Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Foglio 9

Enrico Berni, 582049

11/04/2020

Sommario

In questo foglio di esercizi sono presenti:

1. Prodotto di ordinali successori
2. Esponenziazione di ordinali successori
3. Proprietà dell'esponenziazione di ordinali numerabili
4. Una disuguaglianza tra potenze di ω
5. Unicità della forma normale di Cantor
6. Caratterizzazione degli ordinali moltiplicativamente chiusi
7. Calcolo di $\mathfrak{c}^{\aleph_1}$
8. Proprietà delle operazioni tra cardinali
9. Monotonia delle operazioni tra cardinali

1 Prodotto di ordinali successori

Proposizione 1.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, $\alpha \cdot \beta$ è un successore se e solo se α e β sono successori.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Leftarrow}$: Se α e β sono successori, allora esistono γ e δ tali che $\alpha = \gamma + 1$ e $\beta = \delta + 1$. Allora,

$$\alpha \cdot \beta = (\gamma + 1) \cdot (\delta + 1) = (\gamma + 1) \cdot \delta + (\gamma + 1) = ((\gamma + 1) \cdot \delta + \gamma) + 1$$

Dove l'ultima uguaglianza deriva dall'associatività della somma.

- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo che $\alpha \cdot \beta$ sia un successore e sia, senza perdita di generalità, $\beta = \lambda$ limite. Allora,
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \bigcup_{\gamma<\beta} \gamma = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\delta<\alpha\cdot\beta} \delta$$
Dunque, $\alpha \cdot \beta$ è un limite, contraddicendo le ipotesi.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

2 Esponenziazione di ordinali successori

Proposizione 2.1. *Siano α e β due ordinali. Allora, α^β è successore se e solo se α è un successore e $\beta < \omega$.*

Dimostrazione.
- $\underline{\Leftarrow}$: Per induzione su β.
  - $\underline{\beta = 0}$: Per definizione, $\alpha^0 = 1 = 0 + 1$.
  - $\underline{\beta + 1 \text{ successore}}$: Vale che $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$. Ora, $\alpha^{\beta+1}$ è il prodotto di due successori, uno per ipotesi induttiva e uno per ipotesi, dunque per quanto detto sopra è un successore.
- $\underline{\Rightarrow}$: Supponiamo che α sia successore e β sia infinito: allora, possiamo fare la divisione euclidea $\beta = \omega \cdot \gamma + \rho$, da cui segue
$$\alpha^\beta = \alpha^{\omega\cdot\gamma+\rho} = \alpha^{\omega\cdot\gamma} \cdot \alpha^\rho$$
con $\rho < \omega$. Allora, dato che α^β è successore, necessariamente è un successore anche $\alpha^\rho = \delta + 1$. Dunque,
$$\alpha^\beta = \alpha^{\omega\cdot\gamma} \cdot (\delta + 1) = \alpha^{\omega\cdot\gamma} \cdot \delta + \alpha^{\omega\cdot\gamma}$$
L'ordinale di cui sopra è successore se e solo se $\alpha^{\omega\cdot\gamma}$ lo è. Tuttavia,
$$\alpha^{\omega\cdot\gamma} = (\alpha^\gamma)^\omega = \bigcup_{n<\omega} (\alpha^\gamma)^n$$
e dunque $\alpha^{\omega\cdot\gamma}$ è limite, assurdo.
Se invece β fosse finito, e α fosse limite, varrebbe che banalmente
$$\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma^\beta$$
e dunque α^β sarebbe limite, assurdo.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

3 Proprietà dell'esponenziazione di ordinali numerabili

Proposizione 3.1. *Sia α un ordinale. Allora, $\omega^\alpha \geq \alpha$.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita su α.

- $\underline{\alpha = 0, 1}$: Banalmente, $1 > 0$ e $\omega > 1$.
- $\underline{\alpha \text{ successore}}$: $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega \geq \alpha \cdot \omega > \alpha$ se $\alpha \geq 1$.
- $\underline{\alpha = \lambda \text{ limite}}$: Se λ è un limite, allora

$$\omega^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \omega^\gamma \geq \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma = \lambda$$

□

Proposizione 3.2. *Sia β un ordinale, e sia $\langle \alpha_n | n \in \omega \rangle$ la successione definita per ricorsione numerabile nel seguente modo:*

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta + 1 \\ \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} \end{cases}$$

Sia ora $\alpha = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n$; allora, la successione è strettamente crescente e α è limite.

Dimostrazione. Per induzione su n.

- $\underline{n = 0}$: $\omega^{\alpha_0} = \omega^{\beta+1} = \omega^\beta \cdot \omega \geq \beta \cdot \omega = \bigcup_{n<\omega} \beta \cdot n > \beta \cdot 2$ se $\beta > 1$. I casi $\beta = 0, 1$ sono banalmente veri.
- $\underline{n \text{ successore}}$: $\omega^{\alpha_{n+1}} = \omega^{\omega^{\alpha_n}} > \omega^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}$

Ora, abbiamo mostrato a lezione che $\omega^\alpha = \alpha$, e dunque se α fosse un successore, si dovrebbe avere che ω è un successore e α è finito; banalmente, ω non è un successore, e dunque non lo è nemmeno α. Ciò conclude la dimostrazione. □

4 Una disuguaglianza tra potenze di ω

Proposizione 4.1. *Sia $\gamma > \gamma_1 > \dots > \gamma_k$ una catena di ordinali. Allora, $\omega^\gamma > \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$.*

Dimostrazione.

$$\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k \leq \omega^{\gamma_1} \cdot (n_1 + \dots n_k) < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1+1} \leq \omega^\gamma$$

□

5 Unicità della forma normale di Cantor

Proposizione 5.1. *Sia α un ordinale. La forma normale di Cantor di α è unica.*

Dimostrazione. Per induzione transfinita forte su α.
Supponiamo che ogni $\beta < \alpha$ abbia forma normale di Cantor unica. Siano adesso $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$ e $\omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_j} \cdot m_j$ due forme normali di Cantor per α, e supponiamo senza perdere generalità $\alpha_1 < \beta_1$: allora,

$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k < \omega^{\beta_1} \leq \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\beta_j} \cdot m_j$$

e ciò è assurdo. Allora, $\alpha_1 = \beta_1$. Possiamo dunque fare la divisione euclidea delle due forme per ω^{β_1}, e dall'unicità di quoziente e resto otteniamo $n_1 = m_1$ (quoziente) e $j = k$, $\alpha_i = \beta_i$ e $n_i = m_i$ (resto).
Ciò conclude la dimostrazione. □

6 Caratterizzazione degli ordinali moltiplicativamente chiusi

Proposizione 6.1. *Sia α un ordinale infinito. I seguenti fatti sono tra loro equivalenti:*

1. *Per ogni $\beta < \alpha$, $\beta \cdot \alpha = \alpha$*
2. *Per ogni $\beta,\gamma < \alpha$, $\beta \cdot \gamma < \alpha$*
3. *$\alpha = \omega^{\omega^\gamma}$ per un certo γ*

Dimostrazione.

- $(1) \Rightarrow (2)$: Dato $\gamma < \alpha$, $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha = \alpha$.
- $(2) \Rightarrow (3)$: Dato che α è moltiplicativamente chiuso, $(\beta \cdot \gamma) \cdot 2 = (\beta \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma) < \alpha$, e dunque banalmente $\beta + \gamma < \alpha$, cioè α è additivamente chiuso, e dunque è della forma $\alpha = \omega^\delta$ per un certo ordinale δ. Ora, per ogni coppia di ordinali $\beta,\gamma < \delta$, vale che $\omega^{\beta+\gamma} = \omega^\beta \cdot \omega^\gamma < \omega^\delta$, da cui $\beta + \gamma < \delta$, cioè δ è additivamente chiuso, e dunque è della forma ω^{ω^ξ} per un certo ordinale ξ.
- $(3) \Rightarrow (1)$: Per ogni $\beta < \alpha$, esistono ζ e n tali che $\omega^{\omega^\zeta} \leq \beta < \omega^{\omega^\zeta \cdot n}$. Pertanto,

$$\alpha = \omega^{\omega^\delta} = \omega^{\omega^\zeta + \omega^\delta} = \omega^{\omega^\zeta} \cdot \omega^{\omega^\delta} \leq \beta \cdot \alpha \leq \omega^{\omega^\zeta \cdot n + \omega^\delta} = \omega^\delta = \alpha$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

7 Calcolo di $\mathfrak{c}^{\aleph_1}$

Proposizione 7.1. *Vale l'uguaglianza* $\mathfrak{c}^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$.

Dimostrazione. $\mathfrak{c}^{\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_1} = 2^{\aleph_1}$ □

8 Proprietà algebriche delle operazioni tra cardinali

Proposizione 8.1. *Siano* κ, ν *e* μ *tre cardinali. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\kappa + \nu = \nu + \kappa$
2. $\kappa \cdot \nu = \nu \cdot \kappa$
3. $\kappa + (\nu + \mu) = (\kappa + \nu) + \mu$
4. $\kappa \cdot (\nu \cdot \mu) = (\kappa \cdot \nu) \cdot \mu$
5. $\kappa(\nu + \mu) = \kappa\nu + \kappa\mu$
6. $\kappa^\nu \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\nu+\mu}$
7. $(\kappa^\nu)^\mu = \kappa^{\nu \cdot \mu}$

Dimostrazione. Durante la dimostrazione, siano A, B e C tre insiemi tali che $|A| = \kappa$, $|B| = \nu$ e $|C| = \mu$.

1. Ovvio, dato che per ogni insieme A e B vale $A \sqcup B = B \sqcup A$.
2. Ovvio, dato che gli insiemi $A \times B$ e $B \times A$ sono in bigezione.
3. Ovvio, dato che $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$.
4. Ovvio, dato che $A \times (B \times C)$ è in bigezione con $(A \times B) \times C$.
5. Abbiamo già visto che $A \times (B \sqcup C)$ è equipotente ad $(A \times B) \sqcup (A \times C)$.
6. Segue dal fatto che $A^{B \sqcup C}$ è in bigezione con $A^B \times A^C$.
7. Segue dal fatto che $(A^B)^C$ è in bigezione con $A^{B \times C}$ tramite la mappa

$$\phi : A^{B \times C} \longrightarrow (A^B)^C$$

$$f \longmapsto (g : c \longmapsto f(c, \cdot))$$

□

9 Monotonia delle operazioni tra cardinali

Proposizione 9.1. *Siano* $\kappa \leq \kappa'$ *e* $\nu \leq \nu'$ *cardinali. Allora,*

1. $\kappa + \nu \leq \kappa' + \nu'$
2. $\kappa \cdot \nu \leq \kappa' \cdot \nu'$
3. $\kappa^\nu \leq \kappa'^{\nu'}$

Dimostrazione. Durante la dimostrazione, siano A, A', B e B' insiemi tali che $|A| = \kappa$, $|A'| = \kappa'$, $|B| = \nu$ e $|B'| = \nu'$, e siano $f : A \longrightarrow A'$ e $g : B \longrightarrow B'$ due funzioni iniettive.

1. La funzione
$$\phi : A \sqcup B \longrightarrow A' \sqcup B'$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$
è iniettiva.

2. La funzione
$$\psi : A \times B \longrightarrow A' \times B'$$
$$(a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$
è iniettiva.

3. A meno di identificare A e B come sottoinsiemi rispettivamente di A' e B', è ovvio che esista un'iniezione tra A^B e $A'^{B'}$.

□