Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 8

Enrico Berni, 582049

11/05/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Prodotto tra ordinali come prodotto di buoni ordini
2. Esponenziale di ordinali come esponenziale di buoni ordini
3. Proprietà d'ordine di somma e prodotto tra ordinali
4. Proprietà algebriche di somma, prodotto ed esponenziale di ordinali
5. Calcolo di $(\omega+1)^\omega$
6. Unioni di insiemi di cardinali
7. Crescenza della funzione $\aleph$
8. Immersione di ω_1 in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (ZF)
9. Continuità della σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$

1 Prodotto tra ordinali come prodotto di buoni ordini

Proposizione 1.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, $\alpha \cdot \beta \cong \alpha \otimes \beta$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

- $\underline{\beta = 0}$: Se $\beta = 0$, si ha che
$$\alpha \cdot 0 = \emptyset = \alpha \otimes 0$$
- $\underline{\beta \text{ successore}}$: Se esiste γ tale che $\beta = \gamma + 1$, allora
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\gamma+1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cong (\alpha \otimes \gamma) + \alpha \cong (\alpha \otimes \gamma) \oplus \alpha \cong \alpha \otimes (\gamma \oplus 1) \cong \alpha \otimes \beta$$

- $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Per ipotesi induttiva, per ogni ordinale $\gamma < \lambda$ esiste unico l'isomorfismo $\psi_\gamma : \alpha \cdot \gamma \longrightarrow \alpha \otimes \gamma$. I ψ_γ sono uno estensione dell'altro, e dunque in particolare sono compatibili. Esiste ed è ben definita dunque la funzione

$$\bigcup_{\gamma<\lambda} \psi_\gamma = \Psi : \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \lambda \longrightarrow \alpha \otimes \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \otimes \gamma$$

  È immediato osservare che la Ψ è un isomorfismo.

$\square$

2 Esponenziale tra ordinali come esponenziale tra buoni ordini

Proposizione 2.1. *Siano α e $\beta \neq 0$ due ordinali. Allora, $\alpha^\beta \cong \exp(\alpha, \beta)$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

- $\underline{\beta = 1}$: Se $\beta = 1$, $\alpha^1 = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$, mentre $\exp(\alpha, 1) \cong \alpha$.

- $\underline{\beta \text{ successore}}$: Sia γ tale che $\beta = \gamma + 1$; allora,

$$\alpha^\beta = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha \cong \exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$$

  Dove l'isomorfismo segue dall'ipotesi induttiva. Ora, mostriamo che $\exp(\alpha, \gamma+1) \cong \exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$. Per farlo, basta costruire la funzione

$$\Gamma : \exp(\alpha, \gamma + 1) \longrightarrow \exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$$

$$\phi \longmapsto (\phi_{|\gamma}, \phi(\gamma + 1))$$

  Mostrare che Γ è un isomorfismo d'ordine è immediato.

- $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è un limite,

$$\alpha^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma \cong \bigcup_{\gamma<\lambda} \exp(\alpha, \gamma) = \exp(\alpha, \lambda)$$

  Dove l'isomorfismo segue dall'ipotesi induttiva.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

3 Proprietà d'ordine di somma e prodotto tra ordinali

Proposizione 3.1. *Siano α_1 e α_2 due ordinali tali che $\alpha_1 < \alpha_2$. Allora, per ogni ordinale β,*

1. $\alpha_1 + \beta \leq \alpha_2 + \beta$
2. $\alpha_1 \cdot \beta \leq \alpha_2 \cdot \beta$

Dimostrazione. Per induzione transfinita su β.

1.
   - $\underline{\beta = 0}$: Se $\beta = 0$, si ritrova l'ipotesi.
   - $\underline{\beta \text{ successore}}$: Se β è un successore, esiste un ordinale γ tale che $\beta = \gamma + 1$. Allora, $\alpha_1 + \beta = (\alpha_1 + \gamma) + 1$, e $\alpha_2 + \beta = (\alpha_2 + \gamma) + 1$. Per ipotesi induttiva, $\alpha_1 + \gamma < \alpha_2 + \gamma$, e quindi esiste un ordinale $\delta \neq 0$ tale che $\alpha_1 + \gamma + \delta = \alpha_2 + \gamma$, e dunque si ha $(\alpha_1 + \gamma) + (\delta + 1) = \alpha_2 + \gamma + 1$. Ora, se $\delta \neq 0$ banalmente $1 \leq 1 + \delta$, e quindi esiste un ordinale $\xi \neq 0$ tale che $1 + \xi = \delta + 1$. Allora, la situazione è la seguente:

     $$(\alpha_2 + \gamma) + 1 = (\alpha_1 + \gamma) + (\delta + 1) = (\alpha_1 + \gamma) + (1 + \xi)$$

     Dall'uguaglianza di sopra segue la tesi.
   - $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Per ipotesi induttiva, vale la seguente disuguaglianza

     $$\alpha_1 + \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_1 + \gamma \leq \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 + \gamma = \alpha_2 + \lambda$$

     Essa è equivalente alla seguente, dato che gli insiemi considerati hanno a due a due gli stessi sup

     $$\alpha_1 + \lambda = \alpha_1 + \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \leq \alpha_2 + \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma = \alpha_2 + \lambda$$

     Segue la tesi.

2.
   - $\underline{\beta = 0}$: Se $\beta = 0$, si ha $0 = \alpha_1 \cdot 0 \leq \alpha_2 \cdot 0 = 0$.
   - $\underline{\beta \text{ successore}}$: Se $\beta = \gamma + 1$, allora

     $$\alpha_1 \cdot (\gamma + 1) = \alpha_1 \cdot \gamma + \alpha_1 \leq (\alpha_1 \cdot \gamma) + \alpha_2 \leq (\alpha_2 \cdot \gamma) + \alpha_2$$

     Dove la prima disuguaglianza è vera per il punto (1), e la seconda per ipotesi induttiva.

- $\underline{\beta = \lambda \text{ limite}}$: Per ipotesi induttiva, per ogni $\gamma < \lambda$ vale $\alpha_1 \cdot \gamma \leq \alpha_2 \cdot \gamma$, da cui segue
$$\bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_1 \cdot \gamma \leq \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 \cdot \gamma$$
$$\alpha_1 \cdot \lambda = \alpha_1 \cdot \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \leq \alpha_2 \cdot \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \lambda$$
Le due disuguaglianze sono equivalenti perché gli insiemi in questione hanno a due a due gli stessi sup.

□

4 Proprietà algebriche di somma, prodotto ed esponenziale di ordinali

Proposizione 4.1. *Siano α, β e γ tre ordinali. Allora,*

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
2. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
3. $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$
4. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono tutte per induzione transfinita su γ.

1. - $\underline{\gamma = 0}$: $\alpha \cdot (\beta \cdot 0) = \alpha \cdot 0 = 0 = (\alpha \cdot \beta) \cdot 0$
   - $\underline{\gamma \text{ successore}}$: Notiamo che $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\delta + 1) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta + \alpha \cdot \beta =$ $= \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta \cdot (\delta + 1))$[1]
   - $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, vale che
   $$(\alpha \cdot \beta) \cdot \lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) = \alpha \cdot (\beta \cdot \lambda)$$
   Dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il prodotto di due ordinali è un successore solo se entrambi sono successori.

2. - $\underline{\gamma = 0}$: $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$
   - $\underline{\gamma \text{ successore}}$: $\alpha \cdot (\beta + (\delta + 1)) = \alpha \cdot ((\beta + \delta) + 1) = \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha =$ $= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha$. Si conclude per la proprietà associativa della somma.

[1]Si è usata la distributività dimostrata nel punto (2)

- $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, allora $\beta + \lambda$ è limite, e quindi

$$\alpha \cdot (\beta + \lambda) = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot (\beta + \delta) = \bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta).$$

Dato che $\alpha \cdot \lambda$ è un prodotto di due ordinali, di cui uno limite, è esso stesso un limite, e dunque

$$\bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \lambda$$

3. - $\underline{\gamma = 0}$: $\alpha^\beta \cdot \alpha^0 = \alpha^\beta \cdot 1 = \alpha^{\beta+0}$
   - $\underline{\gamma \text{ successore}}$:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^{\delta+1} = \alpha^\beta \cdot (\alpha^\delta \cdot \alpha) = (\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta) \cdot \alpha = (\alpha^{\beta+\delta}) \cdot \alpha =$$
$$= \alpha^{(\beta+\delta)+1} = \alpha^{\beta+(\delta+1)}$$

   - $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è un limite,

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^\beta \cdot \alpha^\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^{\beta+\delta} = \alpha^{\beta+\lambda}$$

4. - $\underline{\gamma = 0}$: $(\alpha^\beta)^0 = 1 = \alpha^0 = \alpha^{\beta\cdot 0}$
   - $\underline{\gamma \text{ successore}}$:

$$(\alpha^\beta)^{\delta+1} = (\alpha^\beta)^\delta \cdot \alpha^\beta = \alpha^{\beta\cdot\delta} \cdot \alpha^\beta = \alpha^{\beta\cdot\delta+\beta} = \alpha^{\beta\cdot(\delta+1)}$$

   - $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite,

$$(\alpha^\beta)^\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha^\beta)^\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha^{\beta\cdot\delta} = \alpha^{\beta\cdot\lambda}$$

□

5 Calcolo di $(\omega + 1)^\omega$

Proposizione 5.1. *Vale l'uguaglianza* $(\omega + 1)^\omega = \omega^\omega$.

Dimostrazione. Innanzitutto, osserviamo che per definizione $(\omega + 1)^\omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega + 1)^n$; ora, naturalmente vale $\omega^\omega = \bigcup_{n<\omega} \omega^n \leq \bigcup_{n<\omega} (\omega + 1)^n = (\omega + 1)^\omega$, e altrettanto naturalmente $(\omega + 1)^\omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega + 1)^n \leq \bigcup_{n<\omega} \omega^{2n} = \omega^\omega$. Vale dunque la seguente catena di disuguaglianze:

$$\omega^\omega \leq (\omega + 1)^\omega \leq \omega^\omega$$

Segue la tesi. □

6 Unioni di insiemi di cardinali

Proposizione 6.1. *Sia C un insieme di cardinali. Allora,* $\bigcup C = \sup_{\kappa \in C} \kappa$.

Dimostrazione. Ogni cardinale è un ordinale, e la stessa proprietà è stata dimostrata per gli ordinali. □

7 Crescenza della funzione $\aleph$

Proposizione 7.1. *La funzione $\aleph$ è strettamente crescente.*

Dimostrazione. È equivalente dimostrare che, dati $\alpha < \beta$ due cardinali, vale $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. Se $\alpha < \beta$, esiste $\gamma > 0$ tale che $\alpha + \gamma = \beta$. La dimostrazione è per induzione transfinita su γ.

- $\underline{\gamma = 1}$: Se $\gamma = 1$, $\aleph_\beta = \aleph_{\alpha+1} = \mathcal{H}(\aleph_\alpha) \supset \aleph_\alpha$. Il contenimento è stretto perché, per esempio, l'ordinale $\aleph_\alpha + 1$ appartiene a $\aleph_{\alpha+1}$ ma non ad $\aleph_\alpha$.

- $\underline{\gamma \text{ successore}}$: $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\delta} < \aleph_{\alpha+(\delta+1)} = \aleph_\beta$, dove le disuguaglianze derivano rispettivamente dall'ipotesi induttiva e dal passo base.

- $\underline{\gamma = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è limite, anche $\beta = \alpha + \lambda$ lo è. Dunque, per definizione

  $$\aleph_\beta = \aleph_{\alpha+\lambda} = \bigcup_{\xi < \alpha+\lambda} \aleph_\xi$$

  Per ipotesi induttiva, vale che

  $$\aleph_\alpha < \bigcup_{\xi < \alpha+\lambda} \aleph_\xi = \aleph_\beta$$

  Segue la tesi.

□

8 Immersione di ω_1 in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (ZF)

Proposizione 8.1. *In ZF, vale la disuguaglianza* $|\omega_1| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))|$.

Dimostrazione. Senza l'assioma di scelta, sappiamo che per ogni ordinale numerabile α esiste una funzione iniettiva da α in $\mathbb{R}$ (per definizione di cardinalità). Tuttavia, non possiamo scegliere un particolare sottoinsieme di $\mathbb{R}$, ben ordinato o meno, che sia l'immagine di tale iniezione. Tuttavia, consideriamo, per ogni $\alpha \in \omega_1$ l'insieme

$$X_\alpha = \{Y \subseteq \mathbb{R} | Y \text{ è ben ordinato} \wedge ot(Y) = \alpha\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

.
La funzione

$$\phi : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$
$$\alpha \longmapsto X_\alpha$$

è chiaramente iniettiva. $\square$

9 Continuità della σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$

Sia $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}$.

Proposizione 9.1. *Vale l'uguaglianza* $|\mathfrak{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

Avevamo già visto a lezione che la successione

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 = \tau \\ \mathcal{G}_{\alpha+1} = \mathcal{G}_\alpha \cup \{X^{\mathsf{c}} | X \in \mathcal{G}_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n<\omega} X_n | X_n \in \mathcal{G}_\alpha\} \\ \mathcal{G}_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} B_\gamma \end{cases}$$

definisce al passo ω_1 una σ-algebra su $\mathbb{R}$. Mostriamo che è contenuta in $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, da cui si concluderà che le due sono lo stesso oggetto per definizione dei boreliani.
Per induzione transfinita su α:

- $\underline{\alpha = 0}$: La topologia euclidea è contenuta in $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ per definizione.
- $\underline{\alpha \text{ successore}}$: Sia $\alpha = \beta + 1$. Se $X \in \mathcal{G}_{\beta+1}$, allora ci sono due possibilità: o $X \in \mathcal{G}_\beta$, oppure X è ottenuto da operazioni elementari di elementi di $\mathcal{G}_\beta$, che preservano la "borelianità" di X. In ogni caso, $X \in \mathcal{G}_{\alpha+1}$.
- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se $X \in \mathcal{G}_\lambda$, per definizione esiste un certo ordinale $\alpha \in \lambda$ tale che $X \in \mathcal{G}_\alpha$, e dunque è un boreliano per ipotesi induttiva.

Ora, dato che per definizione $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ è la minima σ-algebra che contenga la topologia euclidea, si conclude che $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{G}_{\omega_1}$. Mostriamo adesso, sempre per induzione transfinita, che $|\mathcal{G}_\alpha| = \mathfrak{c}$ per ogni $\alpha < \omega_1$, da cui concluderemo che effettivamente i boreliani di $\mathbb{R}$ sono una quantità continua.

- $\underline{\alpha = 0}$: La topologia euclidea è continua, come già mostrato in un esercizio precedente.
- $\underline{\alpha \text{ successore}}$: Siano $A_1 = \{X^{\mathsf{c}} | X \in \mathcal{G}_\alpha\}$ e $A_2 = \{\bigcup_{n<\omega} X_n | X_n \in \mathcal{G}_\alpha\}$ i due insiemi che al passo $\alpha+1$-esimo vengono aggiunti a $\mathcal{G}_\alpha$. Mostriamo che hanno la cardinalità del continuo. A_1 è banalmente in bigezione con $\mathcal{G}_\alpha$, mentre gli elementi di A_2 sono

al più quanti i sottoinsiemi numerabili di $\mathcal{G}_\alpha$, che sono $\mathfrak{c}_0^{\aleph} = \mathfrak{c}$. Inoltre, $|A_1| \geq \mathfrak{c}$, dato che per ogni $X \in \mathcal{G}_\alpha$, l'unione della successione costante $\langle X \rangle_{n<\omega}$ appartiene ad A_2.

- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: $\mathcal{G}_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \mathcal{G}_\gamma$ è unione al più numerabile di insiemi continui, e dunque è continua.

Ciò conclude la dimostrazione.