Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 12

Enrico Berni, 582049

24/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti due risultati sull'esponenziazione dei cardinali limite, lasciati per esercizio in data 22/05/2020.

Vogliamo capire come si comportano gli esponenziali di cardinali limite, e per farlo dividiamo il problema in due casi: se κ è il nostro cardinale limite, e ν è l'esponente, si ha che $\nu < Cof\kappa$ o $\nu \geq Cof\kappa$.

1 $\nu < Cof\kappa$

Proposizione 1.1. *Se κ è un cardinale limite e $\nu < Cof\kappa$ è un cardinale, allora $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa}\{\mu^\nu\}$.*

Dimostrazione. Banalmente, $\kappa^\nu \geq \eta := \sup_{\mu<\kappa}\{\mu^\nu\}$; mostriamo l'altra disuguaglianza. Dato che $\nu < Cof\kappa$, ogni funzione $f : \nu \longrightarrow \kappa$ è limitata, e dunque $Fun(\nu, \kappa) = \bigcup_{\gamma<\kappa} Fun(\nu, \gamma)$. Dunque,

$$\kappa^\nu = |\bigcup_{\gamma<\kappa} Fun(\nu, \gamma)| \leq \sum_{\gamma<\kappa} |\gamma|^\nu \leq \sum_{\gamma<\kappa} \eta = \kappa \cdot \eta = \eta$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

2 $\nu \geq Cof\kappa$

Proposizione 2.1. *Se κ è un cardinale limite e $\nu \geq Cof\kappa$ è un cardinale, allora $\kappa^\nu = (\sup_{\mu<\kappa}\{\mu^\nu\})^{Cof\kappa}$.*

Dimostrazione. Consideriamo κ come $\kappa = \sup_{i<Cof\kappa}\{\kappa_i\}$[1], con i κ_i debolmente crescenti e per ogni $i < Cof\kappa$ vale $\kappa_i < \kappa$. Allora, vale che

$$(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu)^{Cof\kappa} = (\sup_{i<Cof\kappa} \kappa_i^\nu)^{Cof\kappa} = \prod_{i<Cof\kappa} k_i^\nu = \left(\prod_{i<Cof\kappa} k_i\right)^\nu = ((\sup_{i<Cof\kappa} \kappa_i)^{Cof\kappa})^\nu = \kappa^\nu$$

Abbiamo usato la crescenza debole dei κ_i per applicare la formula del prodotto infinito, altrimenti non valida. □

[1]Consideriamo κ dunque come estremo superiore dell'insieme delle immagini di ogni cardinale κ_i secondo la $Cof\kappa$-sequenza, che sappiamo essere illimitata per definizione, e dunque l'uguaglianza è ben posta.