Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 4

Enrico Berni, 582049

07/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Immersione di ω in insiemi infiniti
2. Operazioni elementari su insiemi finiti
3. Proprietà di relazioni e famiglie finite
4. Proprietà algebriche di PA_{II} come semianello
5. Ogni modello dell'aritmetica di Peano è totalmente ordinato
6. Definizione di somma e prodotto in ω mediante ricorsione numerabile
7. Isomorfismo tra insiemi finiti totalmente ordinati
8. Separabilità di $\mathbb{Z}^\omega$, con l'ordine della minima differenza
9. Esistenza e unicità del completamento di insiemi densi
10. Campi ordinati non completi
11. Operazioni su tagli di Dedekind
12. Una classe di equipotenza non è un insieme

1 Immersione di ω in insiemi infiniti

Proposizione 1.1. *(AC) Sia A un insieme infinito. Allora, esiste una funzione $\phi : \omega \longrightarrow A$ iniettiva.*

Dimostrazione. Dato che A è infinito, è non vuoto. Dunque, per (AC) esiste una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$ tale che $f(B) \in B$ per ogni $B \in \mathcal{P}(A)$. Utilizzando la forma forte del teorema di ricorsione numerabile, definiamo una funzione

$$g : \omega \times Seq(A) \longrightarrow A$$

$$(n, \langle a_i \rangle_{0,...,n}) \longmapsto f(A \setminus \{a_0, ..., a_n\}) := a_{n+1}$$

Tale funzione si estende dunque ad una ed una sola funzione

$$\phi : \omega \longrightarrow A$$

$$n \longmapsto \begin{cases} f(A) & \text{se } n = 0 \\ f(A \setminus \{a_0, ..., a_{n-1}\}) := a_n & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

La ϕ è iniettiva per definizione di funzione di scelta, e dunque segue la tesi. □

2 Operazioni elementari su insiemi finiti

Proposizione 2.1. *Siano A e B due insiemi finiti. Allora,*

1. *$A \sqcup B$ è finito;*
2. *$A \times B$ è finito;*
3. *$\mathcal{P}(A)$ è finito;*
4. *B^A è finito;*

Dimostrazione. Durante tutta la dimostrazione, siano $f : n \to A$ e $g : m \to B$ due bigezioni.

1. Per induzione su n:
   Se $n = 0$, $A \sqcup B = B$, finito per ipotesi.
   Per il passo induttivo, sia $\hat{f} : \hat{n} \longrightarrow A$ bigettiva. Allora, la restrizione $\hat{f}_{|n} : n \longrightarrow A \setminus \{f(n)\} = A'$ è bigettiva; per ipotesi induttiva, si ha che $A' \sqcup B$ è finito. Sia $h : A' \sqcup B \longrightarrow k$ una bigezione, per qualche naturale k; abbiamo due casi possibili:
   - Se $f(n) \in B$, si conclude per ipotesi induttiva.
   - Se $f(n) \notin B$, estendiamo la h a

   $$\hat{h} : A \sqcup B \longrightarrow \hat{k}$$

   $$\begin{cases} \hat{h}_{|A' \sqcup B} = h \\ \hat{h}(f(n)) = k \in \hat{k} \end{cases}$$

   La funzione $\hat{h}$ è bigettiva, e dunque $A \sqcup B$ è finito.

2. Per induzione su n:
   Se $n = 0$, $A \times B = \emptyset$, che è ovviamente finito.
   Per il passo induttivo, basta notare che $|A \times B| = |\hat{n} \times m|$, e $\hat{n} \times m = (n \times m) \sqcup (\{n\} \times m)$. Entrambi gli insiemi sono finiti, uno per ipotesi induttiva, l'altro perché equipotente a B, e quindi la tesi segue dal punto (1).

3. Per induzione su n:
   Se $n = 0$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ovviamente finito.
   Per il passo induttivo, consideriamo la bigezione tra $\hat{n}$ e A: questa induce un'altra bigezione, questa volta tra $\mathcal{P}(\hat{n})$ e $\mathcal{P}(A)$, pertanto ci restringiamo a studiare $\mathcal{P}(\hat{n})$.
   La funzione
   $$\phi : \mathcal{P}(\hat{n}) \longrightarrow \mathcal{P}(n) \times 2$$
   $$C \longmapsto \begin{cases} (C \cap n, 0) & \text{se } n \notin C \\ (C \cap n, 1) & \text{se } n \in C \end{cases}$$
   è bigettiva, con inversa
   $$\tilde{\phi} : \mathcal{P}(n) \times 2 \longrightarrow \mathcal{P}(\hat{n})$$
   $$(C', i) \longmapsto \begin{cases} C' & \text{se } i = 0 \\ C' \cup \{n\} & \text{se } i = 1 \end{cases}$$
   Dunque, $\mathcal{P}(\hat{n})$ è in bigezione con $\mathcal{P}(n) \times 2$, che sappiamo essere finito per il punto (2), dato che $\mathcal{P}(n)$ è finito per ipotesi induttiva e 2 è banalmente finito.

4. Per definizione, ogni funzione $f : A \to B$ è un sottoinsieme di $A \times B$; pertanto, $B^A = \{f : A \to B\}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A \times B)$. L'iniezione canonica ci garantisce che $|B^A| \leq |\mathcal{P}(A \times B)|$, finito per i punti (2) e (3). Dato che un sottoinsieme di un insieme finito è finito, segue la tesi.

$\square$

3 Proprietà di relazioni e famiglie finite

Proposizione 3.1. *Sia R una relazione su un insieme finito $A \times B$. Allora, $DomR$ e ImR sono finiti.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che un sottoinsieme di un insieme finito è finito. Infatti, per definizione $DomR \subseteq A$, e $ImR \subseteq B$, e quindi entrambi sono finiti. $\square$

In particolare, dato che una funzione è una particolare relazione, l'immagine di un insieme finito tramite una funzione è ancora un insieme finito.

Proposizione 3.2. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia finita di insiemi finiti. Allora, $\bigcup \mathfrak{F}$ è un insieme finito.*

Dimostrazione. Per induzione su $n = |\mathfrak{F}|$:
Se $n = 0$, $\mathfrak{F} = \emptyset$, ovviamente finito.
Per il passo induttivo, se $|\mathfrak{F}| = \hat{n}$, considero la bigezione $\phi : \hat{n} \longrightarrow \mathfrak{F}$; la restrizione $\phi_{|n} : n \longrightarrow \mathfrak{F} \setminus \{\phi(n)\} := \mathfrak{F}'$ è ancora bigettiva. Possiamo dunque scrivere $\mathfrak{F}$ come $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' \cup \{\phi(n)\}$. Questa scrittura induce una disintegrazione su $\bigcup \mathfrak{F}$, che si scrive come $\bigcup \mathfrak{F} = \bigcup \mathfrak{F}' \cup \bigcup f(n)$, che è un'unione di insiemi finiti (qui si usa l'ipotesi induttiva), e dunque finita per quanto detto sopra (Proposizione 2.1). □

4 Proprietà algebriche di PA_{II} come semianello

In questa sezione dimostreremo che un modello dell'aritmetica di Peano del secondo ordine è un semianello commutativo con unità.
Durante tutta la dimostrazione, sia $(\mathcal{N}, 0, S, +, \cdot)$ un modello di PA_{II}.

Proposizione 4.1. *Somma e prodotto su $\mathcal{N}$ godono della proprietà associativa. Cioè, per ogni $n, m, k \in \mathcal{N}$ vale $n + (m + k) = (n + m) + k$, e $n(mk) = (nm)k$.*

Dimostrazione. Somma
Per induzione su k:
Se $k = 0$, $n + (m + 0) = n + m = (n + m) + 0$.
Per il passo induttivo, si ha che $n + (m + S(k)) = n + (S(m + k)) = S(n + (m + k)) = S((n + m) + k) = (n + m) + S(k)$.
Prodotto
Per induzione su k:
Se $k = 0$, $n(m \cdot 0) = n \cdot 0 = 0 = (nm) \cdot 0$.
Per il passo induttivo, vale che $n(m \cdot S(k)) = n(mk+m) = n(mk)+nm = (nm)k+nm = (nm) \cdot S(k)$. □

Si è utilizzato in modo pesante la distributività del prodotto rispetto alla somma, dimostrata più avanti.

Dimostriamo adesso tre lemmi che ci aiuteranno nelle dimostrazioni successive:

Lemma 4.1. *Per ogni $n \in \mathcal{N}$, si ha $0 + n = n$.*

Dimostrazione. Per induzione su n:
Se $n = 0$, banalmente $0 + 0 = 0$.
Per il passo induttivo, basta notare che $0 + S(n) = S(0 + n) = S(n)$. □

Lemma 4.2. *Per ogni $n \in \mathcal{N}$, si ha $0 \cdot n = 0$.*

Dimostrazione. Per induzione su n:
Se $n = 0$, banalmente $0 \cdot 0 = 0$.
Per il passo induttivo, basta notare che $0 \cdot S(n) = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0$. $\square$

Lemma 4.3. *Per ogni $m, n \in \mathcal{N}$, vale $S(n) + m = n + S(m)$.*

Dimostrazione. Per induzione su m:
Se $m = 0$, allora $S(n) + 0 = S(n)$ e $n + S(0) = S(n + 0) = S(n)$. Per il passo induttivo, notiamo che $S(n) + S(m) = S(S(n) + m) = S(n + S(m)) = n + S(S(m))$. $\square$

Proposizione 4.2. *Somma e prodotto su $\mathcal{N}$ godono della proprietà commutativa. Cioè, per ogni $n, m \in \mathcal{N}$, vale $n + m = m + n$ e $n \cdot m = m \cdot n$.*

Dimostrazione. Somma
Per induzione su m:
Se $m = 0$, segue da (PA3) e dal Lemma 4.1.
Per il passo induttivo, si ha che $n+S(m) = S(n+m) = S(m+n) = m+S(n) = S(m)+n$ per il Lemma 4.2.
Prodotto
Per induzione su m:
Se $m = 0$, segue da (PA4) e dal Lemma 4.2.
Per il passo induttivo, vale che $n \cdot S(m) = (nm)+n = n+(nm) = n+(mn) = S(m) \cdot n$. $\square$

Anche in questo caso, abbiamo usato la distributività del prodotto rispetto alla somma, che dimostriamo subito.

Proposizione 4.3. *Il prodotto su $\mathcal{N}$ è distributivo rispetto alla somma. Cioè, per ogni $n, m, k \in \mathcal{N}$ vale $n(m + k) = nm + nk$.*

Dimostrazione. Per induzione su k:
Se $k = 0$, allora $n(m + 0) = nm = nm + 0 = nm + n \cdot 0$.
Per il passo induttivo, $n(m + S(k)) = n \cdot S(m + k) = n(m + k) + n = (nm + nk) + n = nm + (nk + n) = nm + n \cdot S(k)$. $\square$

5 Ogni modello dell'aritmetica di Peano è totalmente ordinato

Proposizione 5.1. *Sia $(\mathcal{N}, 0, S, +, \cdot)$ un modello di PA_{II}. $\mathcal{N}$ è totalmente ordinato.*

Dimostrazione. La verifica delle proprietà di relazione d'ordine di $<$ è simile a quella fatta per ω: mostriamo che l'ordine è totale, cioè che comunque presi $n, m \in \mathcal{N}$, vale la tricotomia dell'ordine.
Per induzione su m:

$\underline{m = 0}$: $0 < n$ per ogni $n \in \mathcal{N}$, per definizione di 0.
$\underline{m \Rightarrow S(m)}$: Sappiamo che m è confrontabile; dunque, comunque preso $n \in \mathcal{N}$, abbiamo tre casi: se $m = n$, $n < m + 1$, e dunque $n < S(m)$. Se $n < m$, banalmente $n < S(m)$. Se $m < n$, allora per la definizione di successore vale $n = S(m)$ oppure $S(m) < n$. Ciò conclude la dimostrazione. □

6 Definizione di somma e prodotto in ω mediante ricorsione numerabile

Proposizione 6.1. *È possibile definire somma e prodotto su ω usando il teorema di ricorsione numerabile.*

Dimostrazione.

- Somma: Usando il teorema di ricorsione numerabile, consideriamo la funzione

$$f : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$$
$$(a, b) \longmapsto b + 1$$

Costruiamo adesso la funzione

$$S_n : \omega \longrightarrow \omega$$
$$\begin{cases} S_n(0) = n \\ S_n(\hat{m}) = S_n(m) + 1 \end{cases}$$

È immediato vedere che l'espressione $S_n(m)$ non rappresenta altro che $n+m$. Inoltre, verificare che l'applicazione descritta soddisfi PA-3 è altrettanto immediato.

- Prodotto: Come sopra, consideriamo la funzione

$$g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$$
$$g(a, b) = S_n(b)$$

Costruiamo la funzione

$$P_n : \omega \longrightarrow \omega$$
$$\begin{cases} P_n(0) = 0 \\ P_n(\hat{m}) = S_n(P_n(m)) \end{cases}$$

Verificare che la funzione descritta sopra rispetta PA-4 è immediato.

□

7 Isomorfismo tra insiemi finiti totalmente ordinati

Proposizione 7.1. *Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ due insiemi finiti, equipotenti e totalmente ordinati. Allora, $A \cong B$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che un insieme finito totalmente ordinato è anche ben ordinato. Infatti, se l'ordine è totale, ogni coppia ha un minimo, e per induzione si mostra che questa proprietà vale per ogni sottoinsieme finito.
Dunque, A e B sono insiemi ben ordinati. Sia $|A| = |B| = n$; esistono dunque due bigezioni $\psi : A \longrightarrow n$ e $\phi : n \longrightarrow B$ tali che

$$\begin{cases} a_0 := \min A \longmapsto \emptyset \\ a_{k+1} := \min(A \setminus \{a_0, ..., a_k\}) \longmapsto k+1 \end{cases} \quad e \begin{cases} \emptyset \longmapsto \min B := b_0 \\ k+1 \longmapsto \min(B \setminus \{b_0, ..., b_k\}) := b_{k+1} \end{cases}$$

Le due bigezioni di cui sopra sono in realtà due isomorfismi d'ordine (la verifica è immediata, segue dalla costruzione). La composizione dei due isomorfismi ϕ e ψ è l'isomorfismo cercato. □

8 Separabilità di $\mathbb{Z}^\omega$, con l'ordine della minima differenza

Proposizione 8.1. *Sia $(\mathbb{Z}^\omega, <)$ l'insieme delle funzioni da ω a valori in $\mathbb{Z}$, con l'ordine della minima differenza. $(\mathbb{Z}^\omega, <)$ è separabile.*

Dimostrazione. Mostriamo che l'insieme $X = Fun_0(\omega, \mathbb{Z})$ delle funzioni a supporto finito da ω in $\mathbb{Z}$ è il denso numerabile che cerchiamo.
Innanzitutto, X è numerabile; infatti, $X = \bigcup_{n \in \omega} \mathbb{Z}^n$, e dato che $\mathbb{Z}^n$ è equipotente ad ω per ogni $n \in \omega$, si ha che X è unione numerabile di insiemi numerabili, e dunque è numerabile.
Mostriamo adesso la densità di X: siano $f < g$ due elementi di $\mathbb{Z}^\omega$, e sia $k := \min\{n \in \omega | f(n) \neq g(n)\}$. Per definizione, $f(k) < g(k)$. Posso definire dunque la seguente funzione

$$\phi : \omega \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} f(n) & \text{se } n \leq k \\ f(k+1) + 1 & \text{se } n = k+1 \\ 0 & \text{se } n > k+1 \end{cases}$$

Per costruzione, $f < \phi < g$, e dunque X è denso in $\mathbb{Z}^\omega$. Ciò conclude la dimostrazione. □

9 Esistenza e unicità del completamento di insiemi densi

Proposizione 9.1. *Sia $(P, <)$ un insieme totalmente ordinato, denso e che non ammette massimo né minimo. Allora, esiste un completamento $(\tilde{P}, <)$ in cui P è denso, unico a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{P} = \{\text{Tagli di Dedekind di } P\}$; dimostriamo che $\tilde{P}$ è completo, e che P è denso in $\tilde{P}$. Innanzitutto, identifichiamo un elemento $p \in P$ come $P_p = \{x \in P | x < p\} \in \tilde{P}$, e dotiamo $\tilde{P}$ dell'ordine dell'inclusione, canonico per insiemi di tagli.
Siano ora $X, Y \in \tilde{P}$, tali che $X < Y$. Allora, per definizione esiste un certo $p \in Y \setminus X$, $p \in P$, che induce la catena $X \leq P_p \leq Y$. Tuttavia, $p \notin P_p$, e $p \in Y$; abbiamo dunque due casi: se $X < P_p$, abbiamo finito. Se invece $X = P_p$, dato che Y non ha massimo posso trovare un elemento $p' \in Y \setminus P_p$, e quindi avere la catena $X = P_p < P_{p'} < Y$. Pertanto, P è denso in $\tilde{P}$.
Sia $\Gamma \subseteq \tilde{P}$ superiormente limitato: mostriamo che Γ ammette estremo superiore. Indicizziamo gli elementi di Γ, e consideriamo $Z := \bigcup_{x_i \in \Gamma} \tilde{P}_{x_i}$, e mostriamo che è un taglio: se $p \in Z$, vuol dire che esiste un indice i_0 tale che $p \in \tilde{P}_{x_{i_0}}$, ed essendo $\tilde{P}_{x_{i_0}}$ un taglio, per ogni $q < p$ vale $q \in \tilde{P}_{x_{i_0}} \subseteq Z$, cioè $q \in Z$. Notiamo anche che Z non ha massimo: infatti, se per assurdo fosse $z := \max Z$, si avrebbe che $z \in \tilde{P}_{x_i}$ per qualche i. Essendo $\tilde{P}_{x_i}$ un taglio, in particolare non ammette massimo, e dunque esisterebbe un certo $z' \in \tilde{P}_{x_i} \subseteq Z$ tale che $z' > z$, e questo è contraddittorio. Infine, dato che Γ è limitato superiormente, esiste un certo $X \in \tilde{P}$, $X \neq P$, tale che $\tilde{P}_{x_i} \subseteq X$ per ogni $x_i \in \Gamma$. Allora, $Z \subseteq X \neq P$, e quindi $Z \neq P$ (naturalmente $Z \neq \emptyset$). Pertanto, Z è un taglio.
A questo punto, vogliamo dimostrare che $Z = \sup \Gamma$. Dato che per ogni i, $\tilde{P}_{x_i} \subseteq Z$, $\tilde{P}_{x_i} < Z$ per ogni $x_i \in \Gamma$; Z è dunque un maggiorante di Γ. Comunque preso un altro maggiorante Y, vale che $\tilde{P}_{x_i} \subseteq Y$ per ogni i, e quindi $\bigcup \tilde{P}_{x_i} = Z \subseteq Y$, da cui $Z \leq Y$. Dunque, l'esistenza di un completamento che soddisfi le richieste è garantita: mostriamo che tale completamento è unico a meno di isomorfismo.
Sia $(C, <')$ un altro completamento di P: costruiamo la mappa

$$\Phi : C \longrightarrow \tilde{P}$$

$$c \longmapsto \{x \in P | x <' c\}$$

Notiamo innanzitutto che è ben definita, dato che per definizione di completamento $P \subseteq \tilde{P}$ e $P \subseteq C$. Mostriamo che Φ è un isomorfismo: innanzitutto è iniettiva, dato che se ho $c \neq c \in C$, $c < c'$, esiste $p \in P$ tale che $c < p < c'$, e quindi $p \in \Phi(c') \setminus \Phi(c)$, da cui segue che $\Phi(c') \neq \Phi(c)$. La Φ è anche suriettiva, dato che preso comunque $X \in \tilde{P}$ posso considerare $\bar{x} := \sup\{c \in P | \Phi(c) \subseteq X\}$, che esiste per la completezza di C e $\tilde{P}$. La verifica che $X = \Phi(\bar{x})$ è semplice ma tediosa, e non la riportiamo. Per finire, mostriamo che la Φ

preserva l'ordine: infatti, presi due elementi $a, b \in C$, supponiamo che valga $a <' b$. Per la densità di P, esiste un certo $p_0 \in P$ tale che $a < p_0 < b$; allora, $\Phi(a) = \{p \in P | p <' a\}$, e $\Phi(b) = \{p \in P | p <' b\}$. Si ha che banalmente $\Phi(a) \subseteq \Phi(b)$, e il contenimento è stretto dato che $p_0 \in \Phi(b) \setminus \Phi(a)$. Per definizione quindi $\Phi(a) < \Phi(b)$. Vale quindi $(\tilde{P}, <) \cong (C, <')$, come richiesto. $\square$

10 Campi ordinati non completi

Proposizione 10.1. *Sia $(F, <)$ un campo ordinato senza massimo né minimo. Se $\mathbb{Q}$ non è denso in F, allora F non è completo.*

Dimostrazione. Innanzitutto, osserviamo che se F non è completo, esistono per esempio degli elementi $\xi \in F$ tali che $\xi < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, essendo $\mathbb{Q}$ non denso, esistono due elementi f_1 e $f_2 \in F$ tali che non esista un $q \in \mathbb{Q}$ tale che $f_1 < q < f_2$. Possiamo assumere per esempio $f_1 = 0$, e chiamiamo $f_2 := x$. Consideriamo allora l'insieme $X = \{f \in F | \forall n \in \mathbb{N}\, f < \frac{1}{n}\}$; si nota che $X \neq \emptyset$, dato che $x \in X$. Vogliamo mostrare che X non ammette sup, e dunque F non è completo. Per assurdo, sia $\xi = \sup X$; notiamo che in particolare varrebbe $\xi \in X$, e dunque ξ sarebbe un massimo di X. Infatti, se fosse $\xi \notin X$, dovrebbe valere $\xi \geq \frac{1}{n_0}$ per un certo naturale n_0, e dunque $\frac{1}{2n_0}$ sarebbe un maggiorante di X strettamente minore di ξ, contraddicendo la minimalità di quest'ultimo. Dunque, $\xi \in X$. Ora, è banalmente vero che $2\xi > \xi$, e $2\xi \in X$, dato che se valesse $2\xi \geq \frac{1}{m}$ per un certo $m \in \mathbb{N}$, varrebbe anche $\xi \geq \frac{1}{2m}$, e dunque $\xi \notin X$. Quindi, ξ non è il massimo di X, e questo è assurdo.
Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

11 Operazioni su tagli di Dedekind

Proposizione 11.1. *Siano X e Y due tagli di Dedekind di $\mathbb{Q}$. Allora, l'insieme $X + Y = \{x + y | x \in X\, y \in Y\}$ è un taglio di Dedekind. In particolare, se $X = \mathbb{Q}_p$, $Y = \mathbb{Q}_q$, allora $X + Y = \mathbb{Q}_{p+q}$.*

Dimostrazione. Siano X e Y due tagli come da ipotesi. Se $\alpha \in X + Y$, allora per ogni $\beta < \alpha$, $\beta \in X + Y$. infatti, sia $\alpha = x + y$; allora, $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$, e $\beta = (x - (\alpha - \beta)) + y \in X + Y$, in quanto $x - (\alpha - \beta) \in X$ per definizione. Inoltre, $X + Y$ non ha massimo. Infatti, se fosse per assurdo $z := \max(X + Y)$, si avrebbe che $z = x_0 + y_0$ per certi $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Ma X non ammette massimo, e dunque esiste un certo $x' > x_0 \in X$, e similmente per Y, esiste $y' > y_0 \in Y$. Pertanto, $z' = x' + y' > x + y = z = \max X + Y$. Infine, $X + Y$ è ovviamente diverso da $\emptyset$ e da $\mathbb{Q}$, poiché essendo X e Y limitati, esistono $p \in \mathbb{Q} \setminus X$ e $p' \in \mathbb{Q} \setminus Y$, e dunque $p + p' \notin X + Y$.
Siano adesso $X = \mathbb{Q}_p$, e $Y = \mathbb{Q}_q$: mostriamo che $X + Y = \mathbb{Q}_{p+q}$. Sia $a \in X + Y$; allora

$a = x + y$, con $x < p$, $y < q$. Allora $a < p + q$, e quindi $a \in \mathbb{Q}_{p+q}$. Viceversa, sia $r \in \mathbb{Q}_{p+q}$, ossia $r < p + q$. Posti

$$x = p - \frac{p + q - r}{2} \text{e } y = q - \frac{p + q - r}{2}$$

sia ha che $x < p$, $y < q$ e $r = x + y$. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 11.2. *Sia X un taglio di Dedekind. Allora, $-X$ è un taglio, e $-X + X = \mathbb{Q}_0$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, $-X := \{-p | p \notin X\}$: mostriamo che è un taglio. Innanzitutto, $-X$ non è banale perché X non è banale, e in particolare esistono $p \in -X$ e $p' \notin -X$. Se $x \in -X$, allora $-x \notin X$; sia $y < x$, e mostriamo che $-y \notin X$. Se vale $y < x$, allora $-x < -y$: se $-y$ appartenesse a X, dato che X è un segmento iniziale, avremmo che anche $-x$ vi apparterrebbe, e questo è assurdo. Dunque, $-X$ è un segmento iniziale. Mostriamo che non ammette massimo. Se $-X$ è generato, non ci sono problemi, è un taglio per definizione. Altrimenti, se non è generato, mostriamo che equivalentemente X^{c} non ammette minimo. Se per assurdo fosse $z := \min X^{\mathsf{c}}$, avremmo che $X = \{q \in \mathbb{Q} | q < z\} = \mathbb{Q}_z$, e questo è assurdo.
Mostriamo adesso che $-X + X = \mathbb{Q}_0$. Abbiamo che $-X + X = \{x + y | x \in X, y \in -X\} = \{x + y | x \in X, -y \notin X\} = \{x - y | x \in X, y \notin X\}$. Allora vale che $y > x$, e dunque $x - y < 0 \to x - y \in \mathbb{Q}_0$. Viceversa, se $r \in \mathbb{Q}_0$, considero $x = \sup(X) + r$, e $y = \sup(X)$. Questi due x e y soddisfano le richieste. $\square$

12 Una classe di equipotenza non è un insieme

Proposizione 12.1. *Sia A un insieme non vuoto: la collezione $\Omega_A = \{B | |B| = |A|\}$ non è un insieme.*

Dimostrazione. Fissiamo un elemento $a \in A$: allora, per ogni singoletto $\{x\}$,
$(A \setminus \{a\}) \cup \{x\}$ è equipotente ad A. Se la classe di equipotenza di A fosse un insieme, si avrebbe che anche $\bigcup \Omega_A$ sarebbe un insieme per l'assioma dell'unione, ma ciò è assurdo perché Ω_A conterrebbe l'intero universo V, e dunque sarebbe esso stesso V, che sappiamo non esistere. $\square$