Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 1

Enrico Berni, 582049

01/03/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Coppia ordinata di Kuratowski, buona definizione
2. Ordine totale di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con l'ordine della minima differenza
3. Ordine totale di $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, con l'ordine della massima differenza
4. Forme equivalenti dell'assioma della scelta
5. Cardinalità e operazioni fondamentali
6. Operazioni su insiemi numerabili

1 Coppia ordinata di Kuratowski, buona definizione

Dati due insiemi a e b, si dice **coppia** di a e b l'insieme $\{a, b\}$ i cui soli elementi sono a e b. Per l'assioma di estensionalità, si nota che $\{a, b\} = \{b, a\}$. Una coppia **ordinata**, invece, è una coppia tale che la precedente uguaglianza non sia vera. Secondo la definizione data da Kuratowski, una coppia ordinata (a, b) è l'insieme della forma $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Proposizione 1.1. *Per ogni coppia ordinata (a, b), valgono i seguenti fatti:*

1. *Se X è una coppia ordinata, esiste un unico elemento x tale che $x \in A$ per ogni $A \in X$.*
2. *Se $(a, b) = (a, b')$, allora $b = b'$.*
3. *$(a, b) = (a', b')$ se e solo se $a = a'$ e $b = b'$.*

Dimostrazione. 1. Sia X della forma $X = (a, b)$. Allora, si nota che $a \in \{a\}$ e $a \in \{a, b\}$. Ora, se $x \in \{a\}$ e $x \in \{a, b\}$, necessariamente $x = a$, altrimenti varrebbe $x \notin A$, assurdo.

2. Per estensionalità, $(a, b) = (a, b')$ se e solo se hanno gli stessi elementi. Cioè,
   - $\{a\} = \{a\}$ e $\{a, b\} = \{a, b'\} \Rightarrow b = b'$
   - $\{a\} = \{a, b'\}$ e $\{a'\} = \{a, b\} \Rightarrow b = a = b'$.
3. $\Leftarrow$: Se $a = a'$ e $b = b'$, si ha che

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = (a', b')$$

$\Rightarrow$: Supponiamo che valga $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Se $a \neq b$, $\{a\} = \{a'\}$ per estensionalità, e $\{a, b\} = \{a', b'\}$. Sostituendo, si trova che $\{a, b\} = \{a, b'\}$, e dunque sempre per estensionalità $b = b'$. Se invece $a = b$, $\{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$. Cioè, $\{a\} = \{a'\}$, e $\{a\} = \{a', b'\} \rightarrow a = a' = b'$, cioè $a = a'$ e $b = b'$ vale anche in questo caso.

$\square$

2 Ordine totale di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con l'ordine della minima differenza

Definiamo una relazione d'ordine $<$ su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, tale che, date f e $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f < g$ se e solo se $f(k) < g(k)$, dove $k := \min X_{f,g} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq g(n)\}$.

Proposizione 2.1. *La relazione d'ordine $<$ è un ordine totale su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ma non un buon ordine.*

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che $<$ è un ordine parziale su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

- $X_{f,f} = \emptyset$, dunque k come sopra non esiste, e quindi $f \nless f$.
- Se $f < g$, allora $f(k) < g(k) \Rightarrow g(k) \nless f(k) \Rightarrow g \nless f$.
- Siano $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, e siano $k_1 = \min X_{f,g}$ e $k_2 = \min X_{g,h}$. Distinguiamo in tre casi:
  - se $k_1 = k_2 := k$, $f(k) < g(k) < h(k)$, cioè $f < h$.
  - Se $k_1 < k_2$, $f(k_1) < g(k_1) = h(k_1) \Rightarrow f < h$
  - Se $k_1 > k_2$, $f(k_2) = g(k_2) < h(k_2) \Rightarrow f < h$

Mostriamo che vale la tricotomia dell'ordine: siano f e $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; se $f = g$, $X_{f,g} = \emptyset$, che implica $f \nless g \wedge g \nless f$. Se invece $f \neq g$, $X_{f,g} \neq \emptyset$; sia k il minimo di $X_{f,g}$. Abbiamo due casi:

- $f(k) < g(k) \Rightarrow f < g$

- $f(k) > g(k) \Rightarrow g < f$

Resta da dimostrare che $<$ non è un buon ordine. Sia $\langle a_{k,n} \rangle_n$ una successione di successioni di questa forma:

$$a_{k,n} = \begin{cases} 2 & \text{se } n = k \\ 1 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che $\langle a_{k,n} \rangle_n$ abbia minimo, e sia $\langle a_{k,n_0} \rangle$ tale minimo. Allora, vale $\langle a_{n_0+1,k} \rangle_k < \langle a_{n_0,k} \rangle_k$, in quanto $a_{n_0+1,k} = 1$ per $k \leq n_0$, ma $a_{n_0,n_0} = 2 > 1 = a_{n_0+1,n_0}$, e $a_{n_0,k} = a_{n_0+1,k} = 1$ per $k < n_0$. Cioè, usando la notazione di cui sopra, $n_0 = \min X_{\langle a_{n_0,n} \rangle, \langle a_{n_0+1,n} \rangle}$. Ciò implicherebbe che $\langle a_{n_0+1,k} \rangle < \langle a_{n_0,k} \rangle$, assurdo. $\square$

3 Ordine totale di $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, con l'ordine della massima differenza

Prendiamo il sottoinsieme $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definito come

$$Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | \, \exists n_0 \; f(m) = 0 \; \forall m > n_0\}$$

Definiamo una relazione d'ordine $<$ su $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, tale che date f e $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f < g$ se e solo se $f(k) < g(k)$, dove $k := \max X_{f,g} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq g(n)\}$.

Proposizione 3.1. *La relazione d'ordine $<$ è un ordine totale su $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.*

Dimostrazione. Per mostrare che $<$ è effettivamente una relazione d'ordine, si procede come sopra. Mostriamo che vale la tricotomia: se $f = g$, $X_{f,g} = \emptyset$, e non ha massimo. Dunque, $f \nless g \wedge g \nless f$. Se invece $f \neq g$, $X_{f,g} \neq \emptyset$, ed è limitato superiormente. Sia ora $k = \max X_{f,g}$: se $f(k) < g(k)$, vale $f < g$, mentre se $f(k) > g(k)$, vale $g < f$. $\square$

4 Forme equivalenti dell'assioma di scelta

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti.

Definizione 4.1. *(Funzione di scelta) Una funzione*

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$$

si dice ***funzione di scelta per*** $\mathcal{F}$ *se, per ogni* $A \in \mathcal{F}$, $f(A) \in A$.

Definizione 4.2. *(Insieme selettore) Sia* $\mathcal{F}$ *una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. Si dice* ***insieme di scelta*** *o* ***insieme selettore*** *per* $\mathcal{F}$ *un insieme* Y *tale che, per ogni* $A \in \mathcal{F}$, $|A \cap Y| = 1$.

L'assioma di scelta dice che

Assioma 1. *(di scelta) Sia* $\langle A_i | i \in I \rangle$ *una* I*-sequenza infinita di insiemi. Allora,*

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

.

Esistono numerose formulazioni equivalenti dell'assioma della scelta. Di seguito ne elenchiamo alcune e ne dimostriamo l'equivalenza.

1. AC
2. Ogni famiglia non vuota di insiemi non vuoti ammette una funzione di scelta
3. Ogni insieme $A \neq \emptyset$ ammette una funzione di scelta

$$f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$$

4. Ogni famiglia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ di insiemi disgiunti a due a due ammette un selettore
5. Ogni funzione suriettiva ammette un'inversa destra
6.

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} F_{i,f(i)}$$

Proposizione 4.1. *I fatti sopraelencati (1)-(6) sono tra loro equivalenti.*

Dimostrazione. Lo schema dimostrativo seguito è

$$(AC) \rightarrow (2) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (AC) \leftrightarrow (6), \ (2) \leftrightarrow (3)$$

- $(AC) \to (2)$: Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. Se $\mathcal{F}$ è finita, si procede per induzione sulla cardinalità. Sia $n = |\mathcal{F}|$.
  - $n = 0$: La proprietà è vera a vuoto
  - $n \to \hat{n}$: Se $|\mathcal{F}| = n + 1$, scrivo $\mathcal{F}$ come $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \{X\}$, con $|\mathcal{F}'| = n$. Per $\mathcal{F}'$ esiste dunque una funzione di scelta f', che si può estendere a funzione di scelta per $\mathcal{F}$ ponendo
  $$f_{|\mathcal{F}'} = f', \; f(X) \in X$$

  Se invece $\mathcal{F}$ è infinita, considero $\prod_{A\in\mathcal{F}} A$. Posso indicizzare $\mathcal{F}$ usando la funzione identità: la I-sequenza $\langle A_i | i \in I \rangle$ è non vuota, e ogni A_i è non vuoto. Dunque, per (AC) esiste $f \in \prod_{i\in I} A_i$. Tale f è per definizione una funzione di scelta per $\mathcal{F}$, dato che $f(i) \in A_i$, e quindi $f(A_i) \in A_i$.

- $(2) \to (3)$: Basta notare che, se $A \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, e quindi per (2) ammette una funzione di scelta.

- $(3) \to (4)$: Consideriamo $\bigcup \mathcal{F}$: dal momento che gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti, $\mathcal{F}$ è una partizione di $\bigcup \mathcal{F}$, e dunque $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F})$. Dato che $\bigcup \mathcal{F}$ è non vuoto, esiste per (3) una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$. Costruiamo il selettore utilizzando la f: per definizione, $f(A) \in A$ per ogni $A \in F$ (osserviamo che la funzione è ben definita peché gli elementi di $\mathcal{F}$ sono disgiunti a due a due). L'insieme $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} f(A) = Imf$ è per costruzione un selettore per $\mathcal{F}$.

- $(4) \to (5)$: Sia $f : A \longrightarrow B$ surgettiva, e sia $X = \{f^{-1}(\{b\}) | b \in B\}$. Innanzitutto, sappiamo che X esiste per l'assioma di separazione, e dato che f è una funzione surgettiva, X è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, disgiunti a due a due. Allora, X ammette un selettore Y. Definiamo ora
  $$g : B \longrightarrow A$$
  $$b \longmapsto a'$$
  dove $a' := f^{-1}(\{b\}) \cap Y$. Mostriamo che $f \circ g = id_B$. $f \circ g(\{b\}) = f(a') = \{b\}$.

- $(5) \to (AC)$: Sia $\langle A_i | i \in I \rangle$ una I-sequenza infinita di insiemi non vuoti, e $\forall a \in \bigcup_{i\in I}$ considero $X_a = \{i \in I | a \in A_i\}$. Posto $X = \{X_a \times \{a\} | a \in \bigcup_{i\in I} A_i\}$, che esiste per l'assioma di separazione, $X_a \times \{a\} \in \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i\in I} A_i)$. La funzione $f : \bigcup X \longrightarrow I, (i, a) \longmapsto i$ è surgettiva, e ha quindi un'inversa destra g. Definiamo dunque $g' : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i, i \longmapsto a'$, dove a' è la seconda componente di $g(i)$, cioè $a' = \bigcup((\bigcup(g(i)) \setminus \{i\})$. Inoltre, $g' \in \prod_{i\in I} A_i$.

- $(AC) \leftrightarrow (6)$: Mostriamo una freccia per volta.
  $\Rightarrow$: Considero I e J infiniti, altrimenti si procede per induzione sulla cardinalità in modo simile a quanto visto sopra.

- $\subseteq$: Fissata una coppia di indici (i,j), si ha che $a \in \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j}$ se e solo se $\forall i \exists j \ a \in A_{i,j}$. Usando (AC), ne scegliamo uno in particolare. Prendiamo dunque $a \in \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j}$, e per ogni $i \in I$ sia $X_i = \{j \in J | a \in A_{i,j}\}$. $\langle X_i | i \in I\rangle$ è una I-sequenza infinita di insiemi non vuoti, dunque per (AC) esiste $f \in \prod_{i\in I} X_i$; ora, si osserva che $f \in J^I$, e $a \in \bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$. Segue la tesi.
- $\supseteq$: Se $a \in \bigcup_{f\in J^I}\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$, ciò significa che esiste $f \in J^I$ tale che $\forall i \in I$ vale $a \in A_{i,f(i)}$. Dunque, $a \in \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in I} A_{i,j}$ per quanto detto sopra.

$\Leftarrow$: Sia $\langle A_i | i \in I\rangle$ una I-sequenza infinita di insiemi non vuoti, e sia $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Consideriamo la $(I \times X)$-sequenza

$$g : (I \times X) \longrightarrow \{A_i | i \in I\} \cup \{\emptyset\}$$

$$(i,x) \longmapsto \begin{cases} X & \text{se } x \in A_i \\ \emptyset & \text{se } x \notin A_i \end{cases}$$

Da (6), si ottiene che

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{x\in X} g(i,x) = \bigcup_{f\in X^I}\bigcap_{i\in I} g(i,f(i))$$

Notare che il LHS è non vuoto (è proprio X), e quindi anche RHS è non vuoto. Pertanto, esiste $f : I \longrightarrow X$ tale che $\forall i \in I$ vale $g(i,f(i)) \neq \emptyset$, cioè $f(i) \in A_i$. Tale f è quindi una funzione di scelta per $\langle A_i | i \in I\rangle$.

□

5 Cardinalità e operazioni fondamentali

Proviamo le due seguenti proposizioni:

Proposizione 5.1. *Siano A e B due insiemi, e A' e B' due insiemi tali che $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$. Valgono i seguenti fatti:*

1. $|A \sqcup B| = |A' \sqcup B'|$
2. $|A \times B| = |A' \times B'|$
3. $|B^A| = |B'^{A'}|$
4. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$

Dimostrazione. Siano $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ due bigezioni.

1. La funzione
$$\phi : A \sqcup B \longrightarrow A' \sqcup B'$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$
è bigettiva, dato che è unione disgiunta di due funzioni bigettive con immagini disgiunte.

2. La funzione
$$\phi : A \times B \longrightarrow A' \times B'$$
$$(a,b) \longmapsto (f(a), g(b))$$
è bigettiva. Infatti, la funzione $A' \times B' \ni (a', b') \mapsto (f^{-1}(a'), g^{-1}(b')) \in A \times B$ è la sua inversa.

3. La funzione
$$\phi : B^A \longrightarrow B'^{A'}$$
$$\psi \longmapsto g \circ \psi \circ f^{-1}$$
è bigettiva. Verifichiamolo esibendo un'inversa:
$$\Gamma : B'^{A'} \longrightarrow B^A$$
$$\psi' \longmapsto g^{-1} \circ \psi' \circ f$$
è l'inversa cercata.

4. La funzione
$$\phi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A')$$
$$B \longmapsto f[B] = \{f(b) | b \in B\}$$
è bigettiva.

□

Proposizione 5.2. *Siano A e B due insiemi, e A' e B' due insiemi tali che $|A| \leq |A'|$ e $|B| \leq |B'|$. Valgono i seguenti fatti:*

- $|A \sqcup B| \leq |A' \sqcup B'|$
- $|A \times B| \leq |A' \times B'|$
- $|Fun(A,B)| \leq |Fun(A',B')|$
- $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(A')|$

Dimostrazione. La dimostrazione fatta sopra è valida anche se f e g sono funzioni iniettive. Infatti, non abbiamo bisogno di ipotesi particolari per esibire inverse sinistre di funzioni iniettive. □

6 Operazioni su insiemi numerabili

Dimostriamo qualche proprietà riguardo a operazioni insiemistiche con insiemi numerabili.

Proposizione 6.1. *L'unione di due insiemi numerabili è numerabile.*

Dimostrazione. Siano A e B i due insiemi in questione. Allora, esistono due funzioni bigettive $\psi : A \longrightarrow 2\mathbb{N}$ e $\phi : B \longrightarrow 2\mathbb{N} - 1$. Inoltre, la loro unione, che si suppone disgiunta per comodità, è in bigezione con l'unione disgiunta $2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N} - 1) = \mathbb{N}$, ed è quindi numerabile. $\square$

Osservazione 6.1. *Con lo stesso procedimento si dimostra che un'unione finita di n insiemi numerabili è numerabile. Per vederlo, basta fare una congruenza modulo n e procedere come sopra.*

Proposizione 6.2. *La funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{1, ..., k\}, \quad n \mapsto n + k$ è bigettiva per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che f è bigettiva esibendo un'inversa. Sia $g : \mathbb{N} \setminus \{1, ..., k\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad m \mapsto m - k$. Mostriamo che le due funzioni sono inverse.

$$(f \circ g)(n) = (n - k) + k = n$$
$$(g \circ f)(n) = (n + k) - k = n$$

Dunque, $f \circ g = id_{\mathbb{N}\setminus\{1,...,k\}}$, e $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$. Le funzioni f e g sono pertanto bigettive. $\square$

Proposizione 6.3. *Sia A numerabile, e sia $F \subset A$ finito. Allora, $A \setminus F$ è numerabile.*

Dimostrazione. Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ due bigezioni. Sia $F' = (g \circ f)[F]$, e sia $x := \min(\pi_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \pi_1(F))$, dove π_1 è la proiezione sulla prima coordinata. Allora, la controimmagine di x secondo π_1 è l'insieme $\{x\} \times \mathbb{N}$, disgiunto da F' per costruzione ed equipotente ad $\mathbb{N}$: tornando indietro, $(f^{-1} \circ g^{-1})[\{x\} \times \mathbb{N}] \subseteq A \setminus F$. Vale allora la seguente catena di disuguaglianze:

$$\aleph_0 = |A| \geq |A \setminus F| \geq |\{x\} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$

Si conclude usando il teorema di Cantor-Bernstein. $\square$

Proposizione 6.4. *Sia A numerabile, e sia F finito e disgiunto da A. Allora, $A \sqcup F$ è numerabile.*

Dimostrazione. Sia $|F| = k$. Se A è numerabile, esiste una bigezione $g : A \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{1, ..., k\}$. Allora, F è in bigezione con $\{1, ..., k\}$. Enumeriamo F, $F = \{x_1, ..., x_n\}$, e definiamo la funzione

$$\phi : A \sqcup F \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a \longmapsto g(a) & \forall a \in A \\ x_i \longmapsto i & \forall x_i \in F \end{cases}$$

Notiamo che la funzione è iniettiva: infatti, è unione disgiunta di funzioni iniettive con immagine disgiunta. Vale dunque la seguente catena di disuguaglianze:

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \geq |A \sqcup F| \geq |A| = \aleph_0$$

Si conclude con il teorema di Cantor-Bernstein. □

Proposizione 6.5. *Sia A un insieme numerabile, e B un insieme tale che $A \Delta B$ sia finito. Allora, B è numerabile.*

Dimostrazione. Scriviamo $A\Delta B$ in due modi diversi:

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Notiamo che $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ per costruzione.
Ora, $|A\Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$. Dato che dev'essere finita, è necessario che entrambi gli addendi del RHS siano finiti. Se B fosse finito, l'intersezione $A \cap B$ sarebbe finita, e dunque l'insieme $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$ sarebbe finito, assurdo. Dunque, B è infinito. Se in particolare B fosse più che numerabile, si avrebbe che $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ sarebbe più che numerabile, in quanto unione di un insieme più che numerabile, $B \setminus A$, e uno numerabile, $A \setminus B$, assurdo. Dunque, B è numerabile. □