$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trovare un sottospazio $U_1 \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 A-invariante.

b) Trovare un sottospazio $U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\mathbb{R}^4 = U_2 \oplus A(U_2)$

c) Mostrare che se $U \subseteq \mathbb{R}^4$ ha dimensione 2, allora vale a) o b).

Soluzione

a) Osserviamo che $A(e_1) = e_1 - e_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$, $A(e_2) = 2e_1 - e_2 \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$. Pertanto, $U = \mathrm{span}(e_1, e_2)$ è A-invariante.

b) Dato che siamo in $\mathbb{R}^4$ e U_2 ha dimensione 2, ci basta trovare un sottospazio che interseca la propria immagine banalmente.
Osserviamo che $A(e_3) = e_2 - e_3 + e_4$, $A(e_4) = -2e_1 + 2e_2 - 2e_3 + e_4$. Posto $U_2 = \mathrm{span}(e_3, e_4)$

$A(U_2) = \mathrm{span}(e_2 - e_3 + e_4, -2e_1 + 2e_2 - 2e_3 + e_4)$, osserviamo che $U_2 + A(U_2)$ ha dimensione 4. Dalla formula di Grassmann segue che $\mathbb{R}^4 = U_2 \oplus \mathrm{span}(e_3, e_4)$.

c) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2. Se U è A-invariante, abbiamo finito. Se U non è A-invariante, mostriamo che U e $A(U)$ si intersecano banalmente. Se non si intersecassero banalmente, $A(U) \cap U$ avrebbe dimensione 1, e $U + A(U)$ avrebbe dimensione 3. Osserviamo che $A^2 = -I$, e dunque $A(A(U)) \subseteq U$, da cui $A(A(U) + U) \subseteq A(U) + U$, cioè $A(U) + U$ è A-invariante. Avendo dimensione 3, il polinomio caratteristico di $A|_{A(U)+U}$ ha grado 3, e dunque ammette una radice reale, cioè un autovalore per A, assurdo.

$\boxed{2}$

Trovare due matrici $A, B \in M(3, \mathbb{R})$ tali che

a) $\det A = \det B = 3$

b) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 5$

c) $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$

<u>Soluzione</u>

Consideriamo la base di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, e_2, e_3\right\}$. Considero la mappa $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tale che $\underset{\overset{\parallel}{\mathcal{M}}}{M_{\mathcal{B}}(f)} = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Sia P il cambio di base $\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{C}$,

$P = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}^{-1}$. Allora, $A = P^{-1}\mathcal{M}P = \begin{pmatrix}3&0&0\\4&1&0\\6&0&1\end{pmatrix}$ soddisfa ancora le tre richieste.

Similmente, consideriamo $\mathcal{B}' = \left\{e_1, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, e_3\right\}$, e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentata in $\mathcal{B}'$ da $N = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Coniugando per $Q = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}^{-1}$, troviamo

$B = Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\0&3&1\end{pmatrix}$, che soddisfa ancora le tre richieste.

$\boxed{3}$

Mostrare che, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $A \not\sim B$, con $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Soluzione

Mostriamo innanzitutto che $M \sim N$ se e solo se $M - \alpha I \sim N - \alpha I$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Se $M \sim N$, esiste $P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $N = P^{-1}MP$. Allora,

$N - \alpha I = P^{-1}MP - \alpha(P^{-1}IP) = P^{-1}(M - \alpha I)P$ (Truccone, I commuta con tutto)

$\boxed{\Leftarrow}$: Supponiamo che esiste $P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $P^{-1}(M - \alpha I)P = N - \alpha I$.

Allora, $N - \alpha I = P^{-1}(M - \alpha I)P = P^{-1}MP - \alpha I \Rightarrow N = P^{-1}MP$.

Ora, osserviamo anche che se $M \sim N$, $M^n \sim N^n$ per ogni n naturale.
Infatti, se $N = P^{-1}MP$ $N^n = (P^{-1}MP)^n = P^{-1}M^nP$.

Consideriamo ora $A' = A - \alpha I$, $B' = B - \alpha I$. $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ora, $B'^2 = 0$, e $A'^2 \neq 0$,

dunque sicuramente $A' \not\sim B'$. Per quanto detto sopra, segue la tesi.

Oss Questo esercizio mostra che l'insieme {polinomio caratteristico, molt. geometriche} non è un sistema completo di invarianti. Questo perché $p_{A'}(t) = p_{B'}(t) = t^4$, $\dim(\mathrm{Ker}\, A') = \dim(\mathrm{Ker}\, B') = 2$, ma $A' \not\sim B'$.

$\boxed{5}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Trovare $P \in GL(5,\mathbb{R})$ t.c. $P^{-1}AP$ è diagonale.

b) Mostrare che $X \in C(A) \iff P^{-1}XP \in C(P^{-1}AP)$

c) Calcolare $\dim(C(A))$.

d) Trovare $B \in M(5,\mathbb{R})$ diagonalizzabile ma non simultaneamente ad A. Esibire un autospazio di A non B-invariante.

Soluzione

a)

A è triangolare a blocchi. Dall'esercizio 1 del 22/02 sappiamo che il primo blocco ha come autovalori -1 e 3, con molteplicità algebrica 3 e 1.

Il secondo blocco sulla diagonale è (3), e dunque si ha $Sp(A) = \{-1, 3\}$, con $\begin{cases} m_A(-1) = 3 \\ m_A(3) = 2 \end{cases}$. A questo punto, risolvendo un sistema lineare si verifica che

$\begin{cases} m_G(-1) = 3 \\ m_G(3) = 2 \end{cases}$, e che $\begin{cases} V_A(-1) = \operatorname{span}(-e_1+e_2, -e_1+e_3, -e_1+e_4) \\ V_A(3) = \operatorname{span}(-e_1+e_5, e_1+e_2+e_3+e_4) \end{cases}$.

Allora, il cambio di base $\mathcal{C} \longmapsto \{-e_1+e_2, -e_1+e_3, -e_1+e_4, -e_1+e_5, e_1+e_2+e_3+e_4\}$, con matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

diagonalizza A.

b) $AX = XA \iff AX - XA = 0 \overset{P \in GL(5,\mathbb{R})!}{\iff} P^{-1}(AX - XA)P = 0 \iff$

$\iff P^{-1}AXP - P^{-1}XAP = 0 \underset{\text{Truccone}}{\iff} P^{-1}APP^{-1}XP - P^{-1}XPP^{-1}AP = 0 \iff$

$\iff (P^{-1}AP)(P^{-1}XP) = (P^{-1}XP)(P^{-1}AP).$

c) $C(A) = \{X \in M(5,\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$. Dal punto b) sappiamo che questa condizione si può controllare direttamente nella base di autovettori per A.

Dato che ci interessa solo la dimensione, e il coniugio per P è un isomorfismo, troviamo $C(P^{-1}AP)$.

Prendiamo una matrice di incognite $X = (x_{ij})$, e scriviamo $AX = XA$, trovando che una X valida deve essere della forma

$$X = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

da cui $\dim(C(A)) = 13$.

d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, non commuta con A, e l'autospazio $V_A(3) = \mathrm{span}(-e_1+e_5,\ e_1+e_2+e_3+e_4)$ ha come immagine $\mathrm{span}(-e_1+e_5,\ e_1+2e_2+e_3+2e_4) \neq V_A(3)$.
