \oplus B$, i sottoinsiemi $A \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$ sono isomorfi rispettivamente ad A e B, e sono totalmente ordinati perché sottoinsiemi di un ordine totale.

□

Proposizione 7.3. *$A \oplus B$ è ben ordinato se e solo se A e B sono ben ordinati.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Leftarrow:}$ Consideriamo $X \subseteq A \oplus B$: allora, se esiste un elemento di X della forma $(a,0)$, esso è minore di ogni altro elemento di X della forma $(b,1)$. Posso dunque considerare gli elementi di $X \cap (A \times \{0\})$. $A \times \{0\}$ ha un ordine isomorfo a quello di A, e dunque ammette minimo. Se invece fosse $X \subseteq B \times \{1\}$, X sarebbe ben ordinato, in quanto sottoinsieme di un buon ordine ($B \times \{1\} \cong B$).
- $\underline{\Rightarrow:}$ Per come è definito l'ordine su $A \oplus B$, i sottoinsiemi $A \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$ sono isomorfi rispettivamente ad A e B, e sono ben ordinati perché sottoinsiemi di un buon ordine.

□

8 Proprietà del prodotto di buoni ordini

Proposizione 8.1. *Siano A e B due insiemi totalmente ordinati. Allora, $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$.*

Dimostrazione. Costruiamo la funzione

$$\phi : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

$$((a, b), c) \longmapsto (a, (b, c))$$

La dimostrazione del fatto che ϕ sia un isomorfismo d'ordine ricalca quella fatta in precedenza per la somma. □

Proposizione 8.2. *$A \otimes B$ è totalmente ordinato se e solo se A e B sono totalmente ordinati.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Siano (a, b) e $(a', b') \in A \otimes B$. Allora, b e b' sono confrontabili in B; quindi, se $b < b'$, $(a, b) < (a', b')$, e se $b' < b$, $(a', b') < (a, b)$. Se invece fosse $b = b'$, dalla confrontabilità di a e a' in A si deduce che (a, b) e (a', b) sono confrontabili in $A \otimes B$.

- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo che uno tra A e B non sia totalmente ordinato, sia esso B senza perdita di generalità: allora, esistono due elementi b e b' non confrontabili. Dunque, preso un elemento $a \in A$ le coppie (a, b) e (a, b') non sono confrontabili, assurdo.

□

Proposizione 8.3. *$A \otimes B$ è ben ordinato se e solo se A e B sono ben ordinati.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Sia $X \subseteq A \otimes B$; definiamo $X_b = \{b \in B | \exists a \in A \quad (a, b) \in X\} \subseteq B$, e sia b_0 il minimo di X_b. Allora, per ogni (a, b), $b \neq b_0$, $(a, b) > (a', b_0)$ per ogni $a, a' \in A$. Sia ora $X_a = \{a \in A | \exists b \in B \quad (a, b) \in X\} \subseteq A$, e sia $a_0 := \min X_a$. La coppia (a_0, b_0) è il minimo di X per costruzione.

- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo per assurdo che uno tra A e B non sia ben ordinato, supponiamo A senza perdere generalità: allora, esiste un sottoinsieme $X \subseteq A$ tale che X non ammette minimo. Dunque, fissato un $b \in B$ l'insieme $\{(x, b) | x \in X\} \subseteq A \otimes B$ non ammetterebbe minimo, e questo è assurdo.

□

Proposizione 8.4. *Il prodotto tra insiemi totalmente ordinati è distributivo a destra rispetto alla somma: cioè, vale $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che un elemento di $A \otimes (B \oplus C)$ è della forma $(a,(b,0))$ o $(a,(c,1))$, mentre un elemento di $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ è della forma $((a,b),0)$ o $((a,c),1)$.
Consideriamo la mappa

$$\phi : A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$\begin{cases} (a,(b,0)) \\ (a,(c,1)) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} ((a,b),0) \\ ((a,c),1) \end{cases}$$

ϕ è bigettiva, dato che ammette inversa

$$\psi : (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \longrightarrow A \otimes (B \oplus C)$$

$$\begin{cases} ((a,b),0)) \\ ((a,c),1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (a,(b,0)) \\ (a,(c,1)) \end{cases}$$

Mostriamo che la ϕ è crescente: siano x e $y \in A \otimes (B \oplus C)$ tali che $x < y$, distinguiamo in tre casi.

- Se $x = (a,(b,0))$ e $y = (a',(b',0))$, possiamo avere che per la definizione di ordine sul prodotto $(b,0) < (b',0) \to b < b'$ oppure $b = b'$ e $a < a'$. Nel primo caso, $\phi(x) = (a,(b,0)) < (a',(b',0)) = \phi(y)$, dato che $0 = 0$ e $b < b'$; nel secondo, ugualmente $\phi(x) < \phi(y)$, dato che $0 = 0$, $b = b'$ ma $a < a'$.

- Se $x = (a,(c,1))$ e $y = (a',(c',1))$, la dimostrazione è analoga.

- Se invece $x = (a,(b,0))$ e $y = (a',(c,1))$, per definizione di ordine anti-lessicografico vale che $\phi(x) = ((a,b),0) < ((a',c),1) = \phi(y)$. Notiamo che questo caso non ammette un caso "speculare" in cui $x = (a,(c,1))$, $(a',(b,0))$ e $x < y$.

Dunque, la ϕ è bigettiva e crescente, ed è pertanto un isomorfismo d'ordine. Ciò conclude la dimostrazione. □

9 Non commutatività del prodotto di buoni ordini

Proposizione 9.1. *Il prodotto tra buoni ordini non è commutativo. In particolare,* $2 \otimes \omega \cong \omega$, *e* $\omega \otimes 2 \cong \omega \oplus \omega$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\phi : 2 \otimes \omega \longrightarrow \omega$$

$$\begin{cases}(0,n) \longmapsto 2n\\(1,n) \longmapsto 2n+1\end{cases}$$

Mostriamo che è un isomorfismo d'ordine: innanzitutto, è bigettiva, dato che ammette come inversa

$$\phi^{-1} : \omega \longrightarrow 2 \otimes \omega$$

$$n \longmapsto \begin{cases}(0, \frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ è pari}\\(1, \frac{n-1}{2}) & \text{se } n \text{ è dispari}\end{cases}$$

Inoltre, è crescente; infatti, presi $(0,n)$ e $(1,n)$ (il caso in cui le seconde coordinate siano diverse è banale per come è definito l'ordine antilessicografico), si ha che $(0,n) < (1,n)$, e $\phi((0,n)) = 2n < 2n+1 = \phi((1,n))$. Segue la tesi.
Consideriamo adesso la mappa

$$\psi : \omega \otimes 2 \longrightarrow \omega \oplus \omega$$

$$\begin{cases}(n,0) \longmapsto (n, \diamondsuit)\\(n,1) \longmapsto (n, \spadesuit)\end{cases}$$

Dove abbiamo costruito $\omega \oplus \omega$ come $(\omega \times \{\diamondsuit\}) \cup (\omega \times \{\spadesuit\})$ con l'ordine usuale, e $\diamondsuit < \spadesuit$.
Notiamo che è bigettiva, dato che ammette inversa,

$$\psi^{-1} : \omega \oplus \omega \longrightarrow \omega \otimes 2$$

$$\begin{cases}(n,\diamondsuit) \longmapsto (n,0)\\(n,\spadesuit) \longmapsto (n,1)\end{cases}$$

Mostriamo adesso che rispetta l'ordine: se ho due elementi con seconda coordinata diversa, per come è definito l'ordine il confronto è banale. Se invece considero $(n,0) < (m,0)$ (il caso con 1 in seconda coordinata è analogo), ho che necessariamente $m < n$. Dunque, $\psi((n,0)) = (n,\diamondsuit) < (m,\diamondsuit) = \psi((m,0))$. La ψ è quindi un isomorfismo d'ordine.
Ciò conclude la dimostrazione. □

10 Numerabilità delle funzioni a supporto finito da ω in ω

Proposizione 10.1. *Vale l'uguaglianza* $|Fun_0(\omega,\omega)| = \aleph_0$.

Dimostrazione. Banalmente, ogni successione costante ha supporto finito, dunque $\aleph_0 \leq |Fun_0(\omega,\omega)|$. Per l'altra disuguaglianza, basta notare che ogni successione a supporto finito individua una sequenza finita di naturali, ottenuta nel modo ovvio. Dunque $|Fun_0(\omega,\omega)| \leq |Seq(\omega)| = |\omega| = \aleph_0$, dato che $|\omega \times \omega| = |\omega|$. Si conclude per Cantor-Bernstein. □

11 Proprietà dell'esponenziazione di buoni ordini

Proposizione 11.1. *Siano A e B due buoni ordini, B finito con $|B| = k$. Allora,* $\exp(A, B) \cong \bigotimes_{i=1}^{k} A$.

Dimostrazione. Dato che B è finito, $Fun_0(A, B) = A^B$; sia ora la mappa

$$\psi : A^B \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{k} A$$

$$f \longmapsto (f(b_1), ..., f(b_k))$$

Innanzitutto, la ψ è iniettiva, in quanto se $f \neq g$ esiste un j tale che $f(b_j) \neq g(b_j)$, e dunque anche $\psi(f) \neq \psi(g)$. Inoltre, fissato un elemento di $(a_1, ..., a_k) \in \bigotimes A$, scegliamo f tale che $f(b_i) = a_i$ per ogni i. È immediato vedere che $\psi(f) = (a_1, ..., a_k)$. Mostriamo che è crescente: siano $f < g$ due funzioni di A^B. Per definizione, esiste un j tale che $f(b_j) < g(b_j)$ e $f(b_i) = g(b_i)$ per ogni $i > j$; in particolare, $\psi(f) = (f(b_1), ..., f(b_k))$, e $\psi(g) = (g(b_1), ..., g(b_k))$. Dato che l'ordine in $\bigotimes A$ è l'ordine antilessicografico, da quanto detto sopra segue immediatamente che $\psi(f) < \psi(g)$.
Dunque, ψ è un isomorfismo d'ordine. □

Proposizione 11.2. *Se* $\exp(A, B)$ *è ben ordinato, allora A e B sono ben ordinati.*

Dimostrazione. Supponiamo che uno tra A e B non sia ben ordinato, supponiamo A senza perdere generalità; allora, esiste una catena discendente infinita $a_0 > a_1 > ... \subseteq A$. Sia ora, fissato $b_0 \in B$, la successione $\langle f_n \rangle \subseteq \exp(A, B)$, dove

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n & \text{se } x = b_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È immediato verificare che $f_0 > f_1 > ...$ è una catena discendente infinita di $\exp(A, B)$, e questo è assurdo. □

12 Operazioni tra ordini totali isomorfi

Proposizione 12.1. *Siano $A \cong A'$, $B \cong B'$ insiemi totalmente ordinati. Allora,*

1. $A \oplus B \cong A' \oplus B'$
2. $A \otimes B \cong A' \otimes B'$
3. $\exp(A, B) \cong \exp(A', B')$

Dimostrazione. Durante tutta la dimostrazione, siano $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ due isomorfismi d'ordine.

1. Consideriamo la funzione
$$\phi : A \oplus B \longrightarrow A' \oplus B'$$
$$(x,t) \longmapsto \begin{cases} (f(x),t) & \text{se } x \in A \\ (g(x),t) & \text{se } x \in B \end{cases}$$
dove $t \in \{0,1\}$. Innanzitutto, la ϕ è bigettiva, e ciò viene dalla bigettività di f e g. Per verificarne la crescenza, siano $(x,t) < (y,t') \in A \oplus B$. Abbiamo due casi possibili: se $t < t'$, $\phi((x,t)) = (\star,t) < (\star,t') = \phi((y,t'))$, dove con $\star$ indichiamo l'immagine della prima coordinata secondo ϕ. Se invece fosse $t = t'$, dovrebbe valere $x < y$, e in particolare x e y dovrebbero essere contenuti entrambi in A o in B, supponiamo A senza perdere generalità. Allora, $\phi((x,t)) = (f(x),t) < (f(y),t) = \phi((y,t))$ dato che la f è crescente. Dunque, ϕ è un isomorfismo d'ordine.

2. Nelle ipotesi di cui sopra, consideriamo la mappa
$$\psi : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$$
$$(a,b) \longmapsto (f(a), g(b))$$
Mostriamo che è un isomorfismo: innanzitutto, è bigettiva perché f e g lo sono sulle coordinate. Inoltre, è anche crescente; infatti, presi (a,b) e $(a',b') \in A \otimes B$, si hanno due possibilità: se $b < b'$, allora $\psi((a,b)) = (f(a),g(b)) < (f(a'),g(b')) = \psi((a',b'))$. Se invece $b = b'$ e $a < a'$, allora $\psi((a,b)) = (f(a),g(b)) < (f(a'),g(b)) = \psi((a',b))$ perché la f è crescente. La ψ è quindi l'isomorfismo cercato.

3. Nelle ipotesi di cui sopra, consideriamo la mappa
$$\Gamma : \exp(A,B) \longrightarrow \exp(A',B')$$
$$\sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ g^{-1}$$
Vogliamo mostrare che Γ è l'isomorfismo d'ordine cercato. È bigettiva, in quanto la funzione
$$\Delta : \exp(A',B') \longrightarrow \exp(A,B)$$
$$\tau \longmapsto f^{-1} \circ \tau \circ g$$
è la sua inversa bilatera. Inoltre, Γ è anche crescente; infatti, date due funzioni $\sigma < \tau \in \exp(A,B)$, vale per definizione che $\sigma(k) < \tau(b_0)$, dove b_0 è la massima differenza di σ e τ. Ora, $(\Gamma(\sigma))(g(b_0)) < (\Gamma(\sigma))(g(b_0)) = (f \circ \sigma \circ g^{-1})(g(b_0)) = f(\sigma(b_0)) < f(\tau(b_0)) = (\Gamma(\tau))(g(b_0))$.
Dall'iniettività della f segue anche che $(\Gamma(\sigma))(g(b_k)) = f(\sigma(b_k)) = f(\tau(b_k)) = (\Gamma(\tau))(g(b_k))$ per ogni $b_k > b_0$. Dunque, Γ è un isomorfismo d'ordine.

Ciò conclude la dimostrazione. □

13 Unioni finite di insiemi infiniti equipotenti

Proposizione 13.1. *Sia X un insieme infinito, tale che $|X \times X| = |X|$. Sia ora $\langle A_i | i = 1, ..., k\rangle$ una k-sequenza di insiemi disgiunti tali che $|A_i| = |X|$ per ogni i. Allora, $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = |X|$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per l'unione di due insiemi, e poi per induzione seguirà per ogni unione finita.
Chiaramente, $A \subseteq A \cup B$, e dunque $|X| = |A| \leq |A \cup B|$; mostriamo la disuguaglianza inversa. Consideriamo le due bigezioni $f : A \to X$ e $g : B \to X$, e, fissato $x_0 \in X \times X$, costruiamo la funzione

$$\Phi : A \sqcup B \longrightarrow X \times X$$

$$x \longmapsto \begin{cases} (f(a), x_0) & \text{se } x \in A \setminus \{f^{-1}(x_0)\} \\ (x_0, g(b)) & \text{se } x \in B \setminus \{g^{-1}(x_0)\} \\ (x_1, x_1) & \text{se } x = f^{-1}(x_0) \\ (x_2, x_2) & \text{se } x = g^{-1}(x_0) \end{cases}$$

Innanzitutto, essendo A e B disgiunti, la funzione è ben definita. Inoltre, usando l'iniettività di f e g si verifica facilmente che anche Φ è iniettiva. La verifica è abbastanza lunga e tediosa, e non richiede idee particolari, dunque mi sono sentito di ometterla.
Abbiamo dunque la seguente catena di disuguaglianze:

$$|X| = |A| \leq |A \sqcup B| \leq |X \times X| = |X|$$

Si conclude con il teorema di Cantor-Bernstein. □

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 6

Enrico Berni, 582049

14/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Ogni ordinale non vuoto contiene $\emptyset$
2. ω è il minimo ordinale infinito
3. Unione ed intersezione di ordinali
4. Equivalenza di buon ordinamento e assenza di catene discendenti di ordinali
5. Esistenza di ω_1, mediante assioma di rimpiazzamento
6. Esistenza di due insiemi, mediante assioma di rimpiazzamento
7. Definizione alternativa di ω_1

1 Ogni ordinale non vuoto contiene $\emptyset$

Proposizione 1.1. *Sia α un ordinale, $\alpha \neq \emptyset$. Allora, $\emptyset \in \alpha$.*

Dimostrazione. Se α è infinito, essendo $\emptyset$ un numero naturale $\emptyset \in \alpha$. Altrimenti, se α è finito, α stesso è un numero naturale, ed essendo $\alpha \neq \emptyset$ vale per definizione che $\emptyset \in \alpha$. □

2 ω è il minimo ordinale infinito

Proposizione 2.1. *Sia α un ordinale infinito. Allora, $\omega \subseteq \alpha$.*

Dimostrazione. Sappiamo che ω è il minimo order type infinito. Essendo α un ordinale, in particolare è un buon ordine, e dunque $ot(\alpha) \geq \omega$, che implica $\omega \cong \alpha_x$ per un certo elemento $x \in \alpha$. Per quanto visto a lezione, due ordinali isomorfi sono uguali, e dunque $\omega = \alpha_x \subseteq \alpha$, da cui la tesi. □

3 Unione ed intersezione di ordinali

Proposizione 3.1. *Sia X un insieme non vuoto di ordinali; allora sia $\bigcup X$ che $\bigcap X$ sono ordinali, e vale $\bigcup X = \sup X$ e $\bigcap X = \min X$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\bigcup X$ è transitivo: se $x \in y \in \bigcup X$, allora esiste un certo ordinale $\alpha \in X$ tale che $y \in \alpha$, e dunque $x \in \alpha$ perché α è un insieme transitivo. Dunque, $x \in \bigcup X$; ora, dato che gli elementi di X sono buoni ordini, uno segmento iniziale dell'altro, la loro unione è filtrante e dunque $\bigcup X$ è un buon ordine. Ora, dato che $\bigcup X$ contiene ogni elemento di X, ovviamente $\bigcup X \geq \alpha$ per ogni $\alpha \in X$. Inoltre, se esistesse un ordinale β con la stessa proprietà, in particolare conterrebbe anche $\bigcup X$, da cui la tesi.
Per l'intersezione, basta notare che essere il minimo in un insieme di ordinali significa essere segmento iniziale di ogni altro elemento. Allora, detto α l'elemento di X con order type minimo, si ha che ovviamente $\bigcap X \subseteq \alpha$, e per quanto appena detto $a \subseteq \bigcap X$; segue la tesi. □

4 Equivalenza di buon ordinamento e assenza di catene discendenti di ordinali

Proposizione 4.1. *Un insieme di ordinali X ammette minimo se e solo se non esistono catene discendenti di ordinali in X.*

Dimostrazione.

1. $\Rightarrow$: Se esistesse in X una catena discendente infinita della forma $\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni ...$, allora α_0 conterrebbe una catena discendente infinita della forma $\alpha_1 \ni \alpha_2 \ni ...$, e questo sarebbe assurdo, dato che α_0 è ben ordinato per definizione.

2. $\Leftarrow$: Supponiamo che X non ammetta minimo, e mostriamo che esiste una catena discendente infinita: costruiamo per ricorsione numerabile

$$\begin{cases} \alpha_0 = f(X) \\ \alpha_{n+1} = f(\{x \in X | x \in \alpha_n\}) \end{cases}$$

Dove f è una funzione di scelta su X. Il supporto della successione è per costruzione la catena cercata.

□

5 Esistenza di ω_1, mediante assioma di rimpiazzamento

Proposizione 5.1. *La collezione $\omega_1 = \{\alpha \text{ ordinali} \mid |\alpha| \leq \aleph_0\}$ è un insieme.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che non è restrittivo considerare un elemento di ω_1 come sottoinsieme di ω; infatti, sia $\Omega = \{A \text{ buon ordine} \mid A \subseteq \omega\}$. Ogni buon ordine X al più numerabile è isomorfo ad un elemento di Ω, dato che la funzione iniettiva $f : X \to \omega$ ha come immagine un sottoinsieme ben ordinato di ω al più numerabile. Pertanto, vale che $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega \times \omega)$; per rimpiazzamento, associamo ad ogni buon ordine di Ω l'unico ordinale a cui è isomorfo secondo la formula $\varphi(x, \alpha) = x \cong \alpha$; l'insieme che ne deriva è proprio ω_1. □

6 Esistenza di due insiemi, mediante assioma di rimpiazzamento

Proposizione 6.1. *Le seguenti due collezioni sono insiemi:*

1. $A = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}^{(n)}(\omega)$
2. $\Gamma = \{\alpha \textit{ ordinali} \mid |\alpha| \leq \mathfrak{c}\}$

Dimostrazione.
1. Sia B l'insieme $\{y \mid \exists x \in \omega : \varphi(x, y)\}$, dove $\varphi(x, y) =$ "$\mathcal{P}^{(x)}(\omega) = y$". Allora, per rimpiazzamento l'insieme B esiste, e per l'assioma dell'unione esiste anche $A = \bigcup B$.
2. Usando l'assioma della scelta, ben ordiniamo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, e associamolo all'ordinale che a questo punto gli è isomorfo: sia β tale ordinale. Ora, sappiamo che $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$, e dunque β contiene ogni ordinale di Γ, da cui segue $\Gamma \subset \beta$. Dato che β è un insieme, e un sottoinsieme di un insieme è un insieme, segue che la collezione Γ è in realtà un insieme.

□

7 Definizione alternativa di ω_1

Proposizione 7.1. *Vale l'uguaglianza* $\omega_1 = \{\alpha \textit{ ordinali} \mid \exists A \subseteq \mathbb{R} \quad \alpha \cong A\}$.

Dimostrazione. Durante la dimostrazione, sia Y l'insieme di cui sopra.
Dato che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ben ordinato è al più numerabile, il contenimento $X \subseteq \omega_1$ segue immediatamente.
Per l'altro contenimento, comunque preso un ordinale $\beta \in \omega_1$, possiamo ben ordinare $\mathbb{R}$ usando l'assioma di scelta e immergere β in $\mathbb{Q}$ con una funzione iniettiva f_β. Ora, per ogni ordinale $\beta \in \omega_1$ esiste un sottoinsieme ben ordinato di $\mathbb{R}$ a cui β è isomorfo ($f_\beta[\beta]$), e dunque $\beta \in Y$.
Ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 7

Enrico Berni, 582049

27/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Classi proprie in NBG, con dimostrazione
2. Operazioni elementari su classi in NBG
3. Proprietà del sottoinsieme
4. NBG dimostra l'assioma di separazione di ZFC
5. Iniezione dei naturali in insiemi infiniti, usando il lemma di Zorn
6. Rimpiazzamento per classi in NBG
7. Somma di ordinali come somma di buoni ordini
8. Continuità dei Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}$

1 Classi proprie in NBG, con dimostrazione

Proposizione 1.1. *Le seguenti collezioni sono classi proprie:*

1. $V = \{x | x = x\}$
2. $SING = \{x | \exists y \; x = \{y\}\}$
3. $PAIR = \{x | \exists y \exists z \; x = \{y, z\}\}$
4. $OPAIR = \{x | \exists y \exists z \; x = \{\{y\}, \{y, z\}\}\}$
5. $\mathcal{R} = \{x | x \notin x\}$
6. $ORD = \{\alpha | \alpha \text{ è ordinale}\}$
7. $POWER = \{x | \exists y \; x = \mathcal{P}(y)\}$

8. $IN = \{(x, y)|x \text{ insieme}, y \text{ insieme}, x \in y\}$

Dimostrazione. L'esistenza di ognuna di queste collezioni è garantita dall'assioma di comprensione, dato che ognuna di tali classi è estensione di una formula predicativa scrivibile nel linguaggio della teoria. Mostriamo dunque che sono classi proprie:

1. Se l'universo fosse un insieme, contraddirebbe il teorema di Cantor, come visto tempo fa in classe.

2. Se $SING$ fosse un insieme, per l'assioma dell'unione sarebbe un insieme anche $\bigcup SING = V$, e questo è assurdo.

3. Si nota che $SING \subseteq PAIR$, e dunque se $PAIR$ fosse un insieme lo sarebbe anche $\bigcup PAIR = V$, e questo è assurdo.

4. Basta osservare che un singoletto non è altro che una coppia ordinata della forma $\{x\} = (x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\}$, e dunque $SING \subseteq OPAIR$. Si conclude come con $PAIR$.

5. Segue dal teorema di Russell.

6. Segue dal teorema di Burali Forti.

7. Banalmente, vale che $SING \subseteq POWER$, e dunque si conclude come sopra.

8. Per ogni x insieme, vale che $(x, \mathcal{P}(x)) \in IN$, e dunque $V \subseteq \bigcup IN$, da cui segue che IN non è un insieme.

Ciò conclude la dimostrazione. □

2 Operazioni elementari su classi in NBG

Proposizione 2.1. *Siano A e B due classi. Allora, le collezioni $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$ sono classi. Inoltre, data una classe A, vale che A è un insieme se e solo se $\mathcal{P}(A)$ è un insieme.*

Dimostrazione. $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$, $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$,
$A \times B = \{X|\exists a \in A\, \exists b \in B\ x = \{\{a\}, \{a, b\}\}\}$. Tutte e tre le collezioni esistono per l'assioma di comprensione.
Per quanto riguarda la seconda parte, osserviamo che se A è un insieme, $\mathcal{P}(A)$ è un insieme per l'assioma delle parti di ZFC. Per il viceversa, osserviamo che se A fosse una classe, si avrebbe che $A \subseteq \bigcup \mathcal{P}(A)$, dato che per ogni $a \in A$, $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Dunque, se $\mathcal{P}(A)$ fosse un insieme, lo sarebbe anche A per separazione, e ciò contraddirebbe l'ipotesi su A. □

3 Proprietà del sottoinsieme

Proposizione 3.1. *Sia C una classe, e sia b un insieme. Allora, la classe $C \cap b$ è un insieme.*

Dimostrazione. Per definizione, $C \cap b \subseteq b$, e dunque $C \cap b \in \mathcal{P}(b)$. Dato che $\mathcal{P}(b)$ esiste per ogni insieme b, ciò conclude la dimostrazione. $\square$

4 NBG dimostra l'assioma di separazione di ZFC

Proposizione 4.1. *Gli assiomi di NBG dimostrano l'assioma di separazione di ZFC.*

Dimostrazione. Sia $\varphi(x, A_1, \ldots, A_n)$ una formula predicativa scritta nel linguaggio della teoria degli insiemi. L'assioma di separazione di ZFC ci garantisce che esiste l'estensione di $\varphi(x, A_1, \ldots, A_n)$ soltanto se individuiamo a priori un insieme B in cui tale estensione è contenuta. Scritto in formule,

$$\forall B \quad \exists C = \{x \in B | \varphi(x, A_1, \ldots, A_n)\}$$

Ora, in NBG vale che la formula $x \in B \wedge \varphi(x, A_1, \ldots, A_n)$ è ancora una formula predicativa, $\varphi'(x, B, A_1, \ldots, A_n)$. Per comprensione in NBG, esiste l'estensione della formula, sia essa la classe

$$C = \{x \text{ insieme} | \varphi'(x, B, A_1, \ldots, A_n)\}$$

Allora, abbiamo che C è una classe, e anche che $C \subseteq B$ per definizione di C, cioè $C \in \mathcal{P}(B)$, che è un insieme per l'assioma delle parti di ZFC. Dunque, possiamo concludere che C è un insieme. $\square$

5 Iniezione dei naturali in insiemi infiniti, usando il lemma di Zorn

Proposizione 5.1. *Assumendo gli assiomi di ZF+ZL, si dimostra che esiste sempre una funzione iniettiva $f : \omega \longrightarrow X$ per ogni X insieme infinito.*

Dimostrazione. Durante la dimostrazione, sia $E \subseteq \omega$ un sottoinsieme dei naturali, e si denoti con G_f il grafico della funzione f, $G_f \in \omega \times X$.
Sia ora $G = \{G_f | f \in F\}$, dove $F = \bigcup_{E \in \mathcal{P}(\omega)} \{f : E \longrightarrow X\}$. Si osserva immediatamente che la mappa ϕ, $f \mapsto G_f$ è una bigezione tra G ed F. Ora, abbiamo che $G \subseteq \mathcal{P}(E \times F)$, e possiamo definire una relazione d'ordine su G usando l'inclusione, rendendolo un poset. Il suo sottoinsieme G_{inj} dei grafici delle funzioni iniettive è ancora un poset, con l'ordine ereditato da G. Presa una catena $C \subseteq G_{inj}$, si nota che l'unione degli elementi di C è un

maggiorante di C, e quindi G_{inj} è induttivo[1], cioè soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn. Allora, esiste almeno un elemento massimale in G_{inj}, sia esso G_0. Considerando $\phi^{-1}(G_0) = f_0$, si ha che f_0 è massimale nell'insieme $\phi^{-1}[G_{inj}]$, con l'ordine indotto. Abbiamo dunque tre casi possibili:

- Se $Dom(f_0) = \omega$, abbiamo trovato una funzione iniettiva da ω a X, come da tesi.
- Se $Dom(f_0) = E \subset \omega$ e $Im(f_0) = X$, E è un sottoinsieme infinito di ω, e abbiamo già visto che si possono costruire bigezioni tra ω e suoi sottoinsiemi infiniti usando soltanto gli assiomi di ZF. Sia dunque $\psi : \omega \to E$ una di tali bigezioni. La mappa
$$\omega \xrightarrow{\psi} E \xrightarrow{f_0} X$$
è iniettiva.
- Se invece $Dom(f_0) = E \subset \omega$ e $Im(f_0) \neq X$, esistono due elementi $x \in X \setminus Im(f_0)$ e $y \in \omega \setminus E$. La funzione
$$\hat{f}_0 : E \cup \{y\} \longrightarrow X$$
$$\begin{cases} \hat{f}_{0|E} = f_0 \\ \hat{f}_0(y) = x \end{cases}$$
è ancora iniettiva, ed estende la f_0, il che contraddice la massimalità di f_0, assurdo.

Ciò conclude la dimostrazione. □

6 Rimpiazzamento per classi in NBG

Proposizione 6.1. *Sia A una classe propria, e sia F una funzione iniettiva definita su A. Allora, $F[A]$ è una classe propria.*

Dimostrazione. Innanzitutto, per mostrare che $F[A]$ esiste, usiamo l'assioma di comprensione: prendiamo come formula $\varphi(x, A, F) = \exists a \in A \quad (a, x) \in F$.
Otteniamo che l'estensione
$$\{x|\varphi(x, A, F)\} = \{x|\exists a \in A \quad (a, x) \in F\}$$
Esiste all'interno della teoria.
Mostriamo che non è un insieme: dato che la F è iniettiva, è bigettiva sull'immagine, e dunque è ben definita la funzione $F^{-1} : F[A] \longrightarrow A$. Se $F[A]$ fosse un insieme, lo sarebbe anche $F^{-1}[F[A]] = A$ per l'assioma di rimpiazzamento, e questo è assurdo. □

[1]Il termine "induttivo" qui è usato come in teoria degli ordini

7 Somma di ordinali come somma di buoni ordini

Proposizione 7.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, $\alpha \oplus \beta \cong \alpha + \beta$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

- $\underline{\beta = 0}$: $\alpha + \beta = \alpha + 0 = \alpha$ per definizione, e $\alpha \oplus \beta = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}) = \alpha \times \{0\}$, che è chiaramente isomorfo ad α.

- $\underline{\beta = \gamma + 1}$: Costruiamo un isomorfismo tra $\alpha + \beta$ e $\alpha \oplus \beta$, sapendo che ne esiste uno tra $\alpha + \gamma$ e $\alpha \oplus \gamma$.
  Sia ϕ tale isomorfismo. Notiamo che

  $$\alpha \oplus \beta = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}) = ((\alpha \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\})) \cup \{(\gamma, 1)\}$$

  Ora, definiamo $\phi' : \alpha \oplus \beta \longrightarrow \alpha + \beta = \alpha + \gamma + 1$ tale che

  $$\begin{cases} \phi'_{|\alpha \oplus \gamma} = \phi \\ \phi'((\gamma, 1)) = \gamma + 1 \end{cases}$$

  La funzione costruita sopra è chiaramente un isomorfismo d'ordine.

- $\underline{\beta \text{ limite}}$: Sia ora β un ordinale limite, e supponiamo che la tesi valga per ogni ordinale $\gamma < \beta$. Per ipotesi induttiva, esiste una famiglia di isomorfismi

  $$\langle \phi_\gamma : \alpha + \gamma \longrightarrow \alpha \oplus \gamma \rangle_{\gamma < \beta}$$

  Dato che un isomorfismo tra buoni ordini, e dunque in particolare tra ordinali, è unico, si osserva che i ϕ_γ sono uno estensione dell'altro, e dunque sono compatibili. Consideriamo dunque $\Phi = \bigcup_{\gamma < \beta} \phi_\gamma$,

  $$\Phi : \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha + \gamma = \alpha + \beta \longrightarrow \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha \oplus \gamma = \alpha \oplus \beta$$

  Dove l'uguaglianza a destra della freccia segue da come è definita l'unione di buoni ordini. La verifica del fatto che Φ sia un isomorfismo è immediata, e segue dalla costruzione e dal fatto che i ϕ_γ sono uno estensione dell'altro.

□

8 Continuità dei Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}$

Denotiamo con $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue. Denotiamo con m la misura di Lebesgue.

Proposizione 8.1. *Vale l'uguaglianza* $|\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è trovare un sottoinsieme continuo di $\mathbb{R}$ di misura nulla, di modo che ogni suo sottoinsieme sia misurabile. La tesi seguirà per il teorema di Cantor-Bernstein.
Mostriamo che l'insieme di Cantor soddisfa le nostre richieste.
Definiamo per ricorsione numerabile la seguente successione di insiemi:

$$\begin{cases} C_0 = [0,1] \\ C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}) \end{cases}$$

L'insieme di Cantor è l'intersezione di tutta la famiglia,

$$C := \bigcap_{n\in\omega} C_n$$

Mostriamo che C ha la cardinalità del continuo ed ha misura nulla.

- Innanzitutto, si ha che, se $\{A_i\}_{i\in\omega}$ è una famiglia di insiemi disgiunti,

  $$m\left(\bigsqcup_{i\in\omega} A_i\right) = \sum_{i\in\omega} m(A_i)$$

  Usiamo questo fatto per mostrare che C ha misura nulla: possiamo trovare la misura di C come $m(C) = m([0,1]) - m(C^{\mathsf{c}})$.
  Ora, al passo $k+1$-esimo della successione, viene rimosso il terzo centrale di C_k, che ha quindi misura $\frac{m(C_k)}{3}$. L'insieme C^{c} ha dunque misura descritta dalla legge (dimostrabile con una facile induzione)

  $$m(C^{\mathsf{c}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

  Pertanto,

  $$m(C) = m([0,1]) - m(C^{\mathsf{c}}) = 1 - 1 = 0$$

- Per mostrare che C ha la cardinalità del continuo, basta osservare che lo sviluppo in base 3 degli elementi di C non ammette 1 come cifra, e questo segue dalla costruzione. Dunque, si può associare bigettivamente ad ogni $c \in C$ il suo sviluppo in base 3, che altro non è che una successione numerabile di 0 e 2, appartenente all'insieme $\{0,2\}^\omega$ di cardinalità $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Per quanto detto sopra, si ha la seguente catena di contenimenti:

$$\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Si conclude con Cantor-Bernstein. $\square$

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 8

Enrico Berni, 582049

11/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Prodotto tra ordinali come prodotto di buoni ordini
2. Esponenziale di ordinali come esponenziale di buoni ordini
3. Proprietà d'ordine di somma e prodotto tra ordinali
4. Proprietà algebriche di somma, prodotto ed esponenziale di ordinali
5. Calcolo di $(\omega + 1)^\omega$
6. Unioni di insiemi di cardinali
7. Crescenza della funzione $\aleph$
8. Immersione di ω_1 in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (ZF)
9. Continuità della σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$

1 Prodotto tra ordinali come prodotto di buoni ordini

Proposizione 1.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, $\alpha \cdot \beta \cong \alpha \otimes \beta$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

- $\underline{\beta = 0}$: Se $\beta = 0$, si ha che
$$\alpha \cdot 0 = \emptyset = \alpha \otimes 0$$
- $\underline{\beta \text{ successore}}$: Se esiste γ tale che $\beta = \gamma + 1$, allora
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cong (\alpha \otimes \gamma) + \alpha \cong (\alpha \otimes \gamma) \oplus \alpha \cong \alpha \otimes (\gamma \oplus 1) \cong \alpha \otimes \beta$$

- $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Per ipotesi induttiva, per ogni ordinale $\gamma < \lambda$ esiste unico l'isomorfismo $\psi_\gamma : \alpha \cdot \gamma \longrightarrow \alpha \otimes \gamma$. I ψ_γ sono uno estensione dell'altro, e dunque in particolare sono compatibili. Esiste ed è ben definita dunque la funzione

$$\bigcup_{\gamma<\lambda} \psi_\gamma = \Psi : \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \lambda \longrightarrow \alpha \otimes \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \otimes \gamma$$

  È immediato osservare che la Ψ è un isomorfismo.

□

2 Esponenziale tra ordinali come esponenziale tra buoni ordini

Proposizione 2.1. *Siano α e $\beta \neq 0$ due ordinali. Allora, $\alpha^\beta \cong \exp(\alpha, \beta)$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

- $\underline{\beta = 1}$: Se $\beta = 1$, $\alpha^1 = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$, mentre $\exp(\alpha, 1) \cong \alpha$.
- $\underline{\beta \text{ successore}}$: Sia γ tale che $\beta = \gamma + 1$; allora,

$$\alpha^\beta = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha \cong \exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$$

  Dove l'isomorfismo segue dall'ipotesi induttiva. Ora, mostriamo che $\exp(\alpha, \gamma+1) \cong \exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$. Per farlo, basta costruire la funzione

$$\Gamma : \exp(\alpha, \gamma + 1) \longrightarrow \exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$$

$$\phi \longmapsto (\phi_{|\gamma}, \phi(\gamma + 1))$$

  Mostrare che Γ è un isomorfismo d'ordine è immediato.

- $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è un limite,

$$\alpha^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma \cong \bigcup_{\gamma<\lambda} \exp(\alpha, \gamma) = \exp(\alpha, \lambda)$$

  Dove l'isomorfismo segue dall'ipotesi induttiva.

Ciò conclude la dimostrazione. □

3 Proprietà d'ordine di somma e prodotto tra ordinali

Proposizione 3.1. *Siano α_1 e α_2 due ordinali tali che $\alpha_1 < \alpha_2$. Allora, per ogni ordinale β,*

1. $\alpha_1 + \beta \leq \alpha_2 + \beta$

2. $\alpha_1 \cdot \beta \leq \alpha_2 \cdot \beta$

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

1. - $\underline{\beta = 0}$: Se $\beta = 0$, si ritrova l'ipotesi.
   - $\underline{\beta \text{ successore}}$: Se β è un successore, esiste un ordinale γ tale che $\beta = \gamma + 1$. Allora, $\alpha_1 + \beta = (\alpha_1 + \gamma) + 1$, e $\alpha_2 + \beta = (\alpha_2 + \gamma) + 1$. Per ipotesi induttiva, $\alpha_1 + \gamma < \alpha_2 + \gamma$, e quindi esiste un ordinale $\delta \neq 0$ tale che $\alpha_1 + \gamma + \delta = \alpha_2 + \gamma$, e dunque si ha $(\alpha_1 + \gamma) + (\delta + 1) = \alpha_2 + \gamma + 1$. Ora, se $\delta \neq 0$ banalmente $1 \leq 1 + \delta$, e quindi esiste un ordinale $\xi \neq 0$ tale che $1 + \xi = \delta + 1$. Allora, la situazione è la seguente:

     $$(\alpha_2 + \gamma) + 1 = (\alpha_1 + \gamma) + (\delta + 1) = (\alpha_1 + \gamma) + (1 + \xi)$$

     Dall'uguaglianza di sopra segue la tesi.
   - $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Per ipotesi induttiva, vale la seguente disuguaglianza

     $$\alpha_1 + \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_1 + \gamma \leq \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 + \gamma = \alpha_2 + \lambda$$

     Essa è equivalente alla seguente, dato che gli insiemi considerati hanno a due a due gli stessi sup

     $$\alpha_1 + \lambda = \alpha_1 + \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \leq \alpha_2 + \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma = \alpha_2 + \lambda$$

     Segue la tesi.

2. - $\underline{\beta = 0}$: Se $\beta = 0$, si ha $0 = \alpha_1 \cdot 0 \leq \alpha_2 \cdot 0 = 0$.
   - $\underline{\beta \text{ successore}}$: Se $\beta = \gamma + 1$, allora

     $$\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) = \alpha_1 \cdot \gamma + \alpha_1 \leq (\alpha_1 \cdot \gamma) + \alpha_2 \leq (\alpha_2 \cdot \gamma) + \alpha_2$$

     Dove la prima disuguaglianza è vera per il punto (1), e la seconda per ipotesi induttiva.

- $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Per ipotesi induttiva, per ogni $\gamma < \lambda$ vale $\alpha_1 \cdot \gamma \leq \alpha_2 \cdot \gamma$, da cui segue

$$\bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_1 \cdot \gamma \leq \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 \cdot \gamma$$

$$\alpha_1 \cdot \lambda = \alpha_1 \cdot \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \leq \alpha_2 \cdot \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \lambda$$

Le due disuguaglianze sono equivalenti perché gli insiemi in questione hanno a due a due gli stessi sup.

□

4 Proprietà algebriche di somma, prodotto ed esponenziale di ordinali

Proposizione 4.1. *Siano α, β e γ tre ordinali. Allora,*

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
2. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
3. $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$
4. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono tutte per induzione transfinita su γ.

1. - $\underline{\gamma = 0}$: $\alpha \cdot (\beta \cdot 0) = \alpha \cdot 0 = 0 = (\alpha \cdot \beta) \cdot 0$
   - $\underline{\gamma \text{ successore}}$: Notiamo che $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\delta + 1) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta + \alpha \cdot \beta =$ $= \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta \cdot (\delta + 1))$[1]
   - $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, vale che

   $$(\alpha \cdot \beta) \cdot \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) = \alpha \cdot (\beta \cdot \lambda)$$

   Dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il prodotto di due ordinali è un successore solo se entrambi sono successori.

2. - $\underline{\gamma = 0}$: $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$
   - $\underline{\gamma \text{ successore}}$: $\alpha \cdot (\beta + (\delta + 1)) = \alpha \cdot ((\beta + \delta) + 1) = \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha =$ $= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha$. Si conclude per la proprietà associativa della somma.

[1] Si è usata la distributività dimostrata nel punto (2)

- $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, allora $\beta + \lambda$ è limite, e quindi

$$\alpha \cdot (\beta + \lambda) = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot (\beta + \delta) = \bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta).$$

Dato che $\alpha \cdot \lambda$ è un prodotto di due ordinali, di cui uno limite, è esso stesso un limite, e dunque

$$\bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \lambda$$

3.
- $\underline{\gamma = 0}$: $\alpha^\beta \cdot \alpha^0 = \alpha^\beta \cdot 1 = \alpha^{\beta+0}$
- $\underline{\gamma \text{ successore}}$:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^{\delta+1} = \alpha^\beta \cdot (\alpha^\delta \cdot \alpha) = (\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta) \cdot \alpha = (\alpha^{\beta+\delta}) \cdot \alpha =$$
$$= \alpha^{(\beta+\delta)+1} = \alpha^{\beta+(\delta+1)}$$

- $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è un limite,

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^\beta \cdot \alpha^\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^{\beta+\delta} = \alpha^{\beta+\lambda}$$

4.
- $\underline{\gamma = 0}$: $(\alpha^\beta)^0 = 1 = \alpha^0 = \alpha^{\beta \cdot 0}$
- $\underline{\gamma \text{ successore}}$:

$$(\alpha^\beta)^{\delta+1} = (\alpha^\beta)^\delta \cdot \alpha^\beta = \alpha^{\beta\cdot\delta} \cdot \alpha^\beta = \alpha^{\beta\cdot\delta+\beta} = \alpha^{\beta\cdot(\delta+1)}$$

- $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite,

$$(\alpha^\beta)^\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha^\beta)^\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^{\beta\cdot\delta} = \alpha^{\beta\cdot\lambda}$$

□

5 Calcolo di $(\omega + 1)^\omega$

Proposizione 5.1. *Vale l'uguaglianza* $(\omega + 1)^\omega = \omega^\omega$.

Dimostrazione. Innanzitutto, osserviamo che per definizione $(\omega + 1)^\omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega + 1)^n$; ora, naturalmente vale $\omega^\omega = \bigcup_{n<\omega} \omega^n \leq \bigcup_{n<\omega} (\omega + 1)^n = (\omega + 1)^\omega$, e altrettanto naturalmente $(\omega + 1)^\omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega + 1)^n \leq \bigcup_{n<\omega} \omega^{2n} = \omega^\omega$. Vale dunque la seguente catena di disuguaglianze:

$$\omega^\omega \leq (\omega + 1)^\omega \leq \omega^\omega$$

Segue la tesi. □

6 Unioni di insiemi di cardinali

Proposizione 6.1. *Sia C un insieme di cardinali. Allora, $\bigcup C = \sup_{\kappa \in C} \kappa$.*

Dimostrazione. Ogni cardinale è un ordinale, e la stessa proprietà è stata dimostrata per gli ordinali. □

7 Crescenza della funzione $\aleph$

Proposizione 7.1. *La funzione $\aleph$ è strettamente crescente.*

Dimostrazione. È equivalente dimostrare che, dati $\alpha < \beta$ due cardinali, vale $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. Se $\alpha < \beta$, esiste $\gamma > 0$ tale che $\alpha + \gamma = \beta$. La dimostrazione è per induzione transfinita su γ.

- $\underline{\gamma = 1}$: Se $\gamma = 1$, $\aleph_\beta = \aleph_{\alpha+1} = \mathcal{H}(\aleph_\alpha) \supset \aleph_\alpha$. Il contenimento è stretto perché, per esempio, l'ordinale $\aleph_\alpha + 1$ appartiene a $\aleph_{\alpha+1}$ ma non ad $\aleph_\alpha$.

- $\underline{\gamma \text{ successore}}$: $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\delta} < \aleph_{\alpha+(\delta+1)} = \aleph_\beta$, dove le disuguaglianze derivano rispettivamente dall'ipotesi induttiva e dal passo base.

- $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, anche $\beta = \alpha + \lambda$ lo è. Dunque, per definizione

  $$\aleph_\beta = \aleph_{\alpha+\lambda} = \bigcup_{\xi < \alpha+\lambda} \aleph_\xi$$

  Per ipotesi induttiva, vale che

  $$\aleph_\alpha < \bigcup_{\xi < \alpha+\lambda} \aleph_\xi = \aleph_\beta$$

  Segue la tesi.

□

8 Immersione di ω_1 in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (ZF)

Proposizione 8.1. *In ZF, vale la disuguaglianza $|\omega_1| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))|$.*

Dimostrazione. Senza l'assioma di scelta, sappiamo che per ogni ordinale numerabile α esiste una funzione iniettiva da α in $\mathbb{R}$ (per definizione di cardinalità). Tuttavia, non possiamo scegliere un particolare sottoinsieme di $\mathbb{R}$, ben ordinato o meno, che sia l'immagine di tale iniezione. Tuttavia, consideriamo, per ogni $\alpha \in \omega_1$ l'insieme

$$X_\alpha = \{Y \subseteq \mathbb{R} | Y \text{ è ben ordinato} \wedge ot(Y) = \alpha\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

.
La funzione

$$\phi : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$
$$\alpha \longmapsto X_\alpha$$

è chiaramente iniettiva. $\square$

9 Continuità della σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$

Sia $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}$.

Proposizione 9.1. *Vale l'uguaglianza* $|\mathfrak{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

Avevamo già visto a lezione che la successione

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 = \tau \\ \mathcal{G}_{\alpha+1} = \mathcal{G}_\alpha \cup \{X^{\mathsf{c}} | X \in \mathcal{G}_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n<\omega} X_n | X_n \in \mathcal{G}_\alpha\} \\ \mathcal{G}_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} B_\gamma \end{cases}$$

definisce al passo ω_1 una σ-algebra su $\mathbb{R}$. Mostriamo che è contenuta in $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, da cui si concluderà che le due sono lo stesso oggetto per definizione dei boreliani.
Per induzione transfinita su α:

- $\underline{\alpha = 0}$: La topologia euclidea è contenuta in $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ per definizione.
- $\underline{\alpha \text{ successore}}$: Sia $\alpha = \beta + 1$. Se $X \in \mathcal{G}_{\beta+1}$, allora ci sono due possibilità: o $X \in \mathcal{G}_\beta$, oppure X è ottenuto da operazioni elementari di elementi di $\mathcal{G}_\beta$, che preservano la "borelianità" di X. In ogni caso, $X \in \mathcal{G}_{\alpha+1}$.
- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se $X \in \mathcal{G}_\lambda$, per definizione esiste un certo ordinale $\alpha \in \lambda$ tale che $X \in \mathcal{G}_\alpha$, e dunque è un boreliano per ipotesi induttiva.

Ora, dato che per definizione $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ è la minima σ-algebra che contenga la topologia euclidea, si conclude che $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{G}_{\omega_1}$. Mostriamo adesso, sempre per induzione transfinita, che $|\mathcal{G}_\alpha| = \mathfrak{c}$ per ogni $\alpha < \omega_1$, da cui concluderemo che effettivamente i boreliani di $\mathbb{R}$ sono una quantità continua.

- $\underline{\alpha = 0}$: La topologia euclidea è continua, come già mostrato in un esercizio precedente.
- $\underline{\alpha \text{ successore}}$: Siano $A_1 = \{X^{\mathsf{c}} | X \in \mathcal{G}_\alpha\}$ e $A_2 = \{\bigcup_{n<\omega} X_n | X_n \in \mathcal{G}_\alpha\}$ i due insiemi che al passo $\alpha+1$-esimo vengono aggiunti a $\mathcal{G}_\alpha$. Mostriamo che hanno la cardinalità del continuo. A_1 è banalmente in bigezione con $\mathcal{G}_\alpha$, mentre gli elementi di A_2 sono

al più quanti i sottoinsiemi numerabili di $\mathcal{G}_\alpha$, che sono $\mathfrak{c}_0^{\aleph} = \mathfrak{c}$. Inoltre, $|A_1| \geq \mathfrak{c}$, dato che per ogni $X \in \mathcal{G}_\alpha$, l'unione della successione costante $\langle X \rangle_{n<\omega}$ appartiene ad A_2.

- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: $\mathcal{G}_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \mathcal{G}_\gamma$ è unione al più numerabile di insiemi continui, e dunque è continua.

Ciò conclude la dimostrazione.

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 9

Enrico Berni, 582049

11/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Prodotto di ordinali successori
2. Esponenziazione di ordinali successori
3. Proprietà dell'esponenziazione di ordinali numerabili
4. Una disuguaglianza tra potenze di ω
5. Unicità della forma normale di Cantor
6. Caratterizzazione degli ordinali moltiplicativamente chiusi
7. Calcolo di $\mathfrak{c}^{\aleph_1}$
8. Proprietà delle operazioni tra cardinali
9. Monotonia delle operazioni tra cardinali

1 Prodotto di ordinali successori

Proposizione 1.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, $\alpha \cdot \beta$ è un successore se e solo se α e β sono successori.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Se α e β sono successori, allora esistono γ e δ tali che $\alpha = \gamma + 1$ e $\beta = \delta + 1$. Allora,

$$\alpha \cdot \beta = (\gamma + 1) \cdot (\delta + 1) = (\gamma + 1) \cdot \delta + (\gamma + 1) = ((\gamma + 1) \cdot \delta + \gamma) + 1$$

Dove l'ultima uguaglianza deriva dall'associatività della somma.

- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo che $\alpha \cdot \beta$ sia un successore e sia, senza perdita di generalità, $\beta = \lambda$ limite. Allora,

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \bigcup_{\gamma<\beta} \gamma = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\delta<\alpha\cdot\beta} \delta$$

Dunque, $\alpha \cdot \beta$ è un limite, contraddicendo le ipotesi.

Ciò conclude la dimostrazione. □

2 Esponenziazione di ordinali successori

Proposizione 2.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, α^β è successore se e solo se α è un successore e $\beta < \omega$.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Per induzione su β.
  - $\underline{\beta = 0}$: Per definizione, $\alpha^0 = 1 = 0 + 1$.
  - $\underline{\beta + 1 \text{ successore}}$: Vale che $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$. Ora, $\alpha^{\beta+1}$ è il prodotto di due successori, uno per ipotesi induttiva e uno per ipotesi, dunque per quanto detto sopra è un successore.
- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo che α sia successore e β sia infinito: allora, possiamo fare la divisione euclidea $\beta = \omega \cdot \gamma + \rho$, da cui segue

$$\alpha^\beta = \alpha^{\omega\cdot\gamma+\rho} = \alpha^{\omega\cdot\gamma} \cdot \alpha^\rho$$

con $\rho < \omega$. Allora, dato che α^β è successore, necessariamente è un successore anche $\alpha^\rho = \delta + 1$. Dunque,

$$\alpha^\beta = \alpha^{\omega\cdot\gamma} \cdot (\delta + 1) = \alpha^{\omega\cdot\gamma} \cdot \delta + \alpha^{\omega\cdot\gamma}$$

L'ordinale di cui sopra è successore se e solo se $\alpha^{\omega\cdot\gamma}$ lo è. Tuttavia,

$$\alpha^{\omega\cdot\gamma} = (\alpha^\gamma)^\omega = \bigcup_{n<\omega} (\alpha^\gamma)^n$$

e dunque $\alpha^{\omega\cdot\gamma}$ è limite, assurdo.

Se invece β fosse finito, e α fosse limite, varrebbe che banalmente

$$\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma^\beta$$

e dunque α^β sarebbe limite, assurdo.

Ciò conclude la dimostrazione. □

3 Proprietà dell'esponenziazione di ordinali numerabili

Proposizione 3.1. *Sia α un ordinale. Allora, $\omega^\alpha \geq \alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α.

- $\underline{\alpha = 0, 1}$: Banalmente, $1 > 0$ e $\omega > 1$.
- $\underline{\alpha \text{ successore}}$: $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega \geq \alpha \cdot \omega > \alpha$ se $\alpha \geq 1$.
- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è un limite, allora

$$\omega^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \omega^\gamma \geq \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma = \lambda$$

□

Proposizione 3.2. *Sia β un ordinale, e sia $\langle \alpha_n | n \in \omega \rangle$ la successione definita per ricorsione numerabile nel seguente modo:*

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta + 1 \\ \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} \end{cases}$$

Sia ora $\alpha = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n$; allora, la successione è strettamente crescente e α è limite.

Dimostrazione. Per induzione su n.

- $\underline{n = 0}$: $\omega^{\alpha_0} = \omega^{\beta+1} = \omega^\beta \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega = \bigcup_{n<\omega} \beta \cdot n > \beta \cdot 2$ se $\beta > 1$. I casi $\beta = 0, 1$ sono banalmente veri.
- $\underline{n \text{ successore}}$: $\omega^{\alpha_{n+1}} = \omega^{\omega^{\alpha_n}} > \omega^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}$

Ora, abbiamo mostrato a lezione che $\omega^\alpha = \alpha$, e dunque se α fosse un successore, si dovrebbe avere che ω è un successore e α è finito; banalmente, ω non è un successore, e dunque non lo è nemmeno α. Ciò conclude la dimostrazione. □

4 Una disuguaglianza tra potenze di ω

Proposizione 4.1. *Sia $\gamma > \gamma_1 > \cdots > \gamma_k$ una catena di ordinali. Allora, $\omega^\gamma > \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$.*

Dimostrazione.

$$\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k \leq \omega^{\gamma_1} \cdot (n_1 + \dots n_k) < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1+1} \leq \omega^\gamma$$

□

5 Unicità della forma normale di Cantor

Proposizione 5.1. *Sia α un ordinale. La forma normale di Cantor di α è unica.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita forte su α.
Supponiamo che ogni $\beta < \alpha$ abbia forma normale di Cantor unica. Siano adesso $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$ e $\omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_j} \cdot m_j$ due forme normali di Cantor per α, e supponiamo senza perdere generalità $\alpha_1 < \beta_1$: allora,

$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k < \omega^{\beta_1} \leq \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_j} \cdot m_j$$

e ciò è assurdo. Allora, $\alpha_1 = \beta_1$. Possiamo dunque fare la divisione euclidea delle due forme per ω^{β_1}, e dall'unicità di quoziente e resto otteniamo $n_1 = m_1$ (quoziente) e $j = k$, $\alpha_i = \beta_i$ e $n_i = m_i$ (resto).
Ciò conclude la dimostrazione. □

6 Caratterizzazione degli ordinali moltiplicativamente chiusi

Proposizione 6.1. *Sia α un ordinale infinito. I seguenti fatti sono tra loro equivalenti:*

1. *Per ogni $\beta < \alpha$, $\beta \cdot \alpha = \alpha$*
2. *Per ogni $\beta,\gamma < \alpha$, $\beta \cdot \gamma < \alpha$*
3. *$\alpha = \omega^{\omega^\gamma}$ per un certo γ*

Dimostrazione.

- $(1) \Rightarrow (2)$: Dato $\gamma < \alpha$, $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha = \alpha$.
- $(2) \Rightarrow (3)$: Dato che α è moltiplicativamente chiuso, $(\beta \cdot \gamma) \cdot 2 = (\beta \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma) < \alpha$, e dunque banalmente $\beta + \gamma < \alpha$, cioè α è additivamente chiuso, e dunque è della forma $\alpha = \omega^\delta$ per un certo ordinale δ. Ora, per ogni coppia di ordinali $\beta,\gamma < \delta$, vale che $\omega^{\beta+\gamma} = \omega^\beta \cdot \omega^\gamma < \omega^\delta$, da cui $\beta + \gamma < \delta$, cioè δ è additivamente chiuso, e dunque è della forma ω^{ω^ξ} per un certo ordinale ξ.
- $(3) \Rightarrow (1)$: Per ogni $\beta < \alpha$, esistono ζ e n tali che $\omega^{\omega^\zeta} \leq \beta < \omega^{\omega^\zeta \cdot n}$. Pertanto,

$$\alpha = \omega^{\omega^\delta} = \omega^{\omega^\zeta + \omega^\delta} = \omega^{\omega^\zeta} \cdot \omega^{\omega^\delta} \leq \beta \cdot \alpha \leq \omega^{\omega^\zeta \cdot n + \omega^\delta} = \omega^\delta = \alpha$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

7 Calcolo di $\mathfrak{c}^{\aleph_1}$

Proposizione 7.1. *Vale l'uguaglianza* $\mathfrak{c}^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$.

Dimostrazione. $\mathfrak{c}^{\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_1} = 2^{\aleph_1}$ □

8 Proprietà algebriche delle operazioni tra cardinali

Proposizione 8.1. *Siano* κ, ν *e* μ *tre cardinali. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\kappa + \nu = \nu + \kappa$
2. $\kappa \cdot \nu = \nu \cdot \kappa$
3. $\kappa + (\nu + \mu) = (\kappa + \nu) + \mu$
4. $\kappa \cdot (\nu \cdot \mu) = (\kappa \cdot \nu) \cdot \mu$
5. $\kappa(\nu + \mu) = \kappa\nu + \kappa\mu$
6. $\kappa^{\nu} \cdot \kappa^{\mu} = \kappa^{\nu+\mu}$
7. $(\kappa^{\nu})^{\mu} = \kappa^{\nu \cdot \mu}$

Dimostrazione. Durante la dimostrazione, siano A, B e C tre insiemi tali che $|A| = \kappa$, $|B| = \nu$ e $|C| = \mu$.

1. Ovvio, dato che per ogni insieme A e B vale $A \sqcup B = B \sqcup A$.
2. Ovvio, dato che gli insiemi $A \times B$ e $B \times A$ sono in bigezione.
3. Ovvio, dato che $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$.
4. Ovvio, dato che $A \times (B \times C)$ è in bigezione con $(A \times B) \times C$.
5. Abbiamo già visto che $A \times (B \sqcup C)$ è equipotente ad $(A \times B) \sqcup (A \times C)$.
6. Segue dal fatto che $A^{B \sqcup C}$ è in bigezione con $A^B \times A^C$.
7. Segue dal fatto che $(A^B)^C$ è in bigezione con $A^{B \times C}$ tramite la mappa

$$\phi : A^{B \times C} \longrightarrow (A^B)^C$$

$$f \longmapsto (g : c \longmapsto f(c, \cdot))$$

□

9 Monotonia delle operazioni tra cardinali

Proposizione 9.1. *Siano $\kappa \leq \kappa'$ e $\nu \leq \nu'$ cardinali. Allora,*

1. $\kappa + \nu \leq \kappa' + \nu'$
2. $\kappa \cdot \nu \leq \kappa' \cdot \nu'$
3. $\kappa^{\nu} \leq \kappa'^{\nu'}$

Dimostrazione. Durante la dimostrazione, siano A, A', B e B' insiemi tali che $|A| = \kappa$, $|A'| = \kappa'$, $|B| = \nu$ e $|B'| = \nu'$, e siano $f : A \longrightarrow A'$ e $g : B \longrightarrow B'$ due funzioni iniettive.

1. La funzione
$$\phi : A \sqcup B \longrightarrow A' \sqcup B'$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$
è iniettiva.

2. La funzione
$$\psi : A \times B \longrightarrow A' \times B'$$
$$(a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$
è iniettiva.

3. A meno di identificare A e B come sottoinsiemi rispettivamente di A' e B', è ovvio che esista un'iniezione tra A^B e $A'^{B'}$.

□

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 10

Enrico Berni, 582049

25/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Cardinalità di operazioni tra ordinali
2. Monotonia della somma infinita di cardinali
3. Proprietà associativa infinita di somma e prodotto di cardinali
4. Proprietà del prodotto infinito di cardinali
5. Forma debole del teorema di König
6. Un prodotto di cardinali strettamente minore dell'esponenziale del sup
7. La cofinalità di un insieme è sempre un cardinale regolare
8. Esistenza di cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità fissata
9. (ZF) Immersione, per ogni insieme A infinito, di $\mathcal{H}(A)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$
10. (ZF) Equipotenza di un cardinale infinito con il prodotto cartesiano di due sue copie, e un semplice corollario
11. Confronto tra cardinalità di un'unione di insiemi e somma della cardinalità degli stessi
12. Caratterizzazione dei limiti forti, e una proprietà

In questo foglio, useremo molto spesso il termine "cardinale" per indicare un cardinale infinito.

1 Cardinalità di operazioni tra ordinali

Proposizione 1.1. *Siano α e β due ordinali infiniti. Allora, vale che* $|\alpha+\beta| = |\alpha\cdot\beta| = |\exp(\alpha,\beta)| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$

Dimostrazione.

1. Sappiamo che $\alpha+\beta$ è equipotente all'unione disgiunta di due insiemi di cardinalità rispettivamente $|\alpha|$ e $|\beta|$, da cui segue la tesi.

2. Per induzione transfinita su β:

   - $\underline{\beta = 0}$: La tesi è vera a vuoto.
   - $\underline{\beta+1 \text{ successore}}$: Se β è finito, la tesi è vera a vuoto. Altrimenti, per definizione $\alpha\cdot(\beta+1) = \alpha\cdot\beta+\alpha$, e dal punto precedente si ottiene $|\alpha\cdot(\beta+1)| = \max\{|\alpha\cdot b|,|\alpha|\}$. Per ipotesi induttiva, $|\alpha\cdot\beta| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$, e dunque $|\alpha\cdot(\beta+1)| = \max\{|\alpha|,|\beta+1|\}$, dove l'uguaglianza segue dal fatto che $|\beta| = |\beta+1|$, dato che β è infinito.
   - $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite,

   $$|\alpha\cdot\lambda| = |\bigcup_{\gamma<\lambda}\alpha\cdot\gamma| \leq^{1} \max\{|\lambda|,\sup_{\gamma<\lambda}\{\max\{|\alpha|,|\gamma|\}\}\} = \max\{|\alpha|,|\lambda|\}$$

   L'altra disuguaglianza è ovvia.

3. Per induzione transfinita su β:

   - $\underline{\beta = \omega}$: La tesi è vera a vuoto.
   - $\underline{\beta+1 \text{ successore}}$: Se β è finito, la tesi è vera a vuoto. Altrimenti, per definizione, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta\cdot\alpha$, e quindi $|\alpha^{\beta+1}| = |\alpha^\beta\cdot\alpha| = \max\{|\alpha^\beta|,|\beta|\} = \max\{|\alpha|,\max\{|\alpha|,|\beta|\}\} = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$ per ipotesi induttiva.
   - $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite,

   $$|\alpha^\lambda| = |\bigcup_{\gamma<\lambda}\alpha^\gamma| \leq^{2} \max\{|\lambda|,\sup_{\gamma<\lambda}\{\max\{|\alpha|,|\gamma|\}\}\} = \max\{|\alpha|,|\lambda|\}$$

   L'altra disuguaglianza è ovvia.

$\square$

[1] Ho usato il teorema delle somme infinite di cardinali, purtroppo non avevo altre idee...

[2] Ho usato sempre lo stesso teorema

2 Monotonia della somma infinita di cardinali

Proposizione 2.1. *Siano $\langle \kappa_i \rangle$ e $\langle \mu_i \rangle$ due I-sequenze di cardinali, tali che per ogni i valga $\kappa_i \leq \mu_i$. Allora, $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \mu_i$.*

Dimostrazione. Siano $\langle A_i \rangle$ e $\langle B_i \rangle$ due I-sequenze di insiemi (che supponiamo disgiunti per semplicità) tali che $|A_i| = \kappa_i$ e $|B_i| = \mu_i$ per ogni i. Per l'assioma della scelta esiste una I-sequenza di funzioni iniettive $\langle f_i : A_i \longrightarrow B_i \rangle$. Definiamo una funzione

$$\phi : \bigsqcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} B_i$$

$$a \longmapsto f_j(a)$$

dove $j \in I$ è l'indice tale che $a \in A_j$. La ϕ è unione disgiunta di funzioni iniettive a due a due compatibili, e dunque è iniettiva. □

Proposizione 2.2. *Sia κ un cardinale infinito, e sia $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ una I-sequenza di insiemi disgiunti, tale che $|I| \leq \kappa$ e per ogni i, $|A_i| \leq \kappa$. Allora, $|\bigsqcup_{i\in I} A_i| \leq \kappa$.*

Dimostrazione. Si ha che

$$|\bigsqcup_{i\in I} A_i| \leq \sum_{i<\kappa} \kappa = \max\{\kappa, \kappa\} = \kappa$$

La tesi segue immediatamente. □

3 Proprietà associativa infinita di somma e prodotto di cardinali

Proposizione 3.1. *Sia $\langle \kappa_i | i \in I \rangle$ una I-sequenza di cardinali, e sia $\langle I_j | j \in J \rangle$ una partizione di I. Allora, $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{j\in J} (\sum_{i\in I_j} \kappa_i)$.*

Dimostrazione. Sia $\langle A_i \rangle_{i\in I}$ una I-sequenza di insiemi, tali che per ogni i, $|A_i| = \kappa_i$. Per la proprietà associativa dell'unione, data una partizione $\langle I_j \rangle_{j\in J}$ di I,

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{j\in J} \left(\bigsqcup_{i\in I_j} A_i \right)$$

Chiaramente l'uguaglianza passa alle cardinalità, e dunque segue che

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigsqcup_{i\in I} A_i| = |\bigsqcup_{j\in J} \left(\bigsqcup_{i\in I_j} A_i \right)| = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} \kappa_i \right)$$

Come richiesto. □

Proposizione 3.2. *Sia $\langle \kappa_i | i \in I\rangle$ una I-sequenza di cardinali, e sia $\langle I_j | j \in J\rangle$ una partizione di I. Allora, $\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J}(\prod_{i\in I_j} \kappa_i)$.*

Dimostrazione. Si procede come sopra: sebbene il prodotto tra insiemi non sia associativo strettamente parlando, associare i termini di un prodotto di insiemi conserva comunque le cardinalità. Procedendo come sopra, otteniamo che

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = |\prod_{i\in I} A_i| = |\prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in I_j} A_i\right)| = \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in I_j} \kappa_i\right)$$

□

4 Proprietà del prodotto infinito di cardinali

Proposizione 4.1. *Sia κ un cardinale, e sia $\langle \mu_i \rangle_{i\in I}$ una I-sequenza di cardinali. Allora, valgono le seguenti proprietà:*

1. $\prod_{i\in I} \kappa = \kappa^{|I|}$
2. $\prod_{i\in I} \kappa^{\mu_i} = \kappa^{\sum \mu_i}$
3. $(\prod_{i\in I} \mu_i)^\kappa = \prod_{i\in I}(\mu_i^\kappa)$

Dimostrazione. 1. Segue direttamente dalle definizioni di prodotto infinito di cardinali e di esponenziazione cardinale.

2. Il prodotto $\prod_{i\in I} \kappa^{\mu_i}$ corrisponde alla cardinalità dell'insieme $\prod_{i\in I} Fun(\mu_i, \kappa)$, che a sua volta è uguale, data una I-sequenza di insiemi $\langle A_i | i \in I\rangle$ disgiunti a due a due e tali che per ogni i valga $|A_i| = \mu_i$, alla cardinalità dell'insieme $\prod_{i\in I} Fun(A_i, \kappa)$. Ora, considero la funzione

$$\phi : \prod_{i\in I} Fun(A_i, k) \longrightarrow Fun\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i, \kappa\right)$$

$$\langle f_i | i \in I\rangle \longmapsto \bigsqcup_{i\in I} f_i$$

dove ogni f_i è una funzione di dominio A_i e codominio κ. La funzione ϕ è bigettiva[3]; per la definizione di somma cardinale ed esponenziale cardinale,

$$|Fun\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right)| = \kappa^{\sum \mu_i}$$

Ciò conclude la dimostrazione.

[3]La mappa che manda una funzione nella I-sequenza delle sue restrizioni è chiaramente l'inversa

3. Vale la seguente catena di ugugaglianze:

$$\prod_{i\in I}(\mu_i)^\kappa = ((\sup_{i\in I}\mu_i)^{|I|})^\kappa = (\sup_{i\in I}\mu_i)^{|I|\cdot\kappa} = (\sup_{i\in I}\mu_i)^{\kappa\cdot|I|} = (\sup_{i\in I}\mu_i^\kappa)^{|I|} = \prod_{i\in I}(\mu_i^\kappa)^4$$

□

5 Forma debole del teorema di König

Proposizione 5.1. *Siano $\langle\kappa_i\rangle$ e $\langle\mu_i\rangle$ due I-sequenze di cardinali tali che $\kappa_i < \mu_i$ per ogni i. Allora, $\sum_{i\in I}\kappa_i \leq \prod_{i\in I}\mu_i$.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1, posso dominare la somma $\sum_{i\in I}\kappa_i$ con la somma $\sum_{i\in I}\mu_i$. Abbiamo visto a lezione che $\sum_{i\in I}\mu_i \leq \prod_{i\in I}\mu_i$.

$$\sum_{i\in I}\kappa_i \leq \sum_{i\in I}\mu_i \leq \prod_{i\in I}\mu_i$$

Segue la tesi. □

6 Un prodotto di cardinali strettamente minore dell'esponenziale del sup

Proposizione 6.1. *Esistono una sequenza di cardinali $\langle\kappa_i\rangle$ non decrescente ed un ordinale infinito α tali che $\prod_{i<\alpha}\kappa_i < (\sup\kappa_i)^{|\alpha|}$.*

Dimostrazione. Consideriamo $\alpha = \omega + 1$, e la successione $\langle\kappa_i | i \in \omega+1\rangle$ tali che $\kappa_\omega = 2$, e $\kappa_i = 1$ per ogni $i \in \omega$. Allora,

$$\prod_{i\in\omega+1}\kappa_i = 2$$

$$(\sup_{i\in\omega+1}\kappa_i)^{|\omega+1|} = 2^{\aleph_0}$$

□

[4] Dove la penultima disuguaglianza segue dal fatto che il *sup* e l'esponenziazione cardinale preservano le disuguaglianze

7 La cofinalità di un insieme è sempre un cardinale regolare

Proposizione 7.1. *Sia X un insieme totalmente ordinato. Allora, $Cof(X)$ è un cardinale regolare, cioè $Cof(Cof(X)) = Cof(X)$.*

Dimostrazione. Per definizione, $Cof(X)$ è un cardinale; proviamone la regolarità. Per definizione di cofinalità, vale $Cof(Cof(X)) \leq Cof(X)$; inoltre, se $A \subseteq Cof(X)$ è illimitato, con $|A| = Cof(Cof(X))$ e $f : Cof(X) \longrightarrow X$ è una funzione strettamente crescente e illimitata, allora $f_{|A} : A \longrightarrow X$ è ancora illimitata, e dunque $Cof(Cof(X)) = |A| \geq Cof(X)$, da cui segue la tesi. □

8 Esistenza di cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità fissata

Proposizione 8.1. *Sia ν un cardinale regolare. Allora, esistono cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità ν, ossia per ogni cardinale μ esiste un cardinale $\kappa > \mu$ tale che $Cof(\kappa) = \nu$.*

Dimostrazione. Sia $\mu > \nu$ un cardinale maggiore di ν. Consideriamo l'<u>ordinale</u> somma $\mu + \nu$: sappiamo che, essendo ν un cardinale, in particolare è un ordinale limite, e dunque anche $\mu + \nu$ lo è. È anche vero che $Cof(\mu + \nu) = \nu$, dato che l'insieme $\{\mu + \alpha | \alpha \in \nu\}$ è illimitato in $\mu + \nu$. Preso adesso il cardinale $\aleph_{\mu+\nu}$, abbiamo che $\aleph_{\mu+\nu} \geq \mu + \nu$ per un fatto noto, e che, essendo indicizzato su un ordinale limite, $Cof \aleph_{\mu+\nu} = Cof(\mu + \nu) = \nu$. Ora, dato che cerchiamo una disuguaglianza stretta, abbiamo due casi:

- Se $\aleph_{\mu+\nu} > \mu + \nu = \mu$ (come cardinali), abbiamo finito.
- Se invece $\aleph_{\mu+\nu} = \mu$ (ancora come cardinali), allora considero $\aleph_{\omega_{\mu+\nu}}$ e ripeto il ragionamento, ottenendo questa volta una disuguaglianza stretta.

Ciò conclude la dimostrazione. □

9 (ZF) Immersione, per ogni insieme A infinito, di $\mathcal{H}(A)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$

Proposizione 9.1. *Sia A un insieme infinito. Allora, $|\mathcal{H}(A)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))|$.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione ϕ nel modo seguente:

$$\phi : \mathcal{H}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$$

$$\alpha \longmapsto \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) | \forall x \in X \ (x \text{ è ben ordinato } \wedge ot(x) = \alpha)\}$$

La ϕ è iniettiva, dato che due ordinali con lo stesso order type (isomorfi) sono uguali. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

10 (ZF) Equipotenza di un cardinale infinito con il prodotto cartesiano di due sue copie, e un semplice corollario

Proposizione 10.1. *Sia κ un cardinale infinito. Allora, $|\kappa \times \kappa| = |\kappa|$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita forte su κ. Supponiamo che per ogni ordinale $\alpha < \kappa$ valga la proprietà $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$. Definiamo un buon ordine su $\kappa \times \kappa$ nel seguente modo:

$$(\alpha, \beta) <' (\gamma, \delta) \leftrightarrow \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee (\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha, \beta) <'' (\gamma, \delta))$$

Dove $<''$ è l'ordine lessicografico. Notiamo che una coppia della forma (α, β) non può avere più di $(\max(\alpha, \beta) + 1) \cdot (\max(\alpha, \beta) + 1) = (\max(\alpha, \beta) + 1)$ elementi che la precedono in $(\kappa \times \kappa, <')$, e dunque che $ot(\kappa \times \kappa, <') \leq \kappa$, che implica $|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$. Dato che l'altra uguaglianza è ovvia, si conclude usando il teorema di Cantor-Bernstein. $\square$

Corollario 10.0.1. *Sia κ un cardinale infinito. Allora, $|\mathfrak{F}(\kappa)| = |Seq(\kappa)| = \kappa$.*

Dimostrazione. La stessa proprietà è stata dimostrata (senza usare l'assioma della scelta) per ogni insieme X per cui valga $|X \times X| = |X|$. Dalla proposizione di cui sopra segue la tesi. $\square$

11 Confronto tra cardinalità di un'unione di insiemi e somma della cardinalità degli stessi

Proposizione 11.1. *Sia $\langle X_i \rangle_{i \in I}$ una I-sequenza di insiemi. Allora, $|\bigcup_{i \in I} X_i| \leq \sum_{i \in I} |X_i|$. In particolare, se I è totalmente ordinato e l'unione è filtrante per ogni i, vale l'uguaglianza.*

Dimostrazione. Mostriamo che, data una I-sequenza di insiemi $\langle X_i | i \in I \rangle$, l'unione $\bigcup_{i \in I} X_i$ ha cardinalità minore o uguale a quella dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$. Definiamo una mappa suriettiva[5]

$$\phi : \bigsqcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}) \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

[5] In sostanza la mappa definita sarebbe l'unione disgiunta delle proiezioni canoniche

$$(x, j) \longmapsto x$$

Usando la scelta, abbiamo che esiste un'inversa destra iniettiva della ϕ, e dunque abbiamo quello che volevamo far vedere.
Adesso, abbiamo che

$$|\bigcup_{i \in I} X_i| \leq |\bigsqcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})| = \sum_{i \in I} |(X_i \times \{i\})| = \sum_{i \in I} |X_i|$$

Segue la tesi. □

12 Caratterizzazione dei limiti forti, e una proprietà

Proposizione 12.1. *Sia κ un cardinale. κ è limite forte se e solo se, per ogni $\nu < \kappa$, vale $2^\nu < \kappa$.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Rightarrow}$: Segue dalla definizione di limite forte.
- $\underline{\Leftarrow}$: Siano ν e μ due cardinali minori di κ. Allora, se $\eta = \max\{\nu, \mu\}$, vale che $\mu^\nu \leq \eta^\eta = 2^\eta < \kappa$. Per concludere, banalmente ogni cardinale si realizza come massimo di una coppia di cardinali (per esempio, $\nu = \max\{0, \nu\}$). Ciò conclude la dimostrazione.

□

Proposizione 12.2. *Sia κ un cardinale limite forte. Allora, $\kappa^{Cof\kappa} = 2^\kappa$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che per ogni κ, vale $\kappa^{Cof\kappa} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$. Mostriamo che per un cardinale limite forte vale anche l'altra disuguaglianza.
Presa una sequenza di cardinali $\langle \kappa_i | i \in Cof\kappa \rangle$, dove per ogni i vale $\kappa_i < \kappa$, e $\kappa = \sum_{i \in Cof\kappa} \kappa_i$[6], vale

$$2^\kappa = 2^{\sum \kappa_i} = \prod_{i \in Cof\kappa} \kappa_i = (\sup_{i \in Cof\kappa} 2^{\kappa_i})^{Cof\kappa} \leq \kappa^{Cof\kappa}$$

Dato che, essendo κ un limite forte, per quanto detto sopra $2^{\kappa_i} < \kappa$ per ogni $\kappa_i < \kappa$. Ciò conclude la dimostrazione. □

[6] $Cof\kappa$ è il minimo cardinale per cui si verifica questa richiesta

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 11

Enrico Berni, 582049

31/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Proprietà della gerarchia di Von Neumann
2. Chiusura transitiva di un insieme
3. Equivalenza dell'assioma di fondazione e dell'assenza di $\in$-catene discendenti infinite
4. Sulla cardinalità dei livelli della gerarchia di Von Neumann
5. Minimi livelli della gerarchia che contengono gli insiemi numerici
6. Una congettura sui livelli della gerarchia
7. Proprietà dei modelli naturali di ZFC
8. Una proprietà dei livelli della gerarchia con cofinalità non numerabile

1 Proprietà della gerarchia di Von Neumann

Proposizione 1.1. *Siano x e y due insiemi, e sia α un ordinale. Se $x \subseteq y \in V_\alpha$, allora $x \in V_\alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α.

- $\underline{\alpha = 0}$: Vera a vuoto.

- $\underline{\alpha + 1 \text{ successore}}$: $x \subseteq y \in V_{\alpha+1} \Rightarrow x \subseteq y \in \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow x \subseteq y \subseteq V_\alpha \Rightarrow x \subseteq V_\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow x \in V_{\alpha+1}$.

- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se $x \subseteq y \in V_\lambda$, allora esiste un ordinale $\gamma < \lambda$ tale che $y \in V_\gamma$. Per ipotesi induttiva, $x \subseteq y \in V_\gamma$ implica $x \in V_\gamma$, e dunque $x \in V_\lambda$.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 1.2. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di insiemi, e sia α un ordinale tale che $\mathfrak{F} \in V_\alpha$. Allora, $\bigcup \mathfrak{F} \in V_\alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α.

- $\underline{\alpha = 0}$: Vera a vuoto.
- $\underline{\alpha + 1 \text{ successore}}$: Sappiamo che $V_{\alpha+1}$ è transitivo, cioè $X \in \mathfrak{F} \in V_{\alpha+1}$ implica $X \in V_{\alpha+1}$. Per come sono definite le gerarchie, ciò implica che $X \subseteq V_\alpha$. Ora, se $y \in X \subseteq V_\alpha$, chiaramente $y \in V_\alpha$, e dunque $\bigcup \mathfrak{F} \subseteq V_\alpha$, da cui segue $\bigcup \mathfrak{F} \in V_{\alpha+1}$.
- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se $\mathfrak{F} \in V_\lambda$, allora per definizione esiste un ordinale $\gamma < \lambda$ tale che $\mathfrak{F} \in V_\gamma$, e quindi per ipotesi induttiva $\bigcup \mathfrak{F} \in V_\gamma \subset V_\lambda$, che implica $\bigcup \mathfrak{F} \in V_\lambda$.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

2 Chiusura transitiva di un insieme

Definizione 2.1 (Chiusura transitiva)**.** *Sia A un insieme. Allora, la chiusura transitiva di A, $TC(A)$, è il minimo insieme transitivo che contiene A.*

Proposizione 2.1. *Per ogni insieme A, esiste la sua chiusura transitiva $TC(A)$.*

Dimostrazione. Usando la ricorsione numerabile e l'assioma di rimpiazzamento, definiamo la successione

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = \bigcup A_n \end{cases}$$

E definiamo $X = \bigcup_{n<\omega} A_n$. Mostriamo che $X = TC(A)$.
Innanzitutto, X è transitivo, dato che se $x \in y \in X$, allora esiste $n \in \omega$ tale che $y \in A_n$, da cui $x \in A_{n+1}$ per costruzione, e dunque $x \in \bigcup_{n<\omega} A_n = X$. Facciamo vedere che X è minimale (per contenimento) tra gli insiemi transitivi che contengono A; sia Y un insieme transitivo che contiene A.
Lo faremo provando che per ogni $n \in \omega$ vale $A_n \subseteq Y$, per induzione su n.

- $\underline{n = 0}$: Vero per ipotesi.
- $\underline{n + 1 \text{ successore}}$: Per ipotesi induttiva, $A_n \subseteq Y$; dato che Y è transitivo, allora anche $\bigcup A_n = A_{n+1} \subseteq Y$.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 2.2. *Sia A un insieme, e sia α un ordinale. Se $A \in V_\alpha$, allora $TC(A) \in V_\alpha$.*

Dimostrazione. $\square$

3 Equivalenza dell'assioma di fondazione e dell'assenza di $\in$-catene discendenti

Proposizione 3.1. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *Assioma di fondazione*

2. *Per ogni insieme X, non esistono $\in$-catene discententi infinite in X.*

Dimostrazione.

- $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Se per assurdo esistesse un insieme X contenente una $\in$-catena discendente, sia essa $C = x_0 \ni x_1 \ni \dots$, allora C sarebbe un controesempio per l'assioma di fondazione, dato che banalmente per ogni $c \in C$, $c \cap C \neq \emptyset$.

- $\underline{(2) \Rightarrow (1)}$: Se per assurdo esistesse $x \neq \emptyset$ tale che per ogni $t \in x$, $t \cap x \neq \emptyset$, potremmo fissare una funzione di scelta f per $\mathcal{P}(x)$ e un elemento $a \in x$, definendo per ricorsione numerabile la successione

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n \cap x) \end{cases}$$

ottenendo così una $\in$-catena discendente infinita.

$\square$

4 Sulla cardinalità dei livelli della gerarchia di Von Neumann

Proposizione 4.1. *Sia α un ordinale. Allora, $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α:

- $\underline{\alpha = 0}$: Abbiamo mostrato a lezione che $|V_\omega| = \aleph_0 = \beth_0$, in quanto unione numerabile filtrante di insiemi finiti.

- $\underline{\alpha + 1 \text{ successore}}$: $|V_{\omega+(\alpha+1)}| = |V_{(\omega+\alpha)+1}| = |\mathcal{P}(V_{\omega+\alpha})| = 2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}$

- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, allora

$$|V_{\omega+\lambda}| = |\bigcup_{\gamma<\lambda} V_{\omega+\gamma}| \leq \sum_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma = \max\{|\lambda|, \beth_\lambda\} = \beth_\lambda$$

Inoltre, dato che per ogni $\gamma < \lambda$ vale $|V_{\omega+\lambda}| \geq |V_{\omega+\gamma}| = \beth_\gamma$, allora $|V_{\omega+\lambda}| \geq \beth_\lambda$. Si conclude, usando il teorema di Cantor-Bernstein, che $|V_{\omega+\lambda}| = \beth_\lambda$.

$\square$

5 Minimi livelli della gerarchia che contengono gli insiemi numerici

In questo esercizio, vogliamo trovare i minimi livelli della gerarchia in cui si trovano gli insiemi numerici $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proposizione 5.1. *I minimi livelli cercati sono:*

1. $\mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$
2. $\mathbb{Q} \in V_{\omega+2}$
3. $\mathbb{R} \in V_{\omega+3}$
4. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in V_{\omega+5}$

Dimostrazione. Ricordiamo come sono definiti gli insiemi di cui trattiamo: $\mathbb{Z}$ è un quoziente di $\omega \times \omega$, $\mathbb{Q}$ un quoziente di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e per $\mathbb{R}$ usiamo la costruzione canonica fatta con i tagli di Dedekind di $\mathbb{Q}$, dato che è quella meno "costosa" da questo punto di vista.

1. Dato che $\omega \in V_{\omega+1}$, per un esercizio che si trova più avanti sappiamo che $\omega \times \omega \in V_{\omega+1}$. Dunque, $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\omega \times \omega) \in V_{\omega+2}$, che per la proposizione 1.1 implica $\mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$.

2. Dato che $\mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$, abbiamo che anche $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$. Ripetendo lo stesso ragionamento di cui sopra, otteniamo che $\mathbb{Q} \in V_{\omega+2}$.

3. Per costruire $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$, abbiamo fatto ricorso alla costruzione canonica data dai tagli di Dedekind. Alla fine della costruzione, si riesce ad affermare che $\mathbb{R}$ coincide con l'insieme dei tagli di Dedekind di $\mathbb{Q}$, contenuto in $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Ora, sappiamo che $\mathbb{Q} \in V_{\omega+2}$, e dato che $\omega + 2$ non è un ordinale limite, $V_{\omega+2}$ non soddisfa l'assioma delle parti, e dunque non possiamo dire che $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \in V_{\omega+2}$. Tuttavia, senza dubbio $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \in V_{\omega+3}$[1], e quindi $\mathbb{R} \in V_{\omega+3}$.

4. Per poter avere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come oggetto dell'universo, dato che $V_{\omega+3}$ non è chiuso per prodotto cartesiano, dobbiamo andare almeno in $V_{\omega+4}$; tuttavia, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup \mathbb{R})) \in V_{\omega+5}$, dato che nemmeno $V_{\omega+4}$ soddisfa l'assioma delle parti. Per la proposizione 1.1, concludiamo che $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in V_{\omega+5}$.

La minimalità dei livelli trovati segue piuttosto facilmente dalla costruzione, le verifiche sono semplici e non le riportiamo. $\square$

[1] È semplice mostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ si ottiene come unione di singoletti contenuti in $\mathbb{Q} \subseteq V_{\omega+1}$, ed essendo l'assioma dell'unione soddisfatto da ogni livello non vuoto si ottiene $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq V_{\omega+2}$.

Osservazione 5.1. *Notiamo che, per esempio, la costruzione di* $\mathbb{Z}$ *può essere fatta soltanto a partire da* $V_{\omega+2}$*, dato che* $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$ *è più che numerabile, e dunque non può appartenere a* $V_{\omega+1}$*, il quale contiene soltanto insiemi al più numerabili; tuttavia, la collezione dei rappresentanti canonici delle classi di equivalenza è già un elemento di* $V_{\omega+1}$*. Ciò vale anche per* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*; a seconda che si voglia poter costruire gli insiemi numerici all'interno dell'universo o soltanto averli come oggetti, i risultati di questo esercizio possono essere migliorati, abbassando di* 1 *il livello richiesto.*
In realtà, credo che il risultato principale dell'esercizio sia mostrare che si può costruire quasi tutta la matematica usuale in livelli prossimi a V_ω*.*

6 Una congettura sui livelli della gerarchia

In questo esercizio, ci chiediamo se esistano livelli κ della gerarchia di Von Neumann tali che $|V_\kappa| = \kappa$, e dove ogni insieme ha cardinalità strettamente minore di κ.

Proposizione 6.1. *Sia* κ *un cardinale,* $\kappa > \aleph_0$*. Allora, vale la proprietà di cui sopra se e solo se* κ *è un limite forte.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Rightarrow}$: Necessariamente, perché valga $|V_\kappa| = \kappa$, κ deve essere un limite forte. Infatti, dato che tutti e soli i limiti forti sono i punti fissi della sequenza $\beth$, e che $|V_\kappa| = \beth_\kappa$ per ogni $\kappa > \aleph_0$, si ottiene $|V_\kappa| = \beth_\kappa = \kappa$, cioè κ limite forte.
- $\underline{\Leftarrow}$: Se κ è un limite forte, è un punto fisso della sequenza $\beth$, e quindi $|V_\kappa| = \beth_\kappa = \kappa$. Inoltre, essendo un limite forte chiuso per passaggio al continuo, se $A \in V_\kappa$, allora esiste un ordinale $\gamma < \kappa$ tale che $A \in V_\gamma$, da cui $|A| \leq |V_\gamma| = \beth_\gamma < \beth_\kappa = \kappa = |V_\kappa|$.

Ciò conclude la dimostrazione. □

7 Proprietà dei modelli naturali di ZFC

Proposizione 7.1. *Sia* α *un ordinale.* V_α *soddisfa l'assioma dell'infinito se e solo se* $\alpha > \omega$*.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Rightarrow}$: Sappiamo che $\omega \in V_{\omega+1}$, e che $V_{\omega+1} \subseteq V_\alpha$ per ogni ordinale $\alpha > \omega$. Si conclude per la proposizione 1.1.
- $\underline{\Leftarrow}$: Supponiamo per assurdo che $\alpha \leq \omega$, e che V_α soddisfi l'assioma dell'infinito. Abbiamo due casi: se $\alpha = \omega$, sappiamo che $\omega \notin V_\omega$, dato che ogni ordinale α ha rango $\rho(\alpha) = \alpha$. Essendo ω il minimo insieme infinito, segue che $V_\omega \nvDash Infinito$, assurdo. Se invece $\alpha < \omega$, V_α è finito, e quindi se ω vi appartenesse, avrebbe cardinalità maggiore di quella dell'universo, e questo è assurdo.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Proposizione 7.2. *Sia α un ordinale. V_α soddisfa l'assioma delle parti se e solo se α è limite.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Rightarrow}$: Se $\alpha = \beta + 1$ è successore, l'assioma delle parti non può essere soddisfatto. Infatti, se per assurdo lo fosse, prendiamo $\beta \in V_{\beta+1}$;
allora, $\{\beta\} \subseteq \mathcal{P}(\beta) \in V_{\beta+1}$, che implica $\beta \in V_\beta$, assurdo.
- $\underline{\Leftarrow}$: Se $A \in V_\lambda$, allora esiste $\gamma < \lambda$ tale che $A \in V_\gamma$. Allora, $\mathcal{P}(A) \subseteq V_\gamma$, che implica $\mathcal{P}(A) \in V_{\gamma+1} \subset V_\lambda$, da cui $\mathcal{P}(A) \in V_\lambda$.

□

Proposizione 7.3. *Sia α un ordinale. V_α soddisfa l'assioma di scelta se e solo se α è limite.*

Dimostrazione. Usiamo la formulazione classica di AC: sia X un insieme non vuoto. Allora, esiste una funzione di scelta per X, $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$.
Innanzitutto, osserviamo che una tale funzione di scelta $f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}((\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times X))$.
Pertanto, $V_\alpha \models$ AC se e solo se $V_\alpha \models$ *Parti*, cioè se e solo se α è limite. Per quanto riguarda l'esistenza, basta dire che $V_\alpha \models$ *Separazione*, e dunque $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times X \in V_\alpha$. □

Proposizione 7.4. *Per quali ordinali α valgono le seguenti proprietà?*

1. *Se A, $B \in V_\alpha$, $A \times B \in V_\alpha$*
2. *Se A, $B \in V_\alpha$, $Fun(A, B) \in V_\alpha$*

Dimostrazione.
1. Innanzitutto, se α è un ordinale limite, V_α soddisfa gli assiomi di unione, coppia, parti e separazione, sufficienti a costruire il prodotto cartesiano di due insiemi dell'universo V_α. Se α è della forma $\alpha = \lambda + 1$, con λ limite, la proprietà vale ancora: infatti, dati A,$B \in V_{\lambda+1}$, A,$B \subseteq V_\lambda$, e allora per ogni $a \in A$, $b \in B$ esiste un ordinale $\gamma < \lambda$ tale che a,$b \in V_\gamma$. A questo punto, per definizione di coppia ordinata $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\gamma)) = V_{\gamma+2} \subset V_\lambda$. Dunque, $(a, b) \in V_\lambda$, e in particolare $A \times B \subseteq V_\lambda$, da cui segue che $A \times B \in V_{\lambda+1}$.
Mostriamo adesso che se α è della forma $\beta + 2$ la proprietà smette di valere. Dato $V_\alpha = V_{\beta+2}$, senza dubbio $\beta+1 \in V_{\beta+2}$, ma se valesse $(\beta+1)\times(\beta+1) \in V_{\beta+2}$, che è vero se e solo se $(\beta+1) \times (\beta+1) \subseteq V_{\beta+1}$, allora $(\beta, \beta) \in V_{\beta+1}$. Ma $(\beta, \beta) = \{\{b\}\} \subseteq V_{\beta+1}$, e per transitività varrebbe $\beta \in V_\beta$, assurdo.
2. Siano A,$B \in V_\alpha$. Osserviamo prima di tutto che $Fun(A, B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$, cioè perché un livello della gerarchia possa essere chiuso per funzioni, è necessario che sia chiuso per prodotto cartesiano. Limitiamoci dunque a discutere i casi $\alpha = \lambda$ limite e $\alpha = \lambda + 1$. Se α è limite, V_α soddisfa l'assioma delle parti, e dunque si può costruire $Fun(A, B)$ all'interno dell'universo. Se $\alpha = \lambda + 1$, l'assioma delle parti non è soddisfatto, e dunque potrebbero esistere due insiemi A e $B \in V_{\lambda+1}$ tali che $Fun(A, B) \notin V_{\lambda+1}$.

□

8 Una proprietà dei livelli della gerarchia con cofinalità non numerabile

Proposizione 8.1. *Sia* $\varphi(A, V_\alpha, \aleph_0) =$ "$(A \subseteq V_\alpha \wedge |A| \leq \aleph_0) \Rightarrow A \in V_\alpha$"*. In* V_α*, vale* $\varphi(A, V_\alpha, \aleph_0)$ *se e solo se* $Cof(\alpha) > \aleph_0$.

Dimostrazione. Mostriamo che la proprietà $\varphi(A, V_\alpha, \kappa)$ vale per ogni cardinale $\kappa > \aleph_0$:

- $\underline{\Rightarrow}$: Se per assurdo fosse $Cof\alpha \leq \kappa$, allora posso considerare, se $\alpha = \beta + 1$ è successore, l'insieme $A = \{\beta\}$. A rispetta tutte le richieste, infatti $|A| \leq \kappa$, e $A \subseteq V_{\beta+1}$, dato che $\beta \in V_{\beta+1}$. Dunque, dovrebbe valere che $A = \{\beta\} \in V_{\beta+1}$, da cui $\beta \in V_\beta$, assurdo.
  Se invece $\alpha = \lambda$ limite, Considero un $A \subseteq \lambda$ illimitato, e tale che $|A| = Cof\lambda \leq \kappa$. Dato che vale $A \subseteq \lambda \subseteq V_\lambda$, e quindi $A \subseteq V_\lambda$, per ipotesi dovrebbe valere $A \in V_\lambda$. Dato che $V_\lambda \models Unione$, $\bigcup A = \sup_{\gamma \in A} \gamma = \lambda \in V_\lambda$, e questo è assurdo.

- $\underline{\Leftarrow}$: Se $Cof\alpha > \kappa$, necessariamente α è limite, dato che se fosse successore, $\alpha = \beta+1$, $\{\beta\}$ sarebbe un insieme illimitato in α, e dunque $Cof\alpha = 1$. Sia ora A tale che $A \subseteq V_\alpha$, e $|A| \leq \kappa$. Definiamo, per ogni $a \in A$, $\delta_a := \min\{\beta < \alpha | a \in V_\beta\}$; per rimpiazzamento, dall'esistenza della mappa $a \mapsto \delta_a$ segue l'esistenza di $\Delta = \{\delta_a | a \in A\}$. A questo punto, mettiamo insieme i pezzi: vale che $|\Delta| \leq |A| \leq \kappa$, e dunque Δ è limitato in α, sia $\delta = \sup \Delta$. δ è tale che $\delta_a \leq \delta < \alpha$ per ogni $a \in A$, pertanto $a \in V_{\delta_a} \subseteq V_\delta$ implica $A \subseteq V_\delta$, cioè $A \in V_{\delta+1} \subset V_\alpha$.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 12

Enrico Berni, 582049

24/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti due risultati sull'esponenziazione dei cardinali limite, lasciati per esercizio in data 22/05/2020.

Vogliamo capire come si comportano gli esponenziali di cardinali limite, e per farlo dividiamo il problema in due casi: se κ è il nostro cardinale limite, e ν è l'esponente, si ha che $\nu < Cof\kappa$ o $\nu \geq Cof\kappa$.

1 $\nu < Cof\kappa$

Proposizione 1.1. *Se κ è un cardinale limite e $\nu < Cof\kappa$ è un cardinale, allora $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa}\{\mu^\nu\}$.*

Dimostrazione. Banalmente, $\kappa^\nu \geq \eta := \sup_{\mu<\kappa}\{\mu^\nu\}$; mostriamo l'altra disuguaglianza. Dato che $\nu < Cof\kappa$, ogni funzione $f : \nu \longrightarrow \kappa$ è limitata, e dunque $Fun(\nu, \kappa) = \bigcup_{\gamma<\kappa} Fun(\nu, \gamma)$. Dunque,

$$\kappa^\nu = |\bigcup_{\gamma<\kappa} Fun(\nu, \gamma)| \leq \sum_{\gamma<\kappa} |\gamma|^\nu \leq \sum_{\gamma<\kappa} \eta = \kappa \cdot \eta = \eta$$

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

2 $\nu \geq Cof\kappa$

Proposizione 2.1. *Se κ è un cardinale limite e $\nu \geq Cof\kappa$ è un cardinale, allora $\kappa^\nu = (\sup_{\mu<\kappa}\{\mu^\nu\})^{Cof\kappa}$.*

Dimostrazione. Consideriamo κ come $\kappa = \sup_{i<Cof\kappa}\{\kappa_i\}$[1], con i κ_i debolmente crescenti e per ogni $i < Cof\kappa$ vale $\kappa_i < \kappa$. Allora, vale che

$$(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu)^{Cof\kappa} = (\sup_{i<Cof\kappa} \kappa_i^\nu)^{Cof\kappa} = \prod_{i<Cof\kappa} k_i^\nu = \left(\prod_{i<Cof\kappa} k_i\right)^\nu = ((\sup_{i<Cof\kappa} \kappa_i)^{Cof\kappa})^\nu = \kappa^\nu$$

Abbiamo usato la crescenza debole dei κ_i per applicare la formula del prodotto infinito, altrimenti non valida. $\square$

[1] Consideriamo κ dunque come estremo superiore dell'insieme delle immagini di ogni cardinale κ_i secondo la $Cof\kappa$-sequenza, che sappiamo essere illimitata per definizione, e dunque l'uguaglianza è ben posta.