$\boxed{1}$ $V = \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$, $U = \mathcal{A}(3, \mathbb{R})$

a) Trovare una base di U

b) Estendere a base di V

c) Trovare un complementare W di U. Indicarne le equazioni cartesiane. BONUS) Chi è W?

Soluzione

a) Troviamo $\dim U$. Sappiamo che una matrice antisimmetrica A è t.c. $A^t = -A$, e dunque ha una scrittura come $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, per certi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Pertanto, $\dim U = 3$ (coincide con il numero dei gradi di libertà; si può vedere anche con un isomorfismo non canonico, $A \longleftrightarrow w \times -$ per un certo $w \in \mathbb{R}^3$; mi pare che sia $w = \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}$)). Pertanto, una base è

$$\underbrace{\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}}_{\mathcal{B}} \text{ con } (E_{ij})_{(h,k)} = \begin{cases} 1 & h=i, k=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

b) Basta prendere la base di V data da

$\mathcal{B} \cup \{E_{11}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$

c) Il complementare è $W = \mathrm{Span}\{E_{11}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$.

Le sue equazioni cartesiane (vedere W come nucleo di una mappa lineare)

sono $\begin{cases} a_{12} - a_{21} = 0 \\ a_{23} - a_{32} = 0 \\ a_{13} - a_{31} = 0 \end{cases}$

BONUS) Chi è W?

$W = \mathcal{S}(3, \mathbb{R})$, verificare!

Soluzione alternativa Basta notare che, data $A \in M(3,\mathbb{R})$, vale

$$A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2},$$ e che la prima è simmetrica, la seconda antisimmetrica, e la scrittura è unica.

A questo punto, $M(3,\mathbb{R}) = S(3,\mathbb{R}) \oplus A(3,\mathbb{R})$, e tutto segue facilmente.

---

2 Consideriamo i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da $U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$W = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$.

a) Trovare una base per $U \cap W$

b) Trovare una base per $U + W$.

Soluzione

a) Scriviamo innanzitutto una base di W. Dalle equazioni cartesiane, che sono 2 ed indipendenti, sappiamo che $\dim W = 2$. Una base possibile è

$$\left\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}} \right\}$$; questi sono chiaramente indipendenti e generano.

Osserviamo che $U \neq W$, dato che $u_2 \notin W$; da questo segue che $\dim(U \cap W) \leq 1$. Dato che $u_1 - u_2 \in W$ (rispetta le equazioni che definiscono W), $U \cap W = \operatorname{span}(u_1 - u_2)$.

b) Troviamo prima di tutto la dimensione di $U + W$, usando la formula di Grassmann: $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Questo ci dice che $\dim(U+W) = 3$.

Per trovare una base della somma di due sottospazi, in genere si può procedere in due modi:

- Prendiamo una base di $U \cap W$, e la estendiamo prima a U e poi a W

- Mettiamo i quattro vettori in una matrice, e con delle mosse di Gauss <u>sulle colonne</u> capiamo chi è l'impostore dipendente dagli altri.

Visto che abbiamo già delle basi per U e W, usiamo il primo metodo: $\{u_1 - u_2, u_2, w_2\}$ è la base cercata, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (verificare con Gauss)

$\boxed{3}$ $A \in M(3, \mathbb{R})$ t.c. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Consideriamo la mappa lineare $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $a(\underline{x}) = A\underline{x}$.

Mostrare che $Ker(a) = span(e_1)$.

<u>Soluzione</u>

Osserviamo innanzitutto che $e_2 \notin Ker(a)$. Se $e_1 \notin Ker(a)$, dovremmo avere $A(e_1) \neq 0$; ma $A(e_1) = A(A^2(e_2)) = A^2(A(e_2)) = \mu e_1$ per un certo $\mu \neq 0$. $A(\mu(e_1)) = \mu(A(e_1)) = \mu^2 e_1$, e $A(\mu(e_1)) = A^2(e_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu = 0$, assurdo. Dunque, $Span(e_1) \subseteq Ker(a)$. Osserviamo ora che $span(e_1) \subseteq Ker(a) \subseteq Ker(a \circ a) = span(e_1, e_3)$; se $e_3 \in Ker(a)$, A dovrebbe essere della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & ab & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & bc & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque dovremmo avere $b=0 \Rightarrow A^2=0$, ($\not\downarrow$).

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ $a: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, $\underline{x} \longmapsto A\underline{x}$

a) Trovare una base per $Ker(a)$.

b) Trovare una base e delle equazioni cartesiane per $Im(a)$.

<u>Soluzione</u>

a) Facendo delle mosse di Gauss <u>sulle colonne</u>, si trova che $rk\, A = 4$

$-5A^{(1)} + 11A^{(2)} - 6A^{(3)} + A^{(4)} - 2A^{(5)} = \underline{0}$, e dunque, usando che $A^{(i)} = Ae_i$,

il vettore $\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un generatore di $Ker(a)$. (Si usa la formula delle dimensioni per dire che $dim(Ker(a)) = 1$.

b) Per trovare una base di $Im(a)$, basta prendere un complementare di $Ker(a)$ in $\mathbb{R}^5$, estrarne una base e prendere l'immagine secondo a della base trovata, verificando che i vettori trovati restino indipendenti.

Per esempio, scegliamo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$; questi quattro vettori sono indipendenti, e $\mathbb{R}^5 = Span(e_1, e_2, e_3, e_4) \oplus Ker(a)$. Allora, una base di $Im(a)$ è

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (Verificare usando Gauss che i 4 vettori sono indipendenti)