Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 3

Enrico Berni, 582049

30/03/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Esistenza di dominio e immagine di una relazione
2. Esistenza di insiemi quoziente
3. Esistenza di insiemi di funzioni
4. Esistenza di prodotti cartesiani di sequenze di insiemi
5. Bigezione tra $[0, 1]$ e $(0, 1)$
6. Ordine totale di $(\omega, \in)$
7. Proprietà dei numeri naturali
8. Esempi di naturali non ben definiti
9. Equivalenza del principio del buon ordinamento e della forma debole del principio di induzione
10. Unione di funzioni compatibili è una funzione
11. Forma forte del teorema di ricorsione numerabile

1 Esistenza di dominio e immagine di una relazione

Proposizione 1.1. *Sia R una relazione binaria su $A \times B$. Allora, esistono gli insiemi $DomR$ e ImR.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che $R \subseteq A \times B$, e dunque

$$DomR = \{a | \exists b(a, b) \in R\} \subseteq A$$

$$ImR = \{b | \exists a(a, b) \in R\} \subseteq B$$

Entrambi esistono per l'assioma di separazione. □

2 Esistenza di insiemi quoziente

Proposizione 2.1. *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su A. Allora, esiste l'insieme quoziente $A/\sim$.*

Dimostrazione. Notiamo che, fissato $a \in A$, la classe di equivalenza di a è $[a] = \{a'|a \sim a'\} \subseteq A$, e dunque esiste per separazione. Ora, per ogni a, $[a] \in \mathcal{P}(A)$ che esiste per l'assioma delle parti. Dunque, l'insieme

$$\{U|\exists a \in A \quad U = [a]\} = A/\sim$$

esiste per separazione. □

3 Esistenza di insiemi di funzioni

Proposizione 3.1. *Siano A e B due insiemi. Allora, esiste $B^A = \{f : A \to B|f\ funzione\}$.*

Dimostrazione.

$$B^A = \{f \in \mathcal{P}(A \times B)|\forall a \in A\,\exists! b\,(a,b) \in f\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times B))$$

e dunque esiste per separazione. □

4 Esistenza di prodotti cartesiani di sequenze di insiemi

Proposizione 4.1. *Sia $\langle A_i|i \in I\rangle$ una I-sequenza di insiemi. Allora, esiste $\prod_{i\in I} A_i$.*

Dimostrazione.

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \in Fun(I, \bigcup_{i\in I} A_i)|f(i) \in A_i\} \subseteq Fun(I, \bigcup_{i\in I} A_i)$$

Dunque, il prodotto esiste per separazione. □

5 Bigezione tra $[0, 1]$ e $(0, 1)$

Proposizione 5.1. *Vale l'equipotenza $|[0, 1]| = |(0, 1)|$.*

Dimostrazione. Esibiamo una bigezione esplicita tra i due intervalli reali $[0,1]$ e $(0,1)$: consideriamo i due insiemi $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $B = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, numerabili perché sottoinsiemi di un insieme numerabile. Stabiliamo due enumerazioni di A e B: $A = \langle a_n | n \in \omega \rangle$, $B = \langle b_n | n \in \omega \rangle$. Definiamo adesso la nostra funzione come

$$f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \notin A \\ b_i & \text{se } x = a_i \text{ per qualche } i \in \omega \end{cases}$$

La f è la bigezione cercata, con inversa

$$g : (0,1) \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \notin B \\ a_i & \text{se } x = b_i \text{ per qualche } i \in \omega \end{cases}$$

□

6 Ordine totale di $(\omega, \in)$

Sia $(X, <)$ un insieme ordinato. Un elemento $x \in X$ si dice **confrontabile** se, per ogni $y \in X$, vale una tra le tre: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

Proposizione 6.1. *Sia* $(\omega, \in)$ *l'insieme dei numeri naturali di Von Neumann, con la relazione di appartenenza canonica.* $(\omega, \in)$ *è totalmente ordinato.*

Dimostrazione. Supponiamo di sapere che la relazione $\in$ è un ordine parziale su ω: mostriamo che ogni elemento di ω è confrontabile secondo $\in$. Sia $p(x)$ la proprietà "x è confrontabile"; dimostriamola per induzione su x.

- $\underline{x = 0}$: $0 \in n$ per ogni $n \in \omega$, per una proposizione dimostrata a lezione.
- $\underline{x \Rightarrow \hat{x}}$: Sappiamo che x è confrontabile; dunque, comunque preso $y \in \omega$, abbiamo tre casi:
  - Se $x = y$, $y \in \{x\}$, e dunque $y \in \hat{x}$.
  - Se $y \in x$, banalmente $y \in \hat{x}$.
  - Se $x \in y$, allora $x \subset y$, e $x \in y$ implica $\hat{x} = y$ o $\hat{x} \in y$.

Vale dunque la tricotomia dell'ordine, che è pertanto un ordine totale. □

7 Proprietà dei numeri naturali

Proposizione 7.1. *Sia ω l'insieme dei numeri naturali di Von Neumann, e siano $x, y \in \omega$ due naturali. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $x \in y$ *se e solo se* $x \subset y$
2. $\hat{x} \in \hat{y} \to x \in y$
3. *Per ogni* $y \in \omega$*, se* $x \in y \in \omega$*, allora* $x \in \omega$
4. $x \cap y$ *è un naturale, e* $x \cap y = \min\{x, y\}$
5. $x \cup y$ *è un naturale, e* $x \cup y = \max\{x, y\}$
6. $\hat{x} = S(x)$*, cioè non esiste* $y \in \omega$ *tale che* $x \in y \in \hat{x}$

Dimostrazione.

1. - $\underline{\Rightarrow}$: $\in$ è transitiva, essendo una relazione d'ordine, quindi $n \in m \to n \subseteq m$: dal momento che $n \in m$ e $m \notin m$, $m \neq n$, e dunque l'inclusione è stretta.
   - $\underline{\Leftarrow}$: Sia $p(m)$="$\forall n \subset m,\ n \in m$": dimostriamola per induzione.
     - $\underline{m = 0}$: $\nexists n\ n \subset \emptyset$, dunque la proposizione è vera a vuoto.
     - $\underline{m \Rightarrow \hat{m}}$: Se $n \subset m$ e $m \notin n$, allora $n \subseteq m$, e si rientra nell'ipotesi induttiva. Altrimenti, se fosse $m \in n$, allora varrebbe che $m \subseteq n$, assurdo.
2. Se $\hat{x} \in y \cup \{y\}$, ci sono due casi: se $\hat{x} = y$, banalmente $x \in y$. Se invece $\hat{x} \in y$, $x \in \hat{x} \in y$.
3. Sia $p(y)$ l'enunciato numero 3: dimostriamolo per induzione su y.
   - $\underline{y = 0}$: La proposizione è vera a vuoto.
   - $\underline{y \to \hat{y}}$: Sia $x \in \hat{y} \in \omega$, allora $x = y$ o $x \in y$. Se $x = y$, allora $x \in \omega$, dato che $y \in \omega$. Se $x \in y$ si conclude per ipotesi induttiva.
4. Sia (WLOG) $x = \min\{x, y\}$. Allora, per il punto (1) vale che $x \subset y$, e quindi $x \cap y = x \in \omega$.
5. Sia (WLOG) $x = \max\{x, y\}$. Allora, per il punto (1) vale che $y \subset x$, e quindi $x \cup y = x \in \omega$.
6. Supponiamo che esista un tale y: allora, dato che $y \in \hat{x}$, abbiamo due casi. Se $y = x$, per l'irriflessività dell'ordine vale $x \notin y$, assurdo; se invece $y \in x$, $x \notin y$ per l'asimmetria dell'ordine, assurdo.

$\square$

8 Esempi di naturali non ben definiti

Proposizione 8.1. *1. L'insieme $X = \{\{\emptyset\}\}$ non è un numero naturale.*

2. L'insieme $Y = \{\emptyset, X\}$ non è un numero naturale.

Dimostrazione. 1. Basta notare che $0 \notin X$, mentre per una proposizione vista a lezione $0 \in n$ per ogni $n \in \omega$.

2. Notiamo che $Y = \{0, \{1\}\}$: dunque, si ha che $\{1\} \in Y$, ma $1 \not\subset Y$. Per quanto detto sopra, ciò è sufficiente a dimostrare che Y non è transitivo e dunque $Y \notin \omega$.

□

9 Equivalenza del principio del buon ordinamento e della forma debole del principio di induzione

Proposizione 9.1. *La forma forte del teorema di induzione è equivalente alla forma debole.*

Dimostrazione. Abbiamo mostrato a lezione che la forma forte del teorema di induzione è equivalente al teorema del buon ordinamento. Mostreremo dunque che il teorema del buon ordinamento implica l'induzione debole, e che l'induzione debole implica quella forte.

- (BO)$\rightarrow$(Ind.D):
  Sia P una proprietà tale che $P(0)$ e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: mostriamo che P vale per ogni $n \in \omega$. Sia $X = \{n \in \omega | \neg P(n)\}$, e supponiamo che non sia vuoto. Allora, per il teorema del buon ordinamento, X ammette un minimo k; innanzitutto, $k \neq 0$, dato che per ipotesi $P(0)$, e quindi k sarà un successore, della forma $n + 1$ per qualche $n \in \omega$. Per ipotesi però, anche $P(n)$ è vera, dato che k è il minimo controesempio, e ciò implica che sia vera anche $P(k)$, e ciò è assurdo. Pertanto, X non ha minimo, e per il principio del buon ordinamento questo implica direttamente che X è vuoto. La tesi segue immediatamente.

- (Ind.D)$\rightarrow$(Ind.F):
  Sia P una proprietà tale che valga $P(0)$ e $(\forall x < y P(x)) \Rightarrow P(y)$. Mostriamo che P è vera per ogni $n \in \omega$. Sia $Y = \{n \in \omega | P(n)\}$; vogliamo mostrare usando l'induzione forte che $Y = \omega$.

  – $0 \in Y$ per ipotesi;

  – Se $n \in Y$, e per ogni $m < n$ vale $P(m)$, in particolare vale anche $P(n)$ per ipotesi, e dunque $n \in Y$ per ogni n successore.

Dato che Y contiene 0, ed è chiuso per successore, per il teorema di induzione debole si conclude che $Y = \omega$, come voluto.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

10 Unione di funzioni compatibili è una funzione

Proposizione 10.1. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni a due a due compatibili. Allora, $F = \bigcup \mathfrak{F}$ è una funzione di dominio $\bigcup_{f\in\mathfrak{F}} Domf$.*

Dimostrazione. Se $(a, b) \in F$, allora esiste $f \in F$ tale che $(a, b) \in f$; se ci fosse una coppia del tipo $(a, b') \in f$, con $b' \neq b$, ovviamente per definizione di funzione $(a, b) \notin f$, ma ciò non escluderebbe l'esistenza di una g tale che $(a, b') \in g$. Tuttavia, dato che le funzioni sono compatibili a due a due, deve valere $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in Domf \cap Domg$. Ciò assicura che F sia una funzione.
Mostriamo adesso una doppia inclusione per far vedere che $DomF = \bigcup_{f\in\mathfrak{F}} Domf$.

- $\subseteq$: Sia $a \in DomF = Dom(\bigcup \mathfrak{F})$: allora, esiste $f \in \mathfrak{F}$ tale che $a \in Domf$, e dunque $a \in \bigcup Domf$.
- $\supseteq$: Viceversa, supponiamo di avere $a \in \bigcup Domf$: allora, esiste $f \in \mathfrak{F}$ tale che $a \in Domf$, e quindi $a \in Dom(\bigcup_{\mathfrak{F}} f) = DomF$.

$\square$

11 Forma forte del teorema di ricorsione numerabile

Teorema 11.1 (di ricorsione numerabile, forma forte). *Sia A un insieme, sia $a \in A$ un suo elemento e sia $g : \omega \times Seq(A) \longrightarrow A$ una funzione. Allora, esiste ed è unica $f : \omega \longrightarrow A$ tale che*

$$\begin{cases} f(0) = a; \\ f(n+1) = g(n, f_{|\{0,\dots,n\}}) \end{cases}$$

Dimostrazione. Mostriamo che le approssimazioni finite (AF) di f sono a due a due compatibili. Se ϕ e ψ fossero due AF non compatibili, sia $k := \min\{i \in \omega | \phi(i) \neq \psi(i)\}$. Innanzitutto osserviamo che $k \neq 0$, dato che per definizione $\phi(0) = \psi(0) = a$. Dunque, $k = m+1$ per qualche $m \in \omega$. Tuttavia, $\phi(m+1) = g(m, \phi_{|\{0,\dots,m\}}) = g(m, \psi_{|\{0,\dots,m\}}) = \psi(m+1)$, assurdo.
Non resta dunque che dimostrare l'esistenza delle AF, per induzione su $p(n) =$"Esiste un'AF $\phi_n : n+1 \to A$".

- $\underline{n=0}$: $\phi : 1 \longrightarrow A$ tale che $\phi(0) = a$ è l'AF cercata.
- $\underline{n \to \hat{n}}$: Se $\phi : n+1 \longrightarrow A$ è AF, anche $\tilde{\phi} = \phi \cup (n+1, g(n, \phi_{|\{0,\dots,n\}}))$ è AF, e $Dom\phi = n+1 \cup \{n+1\} = n+2$.

Adesso, definiamo $f := \bigcup_{\phi \text{AF}} \phi$: f è ben definita, dato che è unione di funzioni a due a due compatibili. Si nota che $f(0) = \phi(0) = a$ per ogni AF ϕ, e che, se ψ è un'AF tale che $n+1 \in Dom\psi$, allora $\psi(n+1) = g(n, \psi_{|\{0,\dots,n\}}) = g(n, f_{|\{0,\dots,n\}}) = f(n+1)$.
Adesso che sappiamo per certo esistere una funzione f come da tesi, mostriamo che è unica per induzione. Siano f e f' due funzioni che estendono le AF a tutto ω: ovviamente vale $f(0) = f'(0) = a$ per definizione; inoltre, si ha anche che

$$f(n+1) = g(n+1, f_{|\{0,\dots,n\}}) = g(n+1, f'_{|\{0,\dots,n\}}) = f'(n+1)$$

Per induzione al secondo ordine, $\{n \in \omega | f(n) = f'(n)\} = \omega$, e quindi $f = f'$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema. $\square$