Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 7

Enrico Berni, 582049

27/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Classi proprie in NBG, con dimostrazione
2. Operazioni elementari su classi in NBG
3. Proprietà del sottoinsieme
4. NBG dimostra l'assioma di separazione di ZFC
5. Iniezione dei naturali in insiemi infiniti, usando il lemma di Zorn
6. Rimpiazzamento per classi in NBG
7. Somma di ordinali come somma di buoni ordini
8. Continuità dei Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}$

1 Classi proprie in NBG, con dimostrazione

Proposizione 1.1. *Le seguenti collezioni sono classi proprie:*

1. $V = \{x|x = x\}$
2. $SING = \{x|\exists y\ x = \{y\}\}$
3. $PAIR = \{x|\exists y \exists z\ x = \{y, z\}\}$
4. $OPAIR = \{x|\exists y \exists z\ x = \{\{y\}, \{y, z\}\}\}$
5. $\mathcal{R} = \{x|x \notin x\}$
6. $ORD = \{\alpha|\alpha \text{ è ordinale}\}$
7. $POWER = \{x|\exists y\ x = \mathcal{P}(y)\}$

8. $IN = \{(x, y)|x \text{ insieme, } y \text{ insieme, } x \in y\}$

Dimostrazione. L'esistenza di ognuna di queste collezioni è garantita dall'assioma di comprensione, dato che ognuna di tali classi è estensione di una formula predicativa scrivibile nel linguaggio della teoria. Mostriamo dunque che sono classi proprie:

1. Se l'universo fosse un insieme, contraddirebbe il teorema di Cantor, come visto tempo fa in classe.

2. Se $SING$ fosse un insieme, per l'assioma dell'unione sarebbe un insieme anche $\bigcup SING = V$, e questo è assurdo.

3. Si nota che $SING \subseteq PAIR$, e dunque se $PAIR$ fosse un insieme lo sarebbe anche $\bigcup PAIR = V$, e questo è assurdo.

4. Basta osservare che un singoletto non è altro che una coppia ordinata della forma $\{x\} = (x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\}$, e dunque $SING \subseteq OPAIR$. Si conclude come con $PAIR$.

5. Segue dal teorema di Russell.

6. Segue dal teorema di Burali Forti.

7. Banalmente, vale che $SING \subseteq POWER$, e dunque si conclude come sopra.

8. Per ogni x insieme, vale che $(x, \mathcal{P}(x)) \in IN$, e dunque $V \subseteq \bigcup IN$, da cui segue che IN non è un insieme.

Ciò conclude la dimostrazione. □

2 Operazioni elementari su classi in NBG

Proposizione 2.1. *Siano A e B due classi. Allora, le collezioni $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$ sono classi. Inoltre, data una classe A, vale che A è un insieme se e solo se $\mathcal{P}(A)$ è un insieme.*

Dimostrazione. $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$, $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$,
$A \times B = \{X|\exists a \in A\, \exists b \in B\; x = \{\{a\}, \{a, b\}\}\}$. Tutte e tre le collezioni esistono per l'assioma di comprensione.
Per quanto riguarda la seconda parte, osserviamo che se A è un insieme, $\mathcal{P}(A)$ è un insieme per l'assioma delle parti di ZFC. Per il viceversa, osserviamo che se A fosse una classe, si avrebbe che $A \subseteq \bigcup \mathcal{P}(A)$, dato che per ogni $a \in A$, $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Dunque, se $\mathcal{P}(A)$ fosse un insieme, lo sarebbe anche A per separazione, e ciò contraddirebbe l'ipotesi su A. □

3 Proprietà del sottoinsieme

Proposizione 3.1. *Sia C una classe, e sia b un insieme. Allora, la classe $C \cap b$ è un insieme.*

Dimostrazione. Per definizione, $C \cap b \subseteq b$, e dunque $C \cap b \in \mathcal{P}(b)$. Dato che $\mathcal{P}(b)$ esiste per ogni insieme b, ciò conclude la dimostrazione. $\square$

4 NBG dimostra l'assioma di separazione di ZFC

Proposizione 4.1. *Gli assiomi di NBG dimostrano l'assioma di separazione di ZFC.*

Dimostrazione. Sia $\varphi(x, A_1, \dots, A_n)$ una formula predicativa scritta nel linguaggio della teoria degli insiemi. L'assioma di separazione di ZFC ci garantisce che esiste l'estensione di $\varphi(x, A_1, \dots, A_n)$ soltanto se individuiamo a priori un insieme B in cui tale estensione è contenuta. Scritto in formule,

$$\forall B \quad \exists C = \{x \in B | \varphi(x, A_1, \dots, A_n)\}$$

Ora, in NBG vale che la formula $x \in B \wedge \varphi(x, A_1, \dots, A_n)$ è ancora una formula predicativa, $\varphi'(x, B, A_1, \dots, A_n)$. Per comprensione in NBG, esiste l'estensione della formula, sia essa la classe

$$C = \{x \text{ insieme} | \varphi'(x, B, A_1, \dots, A_n)\}$$

Allora, abbiamo che C è una classe, e anche che $C \subseteq B$ per definizione di C, cioè $C \in \mathcal{P}(B)$, che è un insieme per l'assioma delle parti di ZFC. Dunque, possiamo concludere che C è un insieme. $\square$

5 Iniezione dei naturali in insiemi infiniti, usando il lemma di Zorn

Proposizione 5.1. *Assumendo gli assiomi di ZF+ZL, si dimostra che esiste sempre una funzione iniettiva $f : \omega \longrightarrow X$ per ogni X insieme infinito.*

Dimostrazione. Durante la dimostrazione, sia $E \subseteq \omega$ un sottoinsieme dei naturali, e si denoti con G_f il grafico della funzione f, $G_f \in \omega \times X$.
Sia ora $G = \{G_f | f \in F\}$, dove $F = \bigcup_{E \in \mathcal{P}(\omega)} \{f : E \longrightarrow X\}$. Si osserva immediatamente che la mappa ϕ, $f \mapsto G_f$ è una bigezione tra G ed F. Ora, abbiamo che $G \subseteq \mathcal{P}(E \times F)$, e possiamo definire una relazione d'ordine su G usando l'inclusione, rendendolo un poset. Il suo sottoinsieme G_{inj} dei grafici delle funzioni iniettive è ancora un poset, con l'ordine ereditato da G. Presa una catena $C \subseteq G_{inj}$, si nota che l'unione degli elementi di C è un

maggiorante di C, e quindi G_{inj} è induttivo[1], cioè soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn. Allora, esiste almeno un elemento massimale in G_{inj}, sia esso G_0. Considerando $\phi^{-1}(G_0) = f_0$, si ha che f_0 è massimale nell'insieme $\phi^{-1}[G_{inj}]$, con l'ordine indotto. Abbiamo dunque tre casi possibili:

- Se $Dom(f_0) = \omega$, abbiamo trovato una funzione iniettiva da ω a X, come da tesi.
- Se $Dom(f_0) = E \subset \omega$ e $Im(f_0) = X$, E è un sottoinsieme infinito di ω, e abbiamo già visto che si possono costruire bigezioni tra ω e suoi sottoinsiemi infiniti usando soltanto gli assiomi di ZF. Sia dunque $\psi : \omega \to E$ una di tali bigezioni. La mappa

  $$\omega \xrightarrow{\psi} E \xrightarrow{f_0} X$$

  è iniettiva.
- Se invece $Dom(f_0) = E \subset \omega$ e $Im(f_0) \neq X$, esistono due elementi $x \in X \setminus Im(f_0)$ e $y \in \omega \setminus E$. La funzione

  $$\hat{f}_0 : E \cup \{y\} \longrightarrow X$$

  $$\begin{cases} \hat{f}_{0|E} = f_0 \\ \hat{f}_0(y) = x \end{cases}$$

  è ancora iniettiva, ed estende la f_0, il che contraddice la massimalità di f_0, assurdo.

Ciò conclude la dimostrazione. □

6 Rimpiazzamento per classi in NBG

Proposizione 6.1. *Sia A una classe propria, e sia F una funzione iniettiva definita su A. Allora, $F[A]$ è una classe propria.*

Dimostrazione. Innanzitutto, per mostrare che $F[A]$ esiste, usiamo l'assioma di comprensione: prendiamo come formula $\varphi(x, A, F) = \exists a \in A \quad (a, x) \in F$.
Otteniamo che l'estensione

$$\{x|\varphi(x, A, F)\} = \{x|\exists a \in A \quad (a, x) \in F\}$$

Esiste all'interno della teoria.
Mostriamo che non è un insieme: dato che la F è iniettiva, è bigettiva sull'immagine, e dunque è ben definita la funzione $F^{-1} : F[A] \longrightarrow A$. Se $F[A]$ fosse un insieme, lo sarebbe anche $F^{-1}[F[A]] = A$ per l'assioma di rimpiazzamento, e questo è assurdo. □

[1]Il termine ”induttivo” qui è usato come in teoria degli ordini

7 Somma di ordinali come somma di buoni ordini

Proposizione 7.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, $\alpha \oplus \beta \cong \alpha + \beta$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

- $\underline{\beta = 0}$: $\alpha + \beta = \alpha + 0 = \alpha$ per definizione, e $\alpha \oplus \beta = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}) = \alpha \times \{0\}$, che è chiaramente isomorfo ad α.

- $\underline{\beta = \gamma + 1}$: Costruiamo un isomorfismo tra $\alpha + \beta$ e $\alpha \oplus \beta$, sapendo che ne esiste uno tra $\alpha + \gamma$ e $\alpha \oplus \gamma$.
  Sia ϕ tale isomorfismo. Notiamo che

  $$\alpha \oplus \beta = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}) = ((\alpha \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\})) \cup \{(\gamma, 1)\}$$

  Ora, definiamo $\phi' : \alpha \oplus \beta \longrightarrow \alpha + \beta = \alpha + \gamma + 1$ tale che

  $$\begin{cases} \phi'_{|\alpha \oplus \gamma} = \phi \\ \phi'((\gamma, 1)) = \gamma + 1 \end{cases}$$

  La funzione costruita sopra è chiaramente un isomorfismo d'ordine.

- $\underline{\beta \text{ limite}}$: Sia ora β un ordinale limite, e supponiamo che la tesi valga per ogni ordinale $\gamma < \beta$. Per ipotesi induttiva, esiste una famiglia di isomorfismi

  $$\langle \phi_\gamma : \alpha + \gamma \longrightarrow \alpha \oplus \gamma \rangle_{\gamma < \beta}$$

  Dato che un isomorfismo tra buoni ordini, e dunque in particolare tra ordinali, è unico, si osserva che i ϕ_γ sono uno estensione dell'altro, e dunque sono compatibili. Consideriamo dunque $\Phi = \bigcup_{\gamma < \beta} \phi_\gamma$,

  $$\Phi : \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha + \gamma = \alpha + \beta \longrightarrow \bigcup_{\gamma < \beta} \alpha \oplus \gamma = \alpha \oplus \beta$$

  Dove l'uguaglianza a destra della freccia segue da come è definita l'unione di buoni ordini. La verifica del fatto che Φ sia un isomorfismo è immediata, e segue dalla costruzione e dal fatto che i ϕ_γ sono uno estensione dell'altro.

$\square$

8 Continuità dei Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}$

Denotiamo con $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue. Denotiamo con m la misura di Lebesgue.

Proposizione 8.1. *Vale l'uguaglianza* $|\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è trovare un sottoinsieme continuo di $\mathbb{R}$ di misura nulla, di modo che ogni suo sottoinsieme sia misurabile. La tesi seguirà per il teorema di Cantor-Bernstein.
Mostriamo che l'insieme di Cantor soddisfa le nostre richieste.
Definiamo per ricorsione numerabile la seguente successione di insiemi:

$$\begin{cases} C_0 = [0,1] \\ C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}) \end{cases}$$

L'insieme di Cantor è l'intersezione di tutta la famiglia,

$$C := \bigcap_{n\in\omega} C_n$$

Mostriamo che C ha la cardinalità del continuo ed ha misura nulla.

- Innanzitutto, si ha che, se $\{A_i\}_{i\in\omega}$ è una famiglia di insiemi disgiunti,

  $$m\left(\bigsqcup_{i\in\omega} A_i\right) = \sum_{i\in\omega} m(A_i)$$

  Usiamo questo fatto per mostrare che C ha misura nulla: possiamo trovare la misura di C come $m(C) = m([0,1]) - m(C^{\mathsf{c}})$.
  Ora, al passo $k+1$-esimo della successione, viene rimosso il terzo centrale di C_k, che ha quindi misura $\frac{m(C_k)}{3}$. L'insieme C^{c} ha dunque misura descritta dalla legge (dimostrabile con una facile induzione)

  $$m(C^{\mathsf{c}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

  Pertanto,

  $$m(C) = m([0,1]) - m(C^{\mathsf{c}}) = 1 - 1 = 0$$

- Per mostrare che C ha la cardinalità del continuo, basta osservare che lo sviluppo in base 3 degli elementi di C non ammette 1 come cifra, e questo segue dalla costruzione. Dunque, si può associare bigettivamente ad ogni $c \in C$ il suo sviluppo in base 3, che altro non è che una successione numerabile di 0 e 2, appartenente all'insieme $\{0,2\}^{\omega}$ di cardinalità $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Per quanto detto sopra, si ha la seguente catena di contenimenti:

$$\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Si conclude con Cantor-Bernstein. $\square$