Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 11

Enrico Berni, 582049

31/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Proprietà della gerarchia di Von Neumann
2. Chiusura transitiva di un insieme
3. Equivalenza dell'assioma di fondazione e dell'assenza di $\in$-catene discendenti infinite
4. Sulla cardinalità dei livelli della gerarchia di Von Neumann
5. Minimi livelli della gerarchia che contengono gli insiemi numerici
6. Una congettura sui livelli della gerarchia
7. Proprietà dei modelli naturali di ZFC
8. Una proprietà dei livelli della gerarchia con cofinalità non numerabile

1 Proprietà della gerarchia di Von Neumann

Proposizione 1.1. *Siano x e y due insiemi, e sia α un ordinale. Se $x \subseteq y \in V_\alpha$, allora $x \in V_\alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α.

- $\underline{\alpha = 0}$: Vera a vuoto.
- $\underline{\alpha + 1 \text{ successore}}$: $x \subseteq y \in V_{\alpha+1} \Rightarrow x \subseteq y \in \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow x \subseteq y \subseteq V_\alpha \Rightarrow x \subseteq V_\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow x \in V_{\alpha+1}$.
- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se $x \subseteq y \in V_\lambda$, allora esiste un ordinale $\gamma < \lambda$ tale che $y \in V_\gamma$. Per ipotesi induttiva, $x \subseteq y \in V_\gamma$ implica $x \in V_\gamma$, e dunque $x \in V_\lambda$.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Proposizione 1.2. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di insiemi, e sia α un ordinale tale che $\mathfrak{F} \in V_\alpha$. Allora, $\bigcup \mathfrak{F} \in V_\alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α.

- $\underline{\alpha = 0}$: Vera a vuoto.
- $\underline{\alpha + 1 \text{ successore}}$: Sappiamo che $V_{\alpha+1}$ è transitivo, cioè $X \in \mathfrak{F} \in V_{\alpha+1}$ implica $X \in V_{\alpha+1}$. Per come sono definite le gerarchie, ciò implica che $X \subseteq V_\alpha$. Ora, se $y \in X \subseteq V_\alpha$, chiaramente $y \in V_\alpha$, e dunque $\bigcup \mathfrak{F} \subseteq V_\alpha$, da cui segue $\bigcup \mathfrak{F} \in V_{\alpha+1}$.
- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se $\mathfrak{F} \in V_\lambda$, allora per definizione esiste un ordinale $\gamma < \lambda$ tale che $\mathfrak{F} \in V_\gamma$, e quindi per ipotesi induttiva $\bigcup \mathfrak{F} \in V_\gamma \subset V_\lambda$, che implica $\bigcup \mathfrak{F} \in V_\lambda$.

Ciò conclude la dimostrazione. □

2 Chiusura transitiva di un insieme

Definizione 2.1 (Chiusura transitiva)**.** *Sia A un insieme. Allora, la chiusura transitiva di A, $TC(A)$, è il minimo insieme transitivo che contiene A.*

Proposizione 2.1. *Per ogni insieme A, esiste la sua chiusura transitiva $TC(A)$.*

Dimostrazione. Usando la ricorsione numerabile e l'assioma di rimpiazzamento, definiamo la successione

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = \bigcup A_n \end{cases}$$

E definiamo $X = \bigcup_{n<\omega} A_n$. Mostriamo che $X = TC(A)$.
Innanzitutto, X è transitivo, dato che se $x \in y \in X$, allora esiste $n \in \omega$ tale che $y \in A_n$, da cui $x \in A_{n+1}$ per costruzione, e dunque $x \in \bigcup_{n<\omega} A_n = X$. Facciamo vedere che X è minimale (per contenimento) tra gli insiemi transitivi che contengono A; sia Y un insieme transitivo che contiene A.
Lo faremo provando che per ogni $n \in \omega$ vale $A_n \subseteq Y$, per induzione su n.

- $\underline{n = 0}$: Vero per ipotesi.
- $\underline{n + 1 \text{ successore}}$: Per ipotesi induttiva, $A_n \subseteq Y$; dato che Y è transitivo, allora anche $\bigcup A_n = A_{n+1} \subseteq Y$.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Proposizione 2.2. *Sia A un insieme, e sia α un ordinale. Se $A \in V_\alpha$, allora $TC(A) \in V_\alpha$.*

Dimostrazione. □

3 Equivalenza dell'assioma di fondazione e dell'assenza di $\in$-catene discendenti

Proposizione 3.1. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *Assioma di fondazione*

2. *Per ogni insieme X, non esistono $\in$-catene discententi infinite in X.*

Dimostrazione.

- $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Se per assurdo esistesse un insieme X contenente una $\in$-catena discendente, sia essa $C = x_0 \ni x_1 \ni \dots$, allora C sarebbe un controesempio per l'assioma di fondazione, dato che banalmente per ogni $c \in C$, $c \cap C \neq \emptyset$.

- $\underline{(2) \Rightarrow (1)}$: Se per assurdo esistesse $x \neq \emptyset$ tale che per ogni $t \in x$, $t \cap x \neq \emptyset$, potremmo fissare una funzione di scelta f per $\mathcal{P}(x)$ e un elemento $a \in x$, definendo per ricorsione numerabile la successione

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n \cap x) \end{cases}$$

ottenendo così una $\in$-catena discendente infinita.

$\square$

4 Sulla cardinalità dei livelli della gerarchia di Von Neumann

Proposizione 4.1. *Sia α un ordinale. Allora, $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α:

- $\underline{\alpha = 0}$: Abbiamo mostrato a lezione che $|V_\omega| = \aleph_0 = \beth_0$, in quanto unione numerabile filtrante di insiemi finiti.

- $\underline{\alpha + 1 \text{ successore}}$: $|V_{\omega+(\alpha+1)}| = |V_{(\omega+\alpha)+1}| = |\mathcal{P}(V_{\omega+\alpha})| = 2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}$

- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, allora

$$|V_{\omega+\lambda}| = |\bigcup_{\gamma<\lambda} V_{\omega+\gamma}| \leq \sum_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma = \max\{|\lambda|, \beth_\lambda\} = \beth_\lambda$$

Inoltre, dato che per ogni $\gamma < \lambda$ vale $|V_{\omega+\lambda}| \geq |V_{\omega+\gamma}| = \beth_\gamma$, allora $|V_{\omega+\lambda}| \geq \beth_\lambda$. Si conclude, usando il teorema di Cantor-Bernstein, che $|V_{\omega+\lambda}| = \beth_\lambda$.

$\square$

5 Minimi livelli della gerarchia che contengono gli insiemi numerici

In questo esercizio, vogliamo trovare i minimi livelli della gerarchia in cui si trovano gli insiemi numerici $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proposizione 5.1. *I minimi livelli cercati sono:*

1. $\mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$
2. $\mathbb{Q} \in V_{\omega+2}$
3. $\mathbb{R} \in V_{\omega+3}$
4. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in V_{\omega+5}$

Dimostrazione. Ricordiamo come sono definiti gli insiemi di cui trattiamo: $\mathbb{Z}$ è un quoziente di $\omega \times \omega$, $\mathbb{Q}$ un quoziente di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e per $\mathbb{R}$ usiamo la costruzione canonica fatta con i tagli di Dedekind di $\mathbb{Q}$, dato che è quella meno "costosa" da questo punto di vista.

1. Dato che $\omega \in V_{\omega+1}$, per un esercizio che si trova più avanti sappiamo che $\omega \times \omega \in V_{\omega+1}$. Dunque, $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\omega \times \omega) \in V_{\omega+2}$, che per la proposizione 1.1 implica $\mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$.

2. Dato che $\mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$, abbiamo che anche $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \in V_{\omega+2}$. Ripetendo lo stesso ragionamento di cui sopra, otteniamo che $\mathbb{Q} \in V_{\omega+2}$.

3. Per costruire $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$, abbiamo fatto ricorso alla costruzione canonica data dai tagli di Dedekind. Alla fine della costruzione, si riesce ad affermare che $\mathbb{R}$ coincide con l'insieme dei tagli di Dedekind di $\mathbb{Q}$, contenuto in $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Ora, sappiamo che $\mathbb{Q} \in V_{\omega+2}$, e dato che $\omega + 2$ non è un ordinale limite, $V_{\omega+2}$ non soddisfa l'assioma delle parti, e dunque non possiamo dire che $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \in V_{\omega+2}$. Tuttavia, senza dubbio $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \in V_{\omega+3}$[1], e quindi $\mathbb{R} \in V_{\omega+3}$.

4. Per poter avere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come oggetto dell'universo, dato che $V_{\omega+3}$ non è chiuso per prodotto cartesiano, dobbiamo andare almeno in $V_{\omega+4}$; tuttavia, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup \mathbb{R})) \in V_{\omega+5}$, dato che nemmeno $V_{\omega+4}$ soddisfa l'assioma delle parti. Per la proposizione 1.1, concludiamo che $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in V_{\omega+5}$.

La minimalità dei livelli trovati segue piuttosto facilmente dalla costruzione, le verifiche sono semplici e non le riportiamo. □

[1] È semplice mostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ si ottiene come unione di singoletti contenuti in $\mathbb{Q} \subseteq V_{\omega+1}$, ed essendo l'assioma dell'unione soddisfatto da ogni livello non vuoto si ottiene $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq V_{\omega+2}$.

Osservazione 5.1. *Notiamo che, per esempio, la costruzione di $\mathbb{Z}$ può essere fatta soltanto a partire da $V_{\omega+2}$, dato che $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$ è più che numerabile, e dunque non può appartenere a $V_{\omega+1}$, il quale contiene soltanto insiemi al più numerabili; tuttavia, la collezione dei rappresentanti canonici delle classi di equivalenza è già un elemento di $V_{\omega+1}$. Ciò vale anche per $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; a seconda che si voglia poter costruire gli insiemi numerici all'interno dell'universo o soltanto averli come oggetti, i risultati di questo esercizio possono essere migliorati, abbassando di 1 il livello richiesto.*
In realtà, credo che il risultato principale dell'esercizio sia mostrare che si può costruire quasi tutta la matematica usuale in livelli prossimi a V_ω.

6 Una congettura sui livelli della gerarchia

In questo esercizio, ci chiediamo se esistano livelli κ della gerarchia di Von Neumann tali che $|V_\kappa| = \kappa$, e dove ogni insieme ha cardinalità strettamente minore di κ.

Proposizione 6.1. *Sia κ un cardinale, $\kappa > \aleph_0$. Allora, vale la proprietà di cui sopra se e solo se κ è un limite forte.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Rightarrow}$: Necessariamente, perché valga $|V_\kappa| = \kappa$, κ deve essere un limite forte. Infatti, dato che tutti e soli i limiti forti sono i punti fissi della sequenza $\beth$, e che $|V_\kappa| = \beth_\kappa$ per ogni $\kappa > \aleph_0$, si ottiene $|V_\kappa| = \beth_\kappa = \kappa$, cioè κ limite forte.
- $\underline{\Leftarrow}$: Se κ è un limite forte, è un punto fisso della sequenza $\beth$, e quindi $|V_\kappa| = \beth_\kappa = \kappa$. Inoltre, essendo un limite forte chiuso per passaggio al continuo, se $A \in V_\kappa$, allora esiste un ordinale $\gamma < \kappa$ tale che $A \in V_\gamma$, da cui $|A| \leq |V_\gamma| = \beth_\gamma < \beth_\kappa = \kappa = |V_\kappa|$.

Ciò conclude la dimostrazione. □

7 Proprietà dei modelli naturali di ZFC

Proposizione 7.1. *Sia α un ordinale. V_α soddisfa l'assioma dell'infinito se e solo se $\alpha > \omega$.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Rightarrow}$: Sappiamo che $\omega \in V_{\omega+1}$, e che $V_{\omega+1} \subseteq V_\alpha$ per ogni ordinale $\alpha > \omega$. Si conclude per la proposizione 1.1.
- $\underline{\Leftarrow}$: Supponiamo per assurdo che $\alpha \leq \omega$, e che V_α soddisfi l'assioma dell'infinito. Abbiamo due casi: se $\alpha = \omega$, sappiamo che $\omega \notin V_\omega$, dato che ogni ordinale α ha rango $\rho(\alpha) = \alpha$. Essendo ω il minimo insieme infinito, segue che $V_\omega \not\models Infinito$, assurdo. Se invece $\alpha < \omega$, V_α è finito, e quindi se ω vi appartenesse, avrebbe cardinalità maggiore di quella dell'universo, e questo è assurdo.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Proposizione 7.2. *Sia α un ordinale. V_α soddisfa l'assioma delle parti se e solo se α è limite.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Rightarrow}$: Se $\alpha = \beta + 1$ è successore, l'assioma delle parti non può essere soddisfatto. Infatti, se per assurdo lo fosse, prendiamo $\beta \in V_{\beta+1}$;
allora, $\{\beta\} \subseteq \mathcal{P}(\beta) \in V_{\beta+1}$, che implica $\beta \in V_\beta$, assurdo.
- $\underline{\Leftarrow}$: Se $A \in V_\lambda$, allora esiste $\gamma < \lambda$ tale che $A \in V_\gamma$. Allora, $\mathcal{P}(A) \subseteq V_\gamma$, che implica $\mathcal{P}(A) \in V_{\gamma+1} \subset V_\lambda$, da cui $\mathcal{P}(A) \in V_\lambda$.

□

Proposizione 7.3. *Sia α un ordinale. V_α soddisfa l'assioma di scelta se e solo se α è limite.*

Dimostrazione. Usiamo la formulazione classica di AC: sia X un insieme non vuoto. Allora, esiste una funzione di scelta per X, $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$.
Innanzitutto, osserviamo che una tale funzione di scelta $f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}((\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times X))$.
Pertanto, $V_\alpha \models$ AC se e solo se $V_\alpha \models$ *Parti*, cioè se e solo se α è limite. Per quanto riguarda l'esistenza, basta dire che $V_\alpha \models$ *Separazione*, e dunque $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times X \in V_\alpha$. □

Proposizione 7.4. *Per quali ordinali α valgono le seguenti proprietà?*

1. *Se A, $B \in V_\alpha$, $A \times B \in V_\alpha$*
2. *Se A, $B \in V_\alpha$, $Fun(A, B) \in V_\alpha$*

Dimostrazione.
1. Innanzitutto, se α è un ordinale limite, V_α soddisfa gli assiomi di unione, coppia, parti e separazione, sufficienti a costruire il prodotto cartesiano di due insiemi dell'universo V_α. Se α è della forma $\alpha = \lambda + 1$, con λ limite, la proprietà vale ancora: infatti, dati A,$B \in V_{\lambda+1}$, A,$B \subseteq V_\lambda$, e allora per ogni $a \in A$, $b \in B$ esiste un ordinale $\gamma < \lambda$ tale che a,$b \in V_\gamma$. A questo punto, per definizione di coppia ordinata $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\gamma)) = V_{\gamma+2} \subset V_\lambda$. Dunque, $(a, b) \in V_\lambda$, e in particolare $A \times B \subseteq V_\lambda$, da cui segue che $A \times B \in V_{\lambda+1}$.
Mostriamo adesso che se α è della forma $\beta + 2$ la proprietà smette di valere. Dato $V_\alpha = V_{\beta+2}$, senza dubbio $\beta+1 \in V_{\beta+2}$, ma se valesse $(\beta+1)\times(\beta+1) \in V_{\beta+2}$, che è vero se e solo se $(\beta+1)\times(\beta+1) \subseteq V_{\beta+1}$, allora $(\beta, \beta) \in V_{\beta+1}$. Ma $(\beta, \beta) = \{\{b\}\} \subseteq V_{\beta+1}$, e per transitività varrebbe $\beta \in V_\beta$, assurdo.
2. Siano A,$B \in V_\alpha$. Osserviamo prima di tutto che $Fun(A, B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$, cioè perché un livello della gerarchia possa essere chiuso per funzioni, è necessario che sia chiuso per prodotto cartesiano. Limitiamoci dunque a discutere i casi $\alpha = \lambda$ limite e $\alpha = \lambda + 1$. Se α è limite, V_α soddisfa l'assioma delle parti, e dunque si può costruire $Fun(A, B)$ all'interno dell'universo. Se $\alpha = \lambda + 1$, l'assioma delle parti non è soddisfatto, e dunque potrebbero esistere due insiemi A e $B \in V_{\lambda+1}$ tali che $Fun(A, B) \notin V_{\lambda+1}$.

□

8 Una proprietà dei livelli della gerarchia con cofinalità non numerabile

Proposizione 8.1. *Sia* $\varphi(A, V_\alpha, \aleph_0) =$ *"*$(A \subseteq V_\alpha \wedge |A| \leq \aleph_0) \Rightarrow A \in V_\alpha$*". In* V_α*, vale* $\varphi(A, V_\alpha, \aleph_0)$ *se e solo se* $Cof(\alpha) > \aleph_0$*.*

Dimostrazione. Mostriamo che la proprietà $\varphi(A, V_\alpha, \kappa)$ vale per ogni cardinale $\kappa > \aleph_0$:

- $\underline{\Rightarrow}$: Se per assurdo fosse $Cof\alpha \leq \kappa$, allora posso considerare, se $\alpha = \beta + 1$ è successore, l'insieme $A = \{\beta\}$. A rispetta tutte le richieste, infatti $|A| \leq \kappa$, e $A \subseteq V_{\beta+1}$, dato che $\beta \in V_{\beta+1}$. Dunque, dovrebbe valere che $A = \{\beta\} \in V_{\beta+1}$, da cui $\beta \in V_\beta$, assurdo.
  Se invece $\alpha = \lambda$ limite, Considero un $A \subseteq \lambda$ illimitato, e tale che $|A| = Cof\lambda \leq \kappa$. Dato che vale $A \subseteq \lambda \subseteq V_\lambda$, e quindi $A \subseteq V_\lambda$, per ipotesi dovrebbe valere $A \in V_\lambda$. Dato che $V_\lambda \models Unione$, $\bigcup A = \sup_{\gamma \in A} \gamma = \lambda \in V_\lambda$, e questo è assurdo.

- $\underline{\Leftarrow}$: Se $Cof\alpha > \kappa$, necessariamente α è limite, dato che se fosse successore, $\alpha = \beta+1$, $\{\beta\}$ sarebbe un insieme illimitato in α, e dunque $Cof\alpha = 1$. Sia ora A tale che $A \subseteq V_\alpha$, e $|A| \leq \kappa$. Definiamo, per ogni $a \in A$, $\delta_a := \min\{\beta < \alpha | a \in V_\beta\}$; per rimpiazzamento, dall'esistenza della mappa $a \mapsto \delta_a$ segue l'esistenza di $\Delta = \{\delta_a | a \in A\}$. A questo punto, mettiamo insieme i pezzi: vale che $|\Delta| \leq |A| \leq \kappa$, e dunque Δ è limitato in α, sia $\delta = \sup \Delta$. δ è tale che $\delta_a \leq \delta < \alpha$ per ogni $a \in A$, pertanto $a \in V_{\delta_a} \subseteq V_\delta$ implica $A \subseteq V_\delta$, cioè $A \in V_{\delta+1} \subset V_\alpha$.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$