$\boxed{1}$

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificare che $\text{rk}\, A = 4$, e calcolare l'inversa con mosse di Gauss.

Soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{(3)} + A^{(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{METTO ZERI}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow{A_{(4)} - A_{(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \text{ ha rango } 4.$$

Per trovare l'inversa con le mosse di Gauss, si affiancano A e I, e si porta l'identità a sinistra con mosse <u>DI RIGA</u>.

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{(4)} - A_{(1)}]{A_{(3)} - 2A_{(1)}} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{(3)} - 3A_{(2)}}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{(3)}/4} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/4 & -1/2 & -\frac{3}{4} & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{(1)} + A_{(3)}} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-A_{(4)}} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{A_{(2)} - A_{(4)} \\ A_{(3)} - \frac{1}{4}A_{(4)}}]{A_{(1)} - \frac{1}{4}A_{(4)}} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/4 & -3/4 & 1/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right). \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5/4 & -3/4 & 1/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Data $A \in M(2,\mathbb{R})$, definiamo $f_A : \mathbb{R}_2[x] \to M(2,\mathbb{R})$ come

$$f_A(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2$$

a) Scrivere la matrice che rappresenta f_A rispetto alle basi $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ di $M(2,\mathbb{R})$.

b) Studiare $rk(f_A)$ al variare di A.

Soluzione a) Scriviamo $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Allora, $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha+\delta) \\ \gamma(\alpha+\delta) & \delta^2 + \beta\gamma \end{pmatrix}$. Per scrivere la matrice di f_A, guardiamo come si comporta sulla base in partenza.

$$f_A(1) = I = E_{11} + E_{22}$$

$$f_A(x) = A = \alpha E_{11} + \beta E_{12} + \gamma E_{21} + \delta E_{22}$$

$$f_A(x^2) = A^2 = (\alpha^2 + \beta\gamma) E_{11} + \beta(\alpha+\delta) E_{12} + \gamma(\alpha+\delta) E_{21} + (\delta^2 + \beta\gamma) E_{22}$$

Allora, la matrice che la rappresenta é $M(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2+\beta\gamma \\ 0 & \beta & \beta(\alpha+\delta) \\ 0 & \gamma & \gamma(\alpha+\delta) \\ 1 & \delta & \delta^2+\beta\gamma \end{pmatrix}$.

b) Facciamo qualche mossa di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2+\beta\gamma \\ 0 & \beta & \beta(\alpha+\delta) \\ 0 & \gamma & \gamma(\alpha+\delta) \\ 1 & \delta & \delta^2+\beta\gamma \end{pmatrix} \xRightarrow{A_{(1)} - A_{(4)}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha-\delta & \overbrace{\alpha^2-\delta^2}^{(\alpha-\delta)(\alpha+\delta)} \\ 0 & \beta & \beta(\alpha+\delta) \\ 0 & \gamma & \gamma(\alpha+\delta) \\ 1 & \delta & \delta^2+\beta\gamma \end{pmatrix} \xRightarrow[A^{(3)} - (\delta^2+\beta\gamma)A^{(1)}]{A^{(2)} - \delta A^{(1)}}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha-\delta & (\alpha-\delta)(\alpha+\delta) \\ 0 & \beta & \beta(\alpha+\delta) \\ 0 & \gamma & \gamma(\alpha+\delta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La terza colonna dipende dalla seconda, dunque il rango è al più due.

In particolare, se la seconda colonna è nulla, cioè se $\alpha = \delta$, $\gamma = \beta = 0$, cioè se $A \in span(I)$, il rango è 1.

Se una di queste tre condizioni non si verifica, sulla seconda colonna compare un pivot, che ci dice che il rango è 2.

$\boxed{3}$

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, e sia $f_A : M(3,\mathbb{R}) \longrightarrow M(3,\mathbb{R})$ la mappa $f_A(X) = AX$.

a) Trovare una base per $Ker(f_A)$.

b) Trovare una base $\mathcal{B}$ tale che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & A \end{pmatrix}$.

<u>Soluzione</u>

Troviamo l'immagine degli elementi della base standard di $M(3,\mathbb{R})$;

$$f_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad f_A(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad f_A(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad f_A(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} ; \quad f_A(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad f_A(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad f_A(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora, la matrice che rappresenta f_A nella base standard è

$$B = M_1^1(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Facendo mosse di Gauss, si trova che $\operatorname{rk} B = 6$.

Per trovare una base di $\operatorname{Ker} f_A$ possiamo procedere in due modi:

- il primo è calcolarlo nel modo solito, usando mosse di Gauss e avendo cura di tornare indietro attraverso l'isomorfismo con $\mathbb{R}^9$ (vogliamo una base di un sottospazio di $M(3,\mathbb{R})$!);
- il secondo è osservare che, se $M \in M(3,\mathbb{R})$, $AM = 0$ se e solo se $\operatorname{Im} M \subseteq \operatorname{Ker} A$. Calcolando $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, per esempio usando Gauss sulle colonne, quello che resta da fare è trovare tre matrici le cui immagine sia $\operatorname{span}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$$M_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ funzionano, e

dunque $\{M_1, M_2, M_3\}$ è la base cercata di $\operatorname{Ker} f_A$.

b) Per trovare la base $\mathcal{B}$ cercata, fissiamo un isomorfismo tra $M(3,\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^9$ che "srotoli" le matrici per colonne:

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{12}, E_{22}, E_{32}, E_{13}, E_{23}, E_{33}\} \longrightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}.$$

(nel modo ovvio, mantenendo l'ordine)

Scrivendo la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$, si nota che è della forma richiesta.

$\boxed{4}$

Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la mappa definita da $f(p) = x\,p'' + p(-2)$.

a) Mostrare che f è lineare.

b) Scrivere la matrice che la rappresenta nelle basi

$\mathcal{B} = \{x+1, 2x, x^2+x, x^3\}$ in partenza, e $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2+1, x^3-x\}$ in arrivo.

<u>Soluzione</u> a) $f(0) = x \cdot 0 + 0 = 0$.

Dati $p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$, $q = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$,

$p+q = (p_0+q_0) + (p_1+q_1)x + (p_2+q_2)x^2 + (p_3+q_3)x^3$;

$p'' = 2p_2 + 6p_3 x$, $q'' = 2q_2 + 6q_3 x$, $(p+q)'' = 2(p_2+q_2) + 6(p_3+q_3)x$.

- $f(p+q) = x(p+q)'' + (p+q)(-2) = 2(p_2+q_2)x + 6(p_3+q_3)x^2 + p(-2) + q(-2)$

$= 2p_2 x + 6p_3 x^2 + p(-2) + 2q_2 x + 6q_3 x^2 + q(-2) = f(p) + f(q)$.

- $f(\lambda p) = x(\lambda p)'' + (\lambda p)(-2) = \lambda x p'' + \lambda (p(-2)) = \lambda f(p)$.

Allora, f è lineare.

b) Per rappresentare la f in base, calcoliamo cosa fa sulla base $\mathcal{B}$:

$f(x+1) = -1$; $[f(x+1)]_{\mathcal{B}'} = (-1, 0, 0, 0)^t$

$f(2x) = -4$; $[f(2x)]_{\mathcal{B}'} = (-4, 0, 0, 0)^t$

$f(x^2+x) = 2x+2$; $[f(x^2+x)]_{\mathcal{B}'} = (2, 2, 0, 0)^t$

$f(x^3) = 6x^2 - 8$; $[f(x^3)]_{\mathcal{B}'} = (-14, 0, 6, 0)^t$

Allora,

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$