Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 10

Enrico Berni, 582049

25/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Cardinalità di operazioni tra ordinali
2. Monotonia della somma infinita di cardinali
3. Proprietà associativa infinita di somma e prodotto di cardinali
4. Proprietà del prodotto infinito di cardinali
5. Forma debole del teorema di König
6. Un prodotto di cardinali strettamente minore dell'esponenziale del sup
7. La cofinalità di un insieme è sempre un cardinale regolare
8. Esistenza di cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità fissata
9. (ZF) Immersione, per ogni insieme A infinito, di $\mathcal{H}(A)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$
10. (ZF) Equipotenza di un cardinale infinito con il prodotto cartesiano di due sue copie, e un semplice corollario
11. Confronto tra cardinalità di un'unione di insiemi e somma della cardinalità degli stessi
12. Caratterizzazione dei limiti forti, e una proprietà

In questo foglio, useremo molto spesso il termine "cardinale" per indicare un cardinale infinito.

1 Cardinalità di operazioni tra ordinali

Proposizione 1.1. *Siano α e β due ordinali infiniti. Allora, vale che $|\alpha+\beta| = |\alpha\cdot\beta| = |\exp(\alpha,\beta)| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$*

Dimostrazione.

1. Sappiamo che $\alpha+\beta$ è equipotente all'unione disgiunta di due insiemi di cardinalità rispettivamente $|\alpha|$ e $|\beta|$, da cui segue la tesi.

2. Per induzione transfinita su β:

   - $\underline{\beta = 0}$: La tesi è vera a vuoto.
   - $\underline{\beta+1 \text{ successore}}$: Se β è finito, la tesi è vera a vuoto. Altrimenti, per definizione $\alpha\cdot(\beta+1) = \alpha\cdot\beta+\alpha$, e dal punto precedente si ottiene $|\alpha\cdot(\beta+1)| = \max\{|\alpha\cdot b|,|\alpha|\}$. Per ipotesi induttiva, $|\alpha\cdot\beta| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$, e dunque $|\alpha\cdot(\beta+1)| = \max\{|\alpha|,|\beta+1|\}$, dove l'uguaglianza segue dal fatto che $|\beta| = |\beta+1|$, dato che β è infinito.
   - $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite,

   $$|\alpha\cdot\lambda| = |\bigcup_{\gamma<\lambda}\alpha\cdot\gamma| \leq^{1} \max\{|\lambda|,\sup_{\gamma<\lambda}\{\max\{|\alpha|,|\gamma|\}\}\} = \max\{|\alpha|,|\lambda|\}$$

   L'altra disuguaglianza è ovvia.

3. Per induzione transfinita su β:

   - $\underline{\beta = \omega}$: La tesi è vera a vuoto.
   - $\underline{\beta+1 \text{ successore}}$: Se β è finito, la tesi è vera a vuoto. Altrimenti, per definizione, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^{\beta}\cdot\alpha$, e quindi $|\alpha^{\beta+1}| = |\alpha^{\beta}\cdot\alpha| = \max\{|\alpha^{\beta}|,|\beta|\} = \max\{|\alpha|,\max\{|\alpha|,|\beta|\}\} = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$ per ipotesi induttiva.
   - $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite,

   $$|\alpha^{\lambda}| = |\bigcup_{\gamma<\lambda}\alpha^{\gamma}| \leq^{2} \max\{|\lambda|,\sup_{\gamma<\lambda}\{\max\{|\alpha|,|\gamma|\}\}\} = \max\{|\alpha|,|\lambda|\}$$

   L'altra disuguaglianza è ovvia.

$\square$

[1] Ho usato il teorema delle somme infinite di cardinali, purtroppo non avevo altre idee...
[2] Ho usato sempre lo stesso teorema

2 Monotonia della somma infinita di cardinali

Proposizione 2.1. *Siano $\langle\kappa_i\rangle$ e $\langle\mu_i\rangle$ due I-sequenze di cardinali, tali che per ogni i valga $\kappa_i \leq \mu_i$. Allora, $\sum_{i\in I}\kappa_i \leq \sum_{i\in I}\mu_i$.*

Dimostrazione. Siano $\langle A_i\rangle$ e $\langle B_i\rangle$ due I-sequenze di insiemi (che supponiamo disgiunti per semplicità) tali che $|A_i| = \kappa_i$ e $|B_i| = \mu_i$ per ogni i. Per l'assioma della scelta esiste una I-sequenza di funzioni iniettive $\langle f_i : A_i \longrightarrow B_i\rangle$. Definiamo una funzione

$$\phi : \bigsqcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} B_i$$

$$a \longmapsto f_j(a)$$

dove $j \in I$ è l'indice tale che $a \in A_j$. La ϕ è unione disgiunta di funzioni iniettive a due a due compatibili, e dunque è iniettiva. $\square$

Proposizione 2.2. *Sia κ un cardinale infinito, e sia $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ una I-sequenza di insiemi disgiunti, tale che $|I| \leq \kappa$ e per ogni i, $|A_i| \leq \kappa$. Allora, $|\bigsqcup_{i\in I} A_i| \leq \kappa$.*

Dimostrazione. Si ha che

$$|\bigsqcup_{i\in I} A_i| \leq \sum_{i<\kappa}\kappa = \max\{\kappa,\kappa\} = \kappa$$

La tesi segue immediatamente. $\square$

3 Proprietà associativa infinita di somma e prodotto di cardinali

Proposizione 3.1. *Sia $\langle\kappa_i | i \in I\rangle$ una I-sequenza di cardinali, e sia $\langle I_j | j \in J\rangle$ una partizione di I. Allora, $\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{j\in J}(\sum_{i\in I_j}\kappa_i)$.*

Dimostrazione. Sia $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ una I-sequenza di insiemi, tali che per ogni i, $|A_i| = \kappa_i$. Per la proprietà associativa dell'unione, data una partizione $\langle I_j\rangle_{j\in J}$ di I,

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{j\in J}\left(\bigsqcup_{i\in I_j} A_i\right)$$

Chiaramente l'uguaglianza passa alle cardinalità, e dunque segue che

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = |\bigsqcup_{i\in I} A_i| = |\bigsqcup_{j\in J}\left(\bigsqcup_{i\in I_j} A_i\right)| = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j}\kappa_i\right)$$

Come richiesto. $\square$

Proposizione 3.2. *Sia $\langle \kappa_i | i \in I \rangle$ una I-sequenza di cardinali, e sia $\langle I_j | j \in J \rangle$ una partizione di I. Allora, $\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} \kappa_i)$.*

Dimostrazione. Si procede come sopra: sebbene il prodotto tra insiemi non sia associativo strettamente parlando, associare i termini di un prodotto di insiemi conserva comunque le cardinalità. Procedendo come sopra, otteniamo che

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = |\prod_{i \in I} A_i| = |\prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I_j} A_i \right)| = \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I_j} \kappa_i \right)$$

□

4 Proprietà del prodotto infinito di cardinali

Proposizione 4.1. *Sia κ un cardinale, e sia $\langle \mu_i \rangle_{i \in I}$ una I-sequenza di cardinali. Allora, valgono le seguenti proprietà:*

1. $\prod_{i \in I} \kappa = \kappa^{|I|}$
2. $\prod_{i \in I} \kappa^{\mu_i} = \kappa^{\sum \mu_i}$
3. $(\prod_{i \in I} \mu_i)^{\kappa} = \prod_{i \in I} (\mu_i^{\kappa})$

Dimostrazione.

1. Segue direttamente dalle definizioni di prodotto infinito di cardinali e di esponenziazione cardinale.

2. Il prodotto $\prod_{i \in I} \kappa^{\mu_i}$ corrisponde alla cardinalità dell'insieme $\prod_{i \in I} Fun(\mu_i, \kappa)$, che a sua volta è uguale, data una I-sequenza di insiemi $\langle A_i | i \in I \rangle$ disgiunti a due a due e tali che per ogni i valga $|A_i| = \mu_i$, alla cardinalità dell'insieme $\prod_{i \in I} Fun(A_i, \kappa)$. Ora, considero la funzione

$$\phi : \prod_{i \in I} Fun(A_i, k) \longrightarrow Fun\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i, \kappa \right)$$

$$\langle f_i | i \in I \rangle \longmapsto \bigsqcup_{i \in I} f_i$$

dove ogni f_i è una funzione di dominio A_i e codominio κ. La funzione ϕ è bigettiva[3]; per la definizione di somma cardinale ed esponenziale cardinale,

$$|Fun\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right)| = \kappa^{\sum \mu_i}$$

Ciò conclude la dimostrazione.

[3]La mappa che manda una funzione nella I-sequenza delle sue restrizioni è chiaramente l'inversa

3. Vale la seguente catena di ugugaglianze:

$$\prod_{i\in I}(\mu_i)^\kappa = ((\sup_{i\in I}\mu_i)^{|I|})^\kappa = (\sup_{i\in I}\mu_i)^{|I|\cdot\kappa} = (\sup_{i\in I}\mu_i)^{\kappa\cdot|I|} = (\sup_{i\in I}\mu_i^\kappa)^{|I|} = \prod_{i\in I}(\mu_i^\kappa)^4$$

□

5 Forma debole del teorema di König

Proposizione 5.1. *Siano $\langle\kappa_i\rangle$ e $\langle\mu_i\rangle$ due I-sequenze di cardinali tali che $\kappa_i < \mu_i$ per ogni i. Allora, $\sum_{i\in I}\kappa_i \leq \prod_{i\in I}\mu_i$.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1, posso dominare la somma $\sum_{i\in I}\kappa_i$ con la somma $\sum_{i\in I}\mu_i$. Abbiamo visto a lezione che $\sum_{i\in I}\mu_i \leq \prod_{i\in I}\mu_i$.

$$\sum_{i\in I}\kappa_i \leq \sum_{i\in I}\mu_i \leq \prod_{i\in I}\mu_i$$

Segue la tesi. □

6 Un prodotto di cardinali strettamente minore dell'esponenziale del sup

Proposizione 6.1. *Esistono una sequenza di cardinali $\langle\kappa_i\rangle$ non decrescente ed un ordinale infinito α tali che $\prod_{i<\alpha}\kappa_i < (\sup\kappa_i)^{|\alpha|}$.*

Dimostrazione. Consideriamo $\alpha = \omega + 1$, e la successione $\langle\kappa_i|i\in\omega+1\rangle$ tali che $\kappa_\omega = 2$, e $\kappa_i = 1$ per ogni $i\in\omega$. Allora,

$$\prod_{i\in\omega+1}\kappa_i = 2$$

$$(\sup_{i\in\omega+1}\kappa_i)^{|\omega+1|} = 2^{\aleph_0}$$

□

[4] Dove la penultima disuguaglianza segue dal fatto che il *sup* e l'esponenziazione cardinale preservano le disuguaglianze

7 La cofinalità di un insieme è sempre un cardinale regolare

Proposizione 7.1. *Sia X un insieme totalmente ordinato. Allora, $Cof(X)$ è un cardinale regolare, cioè $Cof(Cof(X)) = Cof(X)$.*

Dimostrazione. Per definizione, $Cof(X)$ è un cardinale; proviamone la regolarità. Per definizione di cofinalità, vale $Cof(Cof(X)) \leq Cof(X)$; inoltre, se $A \subseteq Cof(X)$ è illimitato, con $|A| = Cof(Cof(X))$ e $f : Cof(X) \longrightarrow X$ è una funzione strettamente crescente e illimitata, allora $f_{|A} : A \longrightarrow X$ è ancora illimitata, e dunque $Cof(Cof(X)) = |A| \geq Cof(X)$, da cui segue la tesi. $\square$

8 Esistenza di cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità fissata

Proposizione 8.1. *Sia ν un cardinale regolare. Allora, esistono cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità ν, ossia per ogni cardinale μ esiste un cardinale $\kappa > \mu$ tale che $Cof(\kappa) = \nu$.*

Dimostrazione. Sia $\mu > \nu$ un cardinale maggiore di ν. Consideriamo l'<u>ordinale</u> somma $\mu + \nu$: sappiamo che, essendo ν un cardinale, in particolare è un ordinale limite, e dunque anche $\mu + \nu$ lo è. È anche vero che $Cof(\mu + \nu) = \nu$, dato che l'insieme $\{\mu + \alpha | \alpha \in \nu\}$ è illimitato in $\mu + \nu$. Preso adesso il cardinale $\aleph_{\mu+\nu}$, abbiamo che $\aleph_{\mu+\nu} \geq \mu + \nu$ per un fatto noto, e che, essendo indicizzato su un ordinale limite, $Cof \aleph_{\mu+\nu} = Cof(\mu + \nu) = \nu$. Ora, dato che cerchiamo una disuguaglianza stretta, abbiamo due casi:

- Se $\aleph_{\mu+\nu} > \mu + \nu = \mu$ (come cardinali), abbiamo finito.
- Se invece $\aleph_{\mu+\nu} = \mu$ (ancora come cardinali), allora considero $\aleph_{\omega_{\mu+\nu}}$ e ripeto il ragionamento, ottenendo questa volta una disuguaglianza stretta.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

9 (ZF) Immersione, per ogni insieme A infinito, di $\mathcal{H}(A)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$

Proposizione 9.1. *Sia A un insieme infinito. Allora, $|\mathcal{H}(A)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))|$.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione ϕ nel modo seguente:

$$\phi : \mathcal{H}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$$

$$\alpha \longmapsto \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) | \forall x \in X \ (x \text{ è ben ordinato } \wedge ot(x) = \alpha)\}$$

La ϕ è iniettiva, dato che due ordinali con lo stesso order type (isomorfi) sono uguali. Ciò conclude la dimostrazione. □

10 (ZF) Equipotenza di un cardinale infinito con il prodotto cartesiano di due sue copie, e un semplice corollario

Proposizione 10.1. *Sia κ un cardinale infinito. Allora, $|\kappa \times \kappa| = |\kappa|$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita forte su κ. Supponiamo che per ogni ordinale $\alpha < \kappa$ valga la proprietà $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$. Definiamo un buon ordine su $\kappa \times \kappa$ nel seguente modo:

$$(\alpha, \beta) <' (\gamma, \delta) \leftrightarrow \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee (\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha, \beta) <'' (\gamma, \delta))$$

Dove $<''$ è l'ordine lessicografico. Notiamo che una coppia della forma (α, β) non può avere più di $(\max(\alpha, \beta) + 1) \cdot (\max(\alpha, \beta) + 1) = (\max(\alpha, \beta) + 1)$ elementi che la precedono in $(\kappa \times \kappa, <')$, e dunque che $ot(\kappa \times \kappa, <') \leq \kappa$, che implica $|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$. Dato che l'altra uguaglianza è ovvia, si conclude usando il teorema di Cantor-Bernstein. □

Corollario 10.0.1. *Sia κ un cardinale infinito. Allora, $|\mathfrak{F}(\kappa)| = |Seq(\kappa)| = \kappa$.*

Dimostrazione. La stessa proprietà è stata dimostrata (senza usare l'assioma della scelta) per ogni insieme X per cui valga $|X \times X| = |X|$. Dalla proposizione di cui sopra segue la tesi. □

11 Confronto tra cardinalità di un'unione di insiemi e somma della cardinalità degli stessi

Proposizione 11.1. *Sia $\langle X_i \rangle_{i \in I}$ una I-sequenza di insiemi. Allora, $|\bigcup_{i \in I} X_i| \leq \sum_{i \in I} |X_i|$. In particolare, se I è totalmente ordinato e l'unione è filtrante per ogni i, vale l'uguaglianza.*

Dimostrazione. Mostriamo che, data una I-sequenza di insiemi $\langle X_i | i \in I \rangle$, l'unione $\bigcup_{i \in I} X_i$ ha cardinalità minore o uguale a quella dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$. Definiamo una mappa suriettiva[5]

$$\phi : \bigsqcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}) \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

[5] In sostanza la mappa definita sarebbe l'unione disgiunta delle proiezioni canoniche

$$(x,j) \longmapsto x$$

Usando la scelta, abbiamo che esiste un'inversa destra iniettiva della ϕ, e dunque abbiamo quello che volevamo far vedere.
Adesso, abbiamo che

$$|\bigcup_{i\in I} X_i| \leq |\bigsqcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})| = \sum_{i\in I} |(X_i \times \{i\})| = \sum_{i\in I} |X_i|$$

Segue la tesi. □

12 Caratterizzazione dei limiti forti, e una proprietà

Proposizione 12.1. *Sia κ un cardinale. κ è limite forte se e solo se, per ogni $\nu < \kappa$, vale $2^\nu < \kappa$.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Rightarrow}$: Segue dalla definizione di limite forte.
- $\underline{\Leftarrow}$: Siano ν e μ due cardinali minori di κ. Allora, se $\eta = \max\{\nu, \mu\}$, vale che $\mu^\nu \leq \eta^\eta = 2^\eta < \kappa$. Per concludere, banalmente ogni cardinale si realizza come massimo di una coppia di cardinali (per esempio, $\nu = \max\{0, \nu\}$). Ciò conclude la dimostrazione.

□

Proposizione 12.2. *Sia κ un cardinale limite forte. Allora, $\kappa^{Cof\kappa} = 2^\kappa$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che per ogni κ, vale $\kappa^{Cof\kappa} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$. Mostriamo che per un cardinale limite forte vale anche l'altra disuguaglianza.
Presa una sequenza di cardinali $\langle \kappa_i | i \in Cof\kappa \rangle$, dove per ogni i vale $\kappa_i < \kappa$, e $\kappa = \sum_{i\in Cof\kappa} \kappa_i$[6], vale

$$2^\kappa = 2^{\sum \kappa_i} = \prod_{i\in Cof\kappa} \kappa_i = (\sup_{i\in Cof\kappa} 2^{\kappa_i})^{Cof\kappa} \leq \kappa^{Cof\kappa}$$

Dato che, essendo κ un limite forte, per quanto detto sopra $2^{\kappa_i} < \kappa$ per ogni $\kappa_i < \kappa$. Ciò conclude la dimostrazione. □

[6] $Cof\kappa$ è il minimo cardinale per cui si verifica questa richiesta