Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 5

Enrico Berni, 582049

14/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Unicità di isomorfismi tra buoni ordini
2. Un sottoinsieme ben ordinato di $\mathbb{R}$ è al più numerabile
3. Somma interna di sottoinsiemi ben ordinati di $\mathbb{R}$
4. Caratterizzazione di buoni ordini isomorfi a ω
5. $ot(\omega)$ è il più piccolo order type infinito
6. Una famiglia di buoni ordini ammette elementi minimali
7. Proprietà della somma di buoni ordini
8. Proprietà del prodotto di buoni ordini
9. Non commutatività del prodotto di buoni ordini
10. Numerabilità delle funzioni a supporto finito da ω in ω
11. Proprietà dell'esponenziazione di buoni ordini
12. Operazioni tra ordini totali isomorfi
13. Unioni finite di insiemi infiniti equipotenti

1 Unicità di isomorfismi tra buoni ordini

Proposizione 1.1. *Siano A e B due buoni ordini. Allora, esiste al più un isomorfismo tra di loro.*

Dimostrazione. Se A e B non sono isomorfi, non ci sono isomorfismi tra di loro. Se invece lo sono, siano $\phi : A \longrightarrow B$ e $\psi : A \longrightarrow B$ due isomorfismi. Allora, $(\psi^{-1} \circ \phi) : A \longrightarrow A$ è un automorfismo di A, e dunque è l'identità. Lo stesso vale per $(\phi \circ \psi^{-1}) : B \longrightarrow B$. Pertanto, per l'unicità dell'inversa bilatera, si ha che $\phi^{-1} = \psi^{-1} \Rightarrow \phi = \psi$. $\square$

2 Un sottoinsieme ben ordinato di $\mathbb{R}$ è al più numerabile

Proposizione 2.1. *(AC) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme ben ordinato di $\mathbb{R}$. Allora, $|A| \leq \aleph_0$.*

Dimostrazione. Consideriamo $x \in A$, $x \neq \max A$, se esiste. Consideriamo $y := \min A \backslash A_x$; vogliamo costruire un'iniezione sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$ e usando l'assioma della scelta: per (AC), esiste una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Definisco la funzione

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \longmapsto f(\mathbb{Q} \cap (x, y))$$

Notiamo che l'applicazione è ben definita perché $\mathbb{Q}$ è denso, e dunque interseca ogni aperto di $\mathbb{R}$. Se esiste, mappiamo $\max A \longmapsto f(\mathbb{Q} \cap (\max A, +\infty))$. La ϕ è chiaramente iniettiva, e dunque $|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. □

3 Somma interna di sottoinsiemi ben ordinati di $\mathbb{R}$

Proposizione 3.1. *Siano A e B due sottoinsiemi ben ordinati di $\mathbb{R}$: allora, l'insieme $A + B = \{a + b | a \in A\, b \in B\}$ è ben ordinato.*

Dimostrazione. Supponiamo che $A+B$ non sia ordinato: allora, esiste $X \subseteq A+B$ che non ammette minimo. Consideriamo allora i due insiemi $X_A = \{a \in A | \, \exists b \in B\, a+b \in X\} \subseteq A$ e $X_B = \{b \in B | \, \exists a \in A\, a+b \in X\} \subseteq B$. Per ipotesi, entrambi ammettono minimo, siano essi $a_0 \in X_A$ e $b_0 \in X_B$. Allora, $a_0 + b_0$ è per costruzione il minimo di X; infatti, ogni elemento di X è somma di elementi di X_A e X_B, somma che per costruzione domina $a_0 + b_0$. Ciò è assurdo, e dunque $A + B$ è ben ordinato. □

4 Caratterizzazione di buoni ordini isomorfi a ω

Proposizione 4.1. *Valgono i seguenti due fatti:*

1. *Un insieme ben ordinato A è isomorfo a ω se e solo se A è infinito ed ogni suo segmento iniziale è finito.*

2. *Un insieme ben ordinato A è isomorfo a ω se e solo se A ogni suo sottoinsieme infinito è privo di massimo.*

Dimostrazione. 1. • $\Rightarrow$: Ovvia.

- $\Leftarrow$: Per tricotomia, se fosse $ot(A) < ot(\omega)$ si avrebbe che $A \cong \omega_n = n$, e ciò sarebbe assurdo perché A è infinito. Altrimenti, se fosse $ot(\omega) < ot(A)$, si avrebbe che $\omega \cong A_x$, ma questo è assurdo perché ogni i segmenti iniziali di A sono finiti e ω è infinito. Dunque, deve essere $ot(\omega) = ot(A)$, e quindi $\omega \cong A$.

2. - $\Rightarrow$: Ovvia.
   - $\Leftarrow$: Se ogni sottoinsieme infinito di A è privo di massimo, ogni segmento iniziale di A è finito. Infatti, se fosse $\omega \subseteq A$, si avrebbe che $\omega \cong A_x$ per qualche $x \in A$. Consideriamo quindi $A_x \cup \{x\} \subseteq A$: esso contiene ω strettamente, e ha massimo (x). Questo è assurdo, e dunque vale che $\omega \cong A$.

□

5 $ot(\omega)$ è il più piccolo order type infinito

Proposizione 5.1. *Sia A un buon ordine infinito. Allora, $ot(\omega) \leq ot(A)$.*

Dimostrazione. Se A è un insieme infinito ben ordinato, definiamo per ricorsione numerabile la successione

$$\begin{cases} a_0 = \min A \\ a_{k+1} = \min(A \setminus \{a_1, ..., a_k\}) \end{cases}$$

La successione definita sopra è iniettiva per costruzione, e dunque $\omega \cong A_x$ per un certo $x \in A$.
Altrimenti, basta notare che ogni segmento iniziale di ω è finito, e quindi A non può essere isomorfo a un segmento iniziale di ω, dato che sono tutti finiti. □

6 Una famiglia di buoni ordini ammette elementi minimali

Proposizione 6.1. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di buoni ordini. Allora, $\mathfrak{F}$ ammette elementi minimali.*

Dimostrazione. Consideriamo $A \in \mathfrak{F}$, e confrontiamolo con tutti gli altri elementi di $\mathfrak{F}$, sfruttando la tricotomia: se $ot(A) \leq ot(B)$ per ogni $B \in \mathfrak{F}$, allora A è l'elemento minimale cercato. Altrimenti, considero $x := \min\{a \in A | \exists B \in \mathfrak{F} \quad B \cong A_a\}$; allora, per proprietà note, A_x è minimale in $\mathfrak{F}$. □

7 Proprietà della somma di buoni ordini

Proposizione 7.1. *Siano A, B e C due insiemi totalmente ordinati. Allora, $(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$.*

Dimostrazione. Costruiamo l'applicazione

$$\phi : (A \oplus B) \oplus C \longrightarrow A \oplus (B \oplus C)$$

$$\begin{cases} ((a,0),0) \\ ((b,1),0) \\ (c,1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (a,0) \\ ((b,0),1) \\ ((c,1),1) \end{cases}$$

La ϕ è bigettiva, dato che ha funzione inversa

$$\psi : A \oplus (B \oplus C) \longrightarrow (A \oplus B) \oplus C$$

$$\begin{cases} (a,0) \\ ((b,0),1) \\ ((c,1),1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} ((a,0),0) \\ ((b,1),0) \\ (c,1) \end{cases}$$

Inoltre, $\phi((0_A,0),0) = (0_A,0)$, e la funzione è crescente per definizione di ordine nell'insieme di arrivo. Dunque, è un isomorfismo d'ordine. □

Proposizione 7.2. *$A \oplus B$ è totalmente ordinato se e solo se A e B sono totalmente ordinati.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Consideriamo (x,i) e $(y,j) \in A \oplus B$: se $i < j$ allora $(x,i) < (y,j)$, e se $j < i$, $(y,j) < (x,i)$. Se invece $i = j$, usando la tricotomia dell'ordine in A e B possiamo dire che x e y sono confrontabili, e dunque lo sono anche in $A \oplus B$.
- $\underline{\Rightarrow}$: Per come è definito l'ordine su $A \oplus B$, i sottoinsiemi $A \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$ sono isomorfi rispettivamente ad A e B, e sono totalmente ordinati perché sottoinsiemi di un ordine totale.

□

Proposizione 7.3. *$A \oplus B$ è ben ordinato se e solo se A e B sono ben ordinati.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Consideriamo $X \subseteq A \oplus B$: allora, se esiste un elemento di X della forma $(a,0)$, esso è minore di ogni altro elemento di X della forma $(b,1)$. Posso dunque considerare gli elementi di $X \cap (A \times \{0\})$. $A \times \{0\}$ ha un ordine isomorfo a quello di A, e dunque ammette minimo. Se invece fosse $X \subseteq B \times \{1\}$, X sarebbe ben ordinato, in quanto sottoinsieme di un buon ordine ($B \times \{1\} \cong B$).
- $\underline{\Rightarrow}$: Per come è definito l'ordine su $A \oplus B$, i sottoinsiemi $A \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$ sono isomorfi rispettivamente ad A e B, e sono ben ordinati perché sottoinsiemi di un buon ordine.

□

8 Proprietà del prodotto di buoni ordini

Proposizione 8.1. *Siano A e B due insiemi totalmente ordinati. Allora,* $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$.

Dimostrazione. Costruiamo la funzione

$$\phi : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

$$((a,b),c) \longmapsto (a,(b,c))$$

La dimostrazione del fatto che ϕ sia un isomorfismo d'ordine ricalca quella fatta in precedenza per la somma. $\square$

Proposizione 8.2. *$A \otimes B$ è totalmente ordinato se e solo se A e B sono totalmente ordinati.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Siano (a,b) e $(a',b') \in A \otimes B$. Allora, b e b' sono confrontabili in B; quindi, se $b < b'$, $(a,b) < (a',b')$, e se $b' < b$, $(a',b') < (a,b)$. Se invece fosse $b = b'$, dalla confrontabilità di a e a' in A si deduce che (a,b) e (a',b) sono confrontabili in $A \otimes B$.

- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo che uno tra A e B non sia totalmente ordinato, sia esso B senza perdita di generalità: allora, esistono due elementi b e b' non confrontabili. Dunque, preso un elemento $a \in A$ le coppie (a,b) e (a,b') non sono confrontabili, assurdo.

$\square$

Proposizione 8.3. *$A \otimes B$ è ben ordinato se e solo se A e B sono ben ordinati.*

Dimostrazione.

- $\underline{\Leftarrow}$: Sia $X \subseteq A \otimes B$; definiamo $X_b = \{b \in B | \exists a \in A \quad (a,b) \in X\} \subseteq B$, e sia b_0 il minimo di X_b. Allora, per ogni (a,b), $b \neq b_0$, $(a,b) > (a',b_0)$ per ogni $a, a' \in A$. Sia ora $X_a = \{a \in A | \exists b \in B \quad (a,b) \in X\} \subseteq A$, e sia $a_0 := \min X_a$. La coppia (a_0, b_0) è il minimo di X per costruzione.

- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo per assurdo che uno tra A e B non sia ben ordinato, supponiamo A senza perdere generalità: allora, esiste un sottoinsieme $X \subseteq A$ tale che X non ammette minimo. Dunque, fissato un $b \in B$ l'insieme $\{(x,b) | x \in X\} \subseteq A \otimes B$ non ammetterebbe minimo, e questo è assurdo.

$\square$

Proposizione 8.4. *Il prodotto tra insiemi totalmente ordinati è distributivo a destra rispetto alla somma: cioè, vale $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che un elemento di $A \otimes (B \oplus C)$ è della forma $(a,(b,0))$ o $(a,(c,1))$, mentre un elemento di $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ è della forma $((a,b),0)$ o $((a,c),1)$.
Consideriamo la mappa

$$\phi : A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$\begin{cases} (a,(b,0)) \\ (a,(c,1)) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} ((a,b),0) \\ ((a,c),1) \end{cases}$$

ϕ è bigettiva, dato che ammette inversa

$$\psi : (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \longrightarrow A \otimes (B \oplus C)$$

$$\begin{cases} ((a,b),0)) \\ ((a,c),1) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} (a,(b,0)) \\ (a,(c,1)) \end{cases}$$

Mostriamo che la ϕ è crescente: siano x e $y \in A \otimes (B \oplus C)$ tali che $x < y$, distinguiamo in tre casi.

- Se $x = (a,(b,0))$ e $y = (a',(b',0))$, possiamo avere che per la definizione di ordine sul prodotto $(b,0) < (b',0) \to b < b'$ oppure $b = b'$ e $a < a'$. Nel primo caso, $\phi(x) = (a,(b,0)) < (a',(b',0)) = \phi(y)$, dato che $0 = 0$ e $b < b'$; nel secondo, ugualmente $\phi(x) < \phi(y)$, dato che $0 = 0$, $b = b'$ ma $a < a'$.

- Se $x = (a,(c,1))$ e $y = (a',(c',1))$, la dimostrazione è analoga.

- Se invece $x = (a,(b,0))$ e $y = (a',(c,1))$, per definizione di ordine anti-lessicografico vale che $\phi(x) = ((a,b),0) < ((a',c),1) = \phi(y)$. Notiamo che questo caso non ammette un caso "speculare" in cui $x = (a,(c,1))$, $(a',(b,0))$ e $x < y$.

Dunque, la ϕ è bigettiva e crescente, ed è pertanto un isomorfismo d'ordine. Ciò conclude la dimostrazione. □

9 Non commutatività del prodotto di buoni ordini

Proposizione 9.1. *Il prodotto tra buoni ordini non è commutativo. In particolare,* $2 \otimes \omega \cong \omega$, *e* $\omega \otimes 2 \cong \omega \oplus \omega$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\phi : 2 \otimes \omega \longrightarrow \omega$$

$$\begin{cases} (0,n) \longmapsto 2n \\ (1,n) \longmapsto 2n+1 \end{cases}$$

Mostriamo che è un isomorfismo d'ordine: innanzitutto, è bigettiva, dato che ammette come inversa

$$\phi^{-1} : \omega \longrightarrow 2 \otimes \omega$$

$$n \longmapsto \begin{cases} (0, \frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ è pari} \\ (1, \frac{n-1}{2}) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Inoltre, è crescente; infatti, presi $(0,n)$ e $(1,n)$ (il caso in cui le seconde coordinate siano diverse è banale per come è definito l'ordine antilessicografico), si ha che $(0,n) < (1,n)$, e $\phi((0,n)) = 2n < 2n+1 = \phi((1,n))$. Segue la tesi.
Consideriamo adesso la mappa

$$\psi : \omega \otimes 2 \longrightarrow \omega \oplus \omega$$

$$\begin{cases} (n,0) \longmapsto (n, \diamondsuit) \\ (n,1) \longmapsto (n, \spadesuit) \end{cases}$$

Dove abbiamo costruito $\omega \oplus \omega$ come $(\omega \times \{\diamondsuit\}) \cup (\omega \times \{\spadesuit\})$ con l'ordine usuale, e $\diamondsuit < \spadesuit$.
Notiamo che è bigettiva, dato che ammette inversa,

$$\psi^{-1} : \omega \oplus \omega \longrightarrow \omega \otimes 2$$

$$\begin{cases} (n, \diamondsuit) \longmapsto (n,0) \\ (n, \spadesuit) \longmapsto (n,1) \end{cases}$$

Mostriamo adesso che rispetta l'ordine: se ho due elementi con seconda coordinata diversa, per come è definito l'ordine il confronto è banale. Se invece considero $(n,0) < (m,0)$ (il caso con 1 in seconda coordinata è analogo), ho che necessariamente $m < n$. Dunque, $\psi((n,0)) = (n, \diamondsuit) < (m, \diamondsuit) = \psi((m,0))$. La ψ è quindi un isomorfismo d'ordine.
Ciò conclude la dimostrazione. □

10 Numerabilità delle funzioni a supporto finito da ω in ω

Proposizione 10.1. *Vale l'uguaglianza* $|Fun_0(\omega, \omega)| = \aleph_0$.

Dimostrazione. Banalmente, ogni successione costante ha supporto finito, dunque $\aleph_0 \leq |Fun_0(\omega, \omega)|$. Per l'altra disuguaglianza, basta notare che ogni successione a supporto finito individua una sequenza finita di naturali, ottenuta nel modo ovvio. Dunque $|Fun_0(\omega, \omega)| \leq |Seq(\omega)| = |\omega| = \aleph_0$, dato che $|\omega \times \omega| = |\omega|$. Si conclude per Cantor-Bernstein. □

11 Proprietà dell'esponenziazione di buoni ordini

Proposizione 11.1. *Siano A e B due buoni ordini, B finito con $|B| = k$. Allora,* $\exp(A, B) \cong \bigotimes_{i=1}^{k} A$.

Dimostrazione. Dato che B è finito, $Fun_0(A, B) = A^B$; sia ora la mappa

$$\psi : A^B \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{k} A$$

$$f \longmapsto (f(b_1), ..., f(b_k))$$

Innanzitutto, la ψ è iniettiva, in quanto se $f \neq g$ esiste un j tale che $f(b_j) \neq g(b_j)$, e dunque anche $\psi(f) \neq \psi(g)$. Inoltre, fissato un elemento di $(a_1, ..., a_k) \in \bigotimes A$, scegliamo f tale che $f(b_i) = a_i$ per ogni i. È immediato vedere che $\psi(f) = (a_1, ..., a_k)$. Mostriamo che è crescente: siano $f < g$ due funzioni di A^B. Per definizione, esiste un j tale che $f(b_j) < g(b_j)$ e $f(b_i) = g(b_i)$ per ogni $i > j$; in particolare, $\psi(f) = (f(b_1), ..., f(b_k))$, e $\psi(g) = (g(b_1), ..., g(b_k))$. Dato che l'ordine in $\bigotimes A$ è l'ordine antilessicografico, da quanto detto sopra segue immediatamente che $\psi(f) < \psi(g)$.
Dunque, ψ è un isomorfismo d'ordine. □

Proposizione 11.2. *Se* $\exp(A, B)$ *è ben ordinato, allora A e B sono ben ordinati.*

Dimostrazione. Supponiamo che uno tra A e B non sia ben ordinato, supponiamo A senza perdere generalità; allora, esiste una catena discendente infinita $a_0 > a_1 > ... \subseteq A$. Sia ora, fissato $b_0 \in B$, la successione $\langle f_n \rangle \subseteq \exp(A, B)$, dove

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n & \text{se } x = b_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È immediato verificare che $f_0 > f_1 > ...$ è una catena discendente infinita di $\exp(A, B)$, e questo è assurdo. □

12 Operazioni tra ordini totali isomorfi

Proposizione 12.1. *Siano $A \cong A'$, $B \cong B'$ insiemi totalmente ordinati. Allora,*

1. $A \oplus B \cong A' \oplus B'$
2. $A \otimes B \cong A' \otimes B'$
3. $\exp(A, B) \cong \exp(A', B')$

Dimostrazione. Durante tutta la dimostrazione, siano $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ due isomorfismi d'ordine.

1. Consideriamo la funzione
$$\phi : A \oplus B \longrightarrow A' \oplus B'$$
$$(x,t) \longmapsto \begin{cases} (f(x),t) & \text{se } x \in A \\ (g(x),t) & \text{se } x \in B \end{cases}$$
dove $t \in \{0,1\}$. Innanzitutto, la ϕ è bigettiva, e ciò viene dalla bigettività di f e g. Per verificarne la crescenza, siano $(x,t) < (y,t') \in A \oplus B$. Abbiamo due casi possibili: se $t < t'$, $\phi((x,t)) = (\star, t) < (\star, t') = \phi((y,t'))$, dove con $\star$ indichiamo l'immagine della prima coordinata secondo ϕ. Se invece fosse $t = t'$, dovrebbe valere $x < y$, e in particolare x e y dovrebbero essere contenuti entrambi in A o in B, supponiamo A senza perdere generalità. Allora, $\phi((x,t)) = (f(x),t) < (f(y),t) = \phi((y,t))$ dato che la f è crescente. Dunque, ϕ è un isomorfismo d'ordine.

2. Nelle ipotesi di cui sopra, consideriamo la mappa
$$\psi : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$$
$$(a,b) \longmapsto (f(a), g(b))$$
Mostriamo che è un isomorfismo: innanzitutto, è bigettiva perché f e g lo sono sulle coordinate. Inoltre, è anche crescente; infatti, presi (a,b) e $(a',b') \in A \otimes B$, si hanno due possibilità: se $b < b'$, allora $\psi((a,b)) = (f(a), g(b)) < (f(a'), g(b')) = \psi((a',b'))$. Se invece $b = b'$ e $a < a'$, allora $\psi((a,b)) = (f(a), g(b)) < (f(a'), g(b)) = \psi((a',b))$ perché la f è crescente. La ψ è quindi l'isomorfismo cercato.

3. Nelle ipotesi di cui sopra, consideriamo la mappa
$$\Gamma : \exp(A,B) \longrightarrow \exp(A',B')$$
$$\sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ g^{-1}$$
Vogliamo mostrare che Γ è l'isomorfismo d'ordine cercato. È bigettiva, in quanto la funzione
$$\Delta : \exp(A',B') \longrightarrow \exp(A,B)$$
$$\tau \longmapsto f^{-1} \circ \tau \circ g$$
è la sua inversa bilatera. Inoltre, Γ è anche crescente; infatti, date due funzioni $\sigma < \tau \in \exp(A,B)$, vale per definizione che $\sigma(k) < \tau(b_0)$, dove b_0 è la massima differenza di σ e τ. Ora, $(\Gamma(\sigma))(g(b_0)) < (\Gamma(\sigma))(g(b_0)) = (f \circ \sigma \circ g^{-1})(g(b_0)) = f(\sigma(b_0)) < f(\tau(b_0)) = (\Gamma(\tau))(g(b_0))$.
Dall'iniettività della f segue anche che $(\Gamma(\sigma))(g(b_k)) = f(\sigma(b_k)) = f(\tau(b_k)) = (\Gamma(\tau))(g(b_k))$ per ogni $b_k > b_0$. Dunque, Γ è un isomorfismo d'ordine.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

13 Unioni finite di insiemi infiniti equipotenti

Proposizione 13.1. *Sia X un insieme infinito, tale che $|X \times X| = |X|$. Sia ora $\langle A_i | i = 1, ..., k \rangle$ una k-sequenza di insiemi disgiunti tali che $|A_i| = |X|$ per ogni i. Allora, $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = |X|$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per l'unione di due insiemi, e poi per induzione seguirà per ogni unione finita.
Chiaramente, $A \subseteq A \cup B$, e dunque $|X| = |A| \leq |A \cup B|$; mostriamo la disuguaglianza inversa. Consideriamo le due bigezioni $f : A \to X$ e $g : B \to X$, e, fissato $x_0 \in X \times X$, costruiamo la funzione

$$\Phi : A \sqcup B \longrightarrow X \times X$$

$$x \longmapsto \begin{cases} (f(a), x_0) & \text{se } x \in A \setminus \{f^{-1}(x_0)\} \\ (x_0, g(b)) & \text{se } x \in B \setminus \{g^{-1}(x_0)\} \\ (x_1, x_1) & \text{se } x = f^{-1}(x_0) \\ (x_2, x_2) & \text{se } x = g^{-1}(x_0) \end{cases}$$

Innanzitutto, essendo A e B disgiunti, la funzione è ben definita. Inoltre, usando l'iniettività di f e g si verifica facilmente che anche Φ è iniettiva. La verifica è abbastanza lunga e tediosa, e non richiede idee particolari, dunque mi sono sentito di ometterla.
Abbiamo dunque la seguente catena di disuguaglianze:

$$|X| = |A| \leq |A \sqcup B| \leq |X \times X| = |X|$$

Si conclude con il teorema di Cantor-Bernstein. □