



UNIVERSITÀ DI PISA

---

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

LA CURVA DI PEANO COME  
ROUGH PATH E APPLICAZIONI

Relatore:  
Dott. *Dario Trevisan*

Candidato:  
*Giuseppe Bruno*

---

ANNO ACCADEMICO 2020/2021



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Space-filling curves e la curva di Peano</b>	<b>1</b>
1.1 Costruzione della curva di Peano . . . . .	1
1.2 Surgettività e continuità . . . . .	4
1.3 $1/d$ -Hölderianità delle coordinate ed auto-affinità . . . . .	5
1.4 Distribuzione uniforme delle coordinate . . . . .	7
1.5 Le approssimanti della curva di Peano . . . . .	9
<b>2 Rough Paths</b>	<b>13</b>
2.1 Motivazioni . . . . .	13
2.2 Lo spazio dei Rough Paths . . . . .	14
2.3 Distanza $\alpha$ -holderiana sui rough paths . . . . .	15
2.4 Non unicità del sollevamento . . . . .	16
2.5 Lo spazio dei rough paths geometrici . . . . .	17
2.6 Integrazione lungo rough paths . . . . .	17
2.7 Derivata di Gubinelli . . . . .	20
2.8 Il Sewing Lemma applicato all'integrale di Young . . . . .	21
<b>3 La curva di Peano come Rough Path</b>	<b>23</b>
3.1 Parte simmetrica . . . . .	24
3.2 Area di Lévy . . . . .	24
3.3 Area di Lévy per la curva di Peano . . . . .	25
3.4 Convergenza nello spazio dei Rough Paths . . . . .	29
3.5 Esempio di implementazione dell'integrale rough . . . . .	31
<b>4 Applicazioni e conclusioni</b>	<b>33</b>
4.1 Parallel computing e PDE . . . . .	33
4.2 TSP e Matching . . . . .	34
4.3 Equazioni differenziali Rough . . . . .	38

4.4	Conclusioni . . . . .	39
<b>A</b>	<b>Codice Matlab</b>	<b>41</b>
A.1	Area di Lèvy . . . . .	41
A.2	Integrale rough . . . . .	42
	<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>

# Introduzione

Nel 1890 Giuseppe Peano pubblicò il primo esempio di mappa surgettiva e continua tra l'intervallo  $[0, 1]$  ed il quadrato  $[0, 1]^2$ . L'estensione al caso  $d$ -dimensionale della costruzione data da Peano viene riportata nel Capitolo 1, insieme alle dimostrazioni delle proprietà di  $1/d$ -holderianità, auto-affinità ed uniforme distribuzione delle coordinate.

Nonostante negli anni successivi tal genere di curva venne visto più come oggetto esotico che vero strumento matematico, ad oggi sono numerose le applicazioni teoriche e computazionali che coinvolgono e sfruttano le sue particolari proprietà. Nel Capitolo 4 si farà cenno ad esempio all'utilità che essa ricopre nel Parallel Computing e nella risoluzione numerica di PDE. Sempre nel Capitolo 4 verrà descritto un metodo euristico per la determinazione di un cammino utile ai fini del TSP, inoltre verrà mostrato come alcuni bounds probabilistici relativi al Matching Bipartito possano essere trasportati in dimensione superiore (o inferiore) agevolmente tramite le proprietà della curva di Peano.

Proprio quest'ultima peculiarità, ovvero la capacità della curva di Peano di sollevare immediatamente risultati ad una dimensione superiore, ha portato all'approfondimento dell'argomento centrale della tesi: è possibile dare una buona definizione di integrale lungo la curva di Peano, e con essa costruire una teoria per equazioni differenziali controllate da tale curva? Si tratta certamente di una domanda vaga che verrà poi precisata nei Capitoli 2 e 3, dove saranno dimostrati i risultati preliminari e fondamentali per poter rispondere in modo affermativo. Le conseguenze di questa risposta saranno altre domande, forse più interessanti, elencate nelle conclusioni per un futuro sviluppo.

Il passo iniziale che si è costretti ad affrontare è la definizione dell'integrale della curva lungo sé stessa:

$$\int \gamma \otimes d\gamma.$$

La non differenziabilità della curva rispetto a cui si integra rappresenta un primo ostacolo che nel caso del moto Browniano era già stato affrontato a metà del '900 da

Itô e Stratonovich. I risultati da loro ottenuti erano tuttavia di tipo probabilistico, l'integrale non poteva essere definito traiettoria per traiettoria.

Un'altra possibile definizione è tramite somme alla Riemann-Stieltjes, cioè:

$$\sum_{[s,t] \in \mathcal{P}} \gamma_s^i (\gamma_t^j - \gamma_s^j),$$

noto come integrale di Young. Lo stesso Young provò però che tale definizione è ben posta per cammini  $\alpha$ -hölderiani con  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Nel caso della curva di Peano bidimensionale  $\alpha$  è esattamente  $\frac{1}{2}$ , rendendo impraticabile anche questa via.

Per trovare una soluzione occorre guardare agli anni '90, quando Terry Lyons gettò le basi per la teoria dei Rough Paths, riuscendo ad abbattere quella che ormai era diventata la barriera dell' $\frac{1}{2}$ -hölderianità. Come si vedrà nel Capitolo 2 (dove verranno enunciati i principali risultati ottenuti da Lyons, Gubinelli e altri), aggiungendo al cammino l'informazione mancante, è possibile non solo dare un senso all'integrale della curva lungo sé stessa, ma anche costruire tutta la teoria necessaria per rispondere alla domanda iniziale.

Lo scopo del Capitolo 3 sarà pertanto costruire tale informazione mancante nel caso specifico della curva di Peano bidimensionale. La teoria dei Rough Paths è una teoria giovane ed in pieno sviluppo, la letteratura riguardante il problema trattato è quasi inesistente. Fa eccezione la tesi di dottorato di uno studente dello stesso Lyons, in cui viene abbozzato un sollevamento a rough path della curva di Peano in dimensione 3. Sempre nello stesso lavoro viene fatto cenno alla possibilità di utilizzare quanto costruito fin qui per definire l'integrale di forme differenziali su superfici di bassa regolarità, "parametrizzandole" tramite la curva di Peano. Si tratta certamente di un'idea suggestiva che però richiederebbe ulteriore approfondimento.

Infine il Capitolo 3 si conclude con un confronto numerico tra l'integrale Rough e l'integrale di Young, il cui codice è riportato in appendice.

# Capitolo 1

## Space-filling curves e la curva di Peano

Alla fine del diciannovesimo secolo molti matematici, spinti in particolar modo dai risultati di Cantor sulla cardinalità del continuo, iniziarono a chiedersi se fosse possibile trovare una mappa surgettiva e continua tra l'intervallo  $[0, 1]$  ed il quadrato unitario.

Una tale curva non può essere iniettiva, altrimenti si troverebbe un omeomorfismo tra  $[0, 1]$  e  $[0, 1]^2$  (in quanto mappa bigettiva tra uno spazio compatto ed uno spazio di Hausdorff). Il primo esempio di curva in grado di soddisfare queste proprietà venne pubblicato dal matematico italiano Giuseppe Peano nel 1890 [13]. Negli anni successivi moltissime variazioni vennero proposte da Hilbert, Sierpinski, Lebesgue, Polya... e soltanto nel 1913 si arrivò ad un'estensione  $d$ -dimensionale della curva di Lebesgue.

L'obiettivo di questo capitolo è descrivere l'estensione della curva di Peano al caso  $d$ -dimensionale pubblicata in [6], dando in particolare una costruzione di tipo analitico anziché geometrico, da cui seguiranno agevolmente i risultati di  $1/d$ -holderianità, auto-affinità ed uniforme distribuzione delle coordinate.

### 1.1 Costruzione della curva di Peano

Sia  $D = \{0, 1, 2\}$  ed  $\mathcal{S}_D$  l'insieme delle successioni a valori in  $D$ , ovvero:

$$\mathcal{S}_D = \{(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid t_k \in D\}.$$

Fissata la dimensione  $d$  e data  $\mathbf{t} \in \mathcal{S}_D$ , si considerino le sottosuccessioni  $\mathbf{t}_i = (t_{i+jd})_{j \geq 0}$  con  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Si definiscono allora le mappe  $x_i : \mathcal{S}_D \rightarrow [0, 1]$  come segue:

$$x_i(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t})}(t_{i+jd})}{3^{j+1}}$$

dove  $\xi : D \rightarrow D$  è l'operatore  $\xi(a) = 2 - a$ , mentre

$$S_{i+jd}(\mathbf{t}) := \sum_{k=1}^{i+jd} t_k - \sum_{s=0}^j t_{i+sd}.$$

*Osservazione 1.1.* L'operatore  $\xi$  è una involuzione e  $S_{i+jd}(\mathbf{t})$  dipende solo dai primi  $(i-1) + jd$  termini di  $\mathbf{t}$ .

$t_1$			$t_{1+jd}$	
$\vdots$			$\vdots$	
$t_i$			$t_{i+jd}$	
$\vdots$			$\vdots$	
$t_d$			$t_{d+jd}$	

Figura 1.1: Il termine  $S_{i+jd}$  si può visualizzare come la somma dei coefficienti evidenziati in rosso nella figura.

Si vuole adesso dimostrare che  $x_i(\mathbf{t}) = x_i(\mathbf{u})$  se  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$  sono rappresentazioni ternarie per lo stesso  $t \in [0, 1]$ , ovvero se  $\Phi(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{u})$  con:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S}_D &\longrightarrow [0, 1] \\ (t_k)_{k \in \mathbb{N}} &\longmapsto \sum \frac{t_k}{3^k}. \end{aligned}$$

Senza perdita di generalità è possibile supporre:

- $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{(i_0-1)+j_0d}, t_{i_0+j_0d}, \mathbf{0})$ ;
- $\mathbf{u} = (t_1, \dots, t_{(i_0-1)+j_0d}, t_{i_0+j_0d} - 1, \mathbf{2})$ .

Allora si osserva che:

$$x_i(\mathbf{t}) - x_i(\mathbf{u}) = \frac{\xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{t})}(t_{i+j_0d}) - \xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{u})}(u_{i+j_0d})}{3^{j_0+1}} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t})}(t_{i+jd}) - \xi^{S_{i+jd}(\mathbf{u})}(u_{i+jd})}{3^{j+1}}.$$



Dato che i termini di  $\mathbf{t}$  e di  $\mathbf{u}$  hanno tutti stessa parità, ad eccezione di quello in posizione  $i_0 + j_0d$ , allora si può concludere che  $S_{i+jd}(\mathbf{t})$  e  $S_{i+jd}(\mathbf{u})$  hanno diversa parità nei seguenti due casi:

- $i < i_0$  e  $j > j_0$ ;
- $i > i_0$  e  $j \geq j_0$ .

Pertanto vale  $\forall i > i_0$ :

$$\xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{t})}(t_{i+j_0d}) - \xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{u})}(u_{i+j_0d}) = \xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{t})}(0) - \xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{u})}(2) = 0.$$

Ed inoltre  $\forall i < i_0$ :

$$\xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{t})}(t_{i+j_0d}) - \xi^{S_{i+j_0d}(\mathbf{u})}(u_{i+j_0d}) = 0.$$

Da quanto appena mostrato segue allora che  $x_i(\mathbf{t}) = x_i(\mathbf{u}) \forall i \neq i_0$ .  
 Resta da dimostrare l'uguaglianza nel caso  $i = i_0$ . Si osserva che  $\forall j > j_0$ :

- $S_{i_0+jd}(\mathbf{t}) = S_{i_0+j_0d}(\mathbf{t}) = S_{i_0+j_0d}(\mathbf{u})$ ;
- $S_{i_0+jd}(\mathbf{t})$  e  $S_{i_0+jd}(\mathbf{u})$  hanno la stessa parità.

Quindi, ricordando che  $t_{i_0+j_0d} - u_{i_0+j_0d} = 1$ , si trova che

$$x_{i_0}(\mathbf{t}) - x_{i_0}(\mathbf{u}) = \pm \left( \frac{1}{3^{j_0+1}} - \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^{j+1}} \right) = 0.$$

Questo conclude la dimostrazione e prova la buona definizione delle funzioni:

$$\begin{aligned} x_i : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto x_i(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_D & \xrightarrow{\Phi} & [0, 1] \\ & \searrow^{x_i(\mathbf{t})} & \downarrow \downarrow x_i(t) \\ & & [0, 1] \end{array}$$

con le quali è possibile finalmente definire la curva di Peano  $d$ -dimensionale:

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1]^d \\ t &\longmapsto (x_1(t), \dots, x_d(t)). \end{aligned}$$

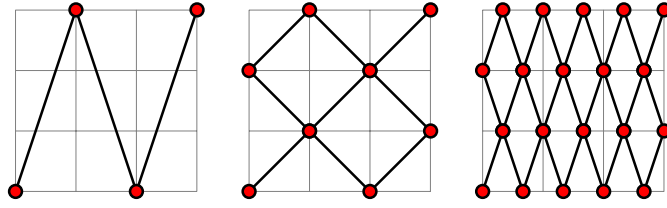


Figura 1.2: Valori della curva di Peano ottenuti suddividendo  $[0,1]$  in 3, 9 e 27 parti.

## 1.2 Surgettività e continuità

In questo paragrafo vengono dimostrate le due proprietà fondamentali della curva di Peano, sfruttando la costruzione appena vista.

**Teorema 1.2** (Continuità e surgettività). *La curva di Peano è continua e surgettiva.*

*Dimostrazione.* Dati  $t \in [0, 1]$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , sia  $\mathbf{t} \in \mathcal{S}_D$  una rappresentazione ternaria di  $t$  tale che:

$$t(k) := \sum_{s=1}^{i+kd} \frac{t_s}{3^s} + \sum_{s=(i+1)+kd}^{\infty} \frac{2}{3^s} > t.$$

Si osserva che se  $t \leq u < t(k)$  allora i primi  $i + kd$  termini di  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$  coincidono, quindi:

$$|x_i(\mathbf{t}) - x_i(\mathbf{u})| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{|\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t})}(t_{i+jd}) - \xi^{S_{i+jd}(\mathbf{u})}(u_{i+jd})|}{3^{j+1}} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^{j+1}} = \frac{1}{3^{k+1}}.$$

Ciò implica la continuità a destra in  $t$ . In modo analogo si prova la continuità a sinistra delle coordinate  $x_i$ . È dunque possibile concludere la continuità della mappa  $\alpha$ .

Resta da provare la surgettività di  $\alpha$ . Fissato  $(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$  si scelga una rappresentazione ternaria  $\mathbf{a}_i \in \mathcal{S}_D$  per ogni coordinata  $x_i$ . Tramite induzione si definisce la successione  $\mathbf{t}_i = (t_{i+jd})_{j \geq 0} \in \mathcal{S}_D$ :

$$\begin{cases} t_1 = a_1 \\ t_{i+jd} = \xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t}_{ij})}(a_{i+jd}) \end{cases}$$

dove  $\mathbf{t}_{ij} = (t_1, \dots, t_{(i-1)+jd}, \mathbf{0})$  (affinchè valga  $S_{i+jd}(\mathbf{t}) = S_{i+jd}(\mathbf{t}_{ij})$ ).

Per ogni  $i$  e  $j$  si ottiene allora:

$$\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t})}(t_{i+jd}) = \xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t})}(\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t}_{ij})}(a_{i+jd})) = \xi^{2S_{i+jd}(\mathbf{t})}(a_{i+jd}) = a_{i+jd}.$$

Ciò implica la surgettività di  $\alpha$ . □

### 1.3 1/d-Hölderianità delle coordinate ed auto-affinità

Le funzioni  $x_i$  prima introdotte risultano 1/d-Hölder ed "auto-affini" nel senso che verrà meglio specificato successivamente. È necessario sfruttare la seguente proposizione:

**Proposizione 1.3** (Relazione). *Fissato  $k \in \mathbb{N}$ , la  $i$ -esima coordinata  $x_i$  della curva di Peano  $\alpha$   $d$ -dimensionale soddisfa la seguente relazione:*

$$3^k(x_i(t) - x_i(t(k))) = (-1)^{\sigma(k)} x_i(3^{kd}(t - t(k))) \quad (1.1)$$

dove  $t = \Phi(t_s)_{s \in \mathbb{N}} \in [0, 1]$ ,  $t(k) = \Phi(t_1, \dots, t_{kd}, \mathbf{0})$  e  $\sigma(k)$  è un intero dipendente da  $k$ .

*Dimostrazione.* Si denotino  $\mathbf{t} = (t_s)_{s \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{t}(k) = (t_1, \dots, t_{kd}, \mathbf{0})$  e  $\mathbf{u} = (t_{s+kd})_{s \in \mathbb{N}}$ . Allora vale:

$$u = 3^{kd}(t - t(k)) = \Phi(\mathbf{u}).$$

Definendo

$$\sigma(k) := \sum_{q=1}^{kd} t_q - \sum_{r=0}^{k-1} t_{i+rd}$$

si ottiene che:

$$\sigma(k) = S_{i+(k+j)d}(\mathbf{t}(k)) = S_{i+(k+j)d}(\mathbf{t}) - S_{i+jd}(\mathbf{u}).$$

Pertanto, notando che i primi  $kd$  termini di  $\mathbf{t}$  e di  $\mathbf{t}(k)$  coincidono, si trova:

$$\begin{aligned} 3^k(x_i(t) - x_i(t(k))) &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t})}(t_{i+jd})}{3^{j-k+1}} - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{t}(k))}(0)}{3^{j-k+1}} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{S_{i+(j+k)d}(\mathbf{t})}(t_{i+(j+k)d})}{3^{j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{\sigma(k)}(0)}{3^{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{\sigma(k)} \xi^{S_{i+jd}(\mathbf{u})}(t_{i+(j+k)d})}{3^{j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{\sigma(k)}(0)}{3^{j+1}}. \end{aligned}$$

Quindi, se  $\sigma(k)$  è pari:

$$3^k(x_i(t) - x_i(t(k))) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{S_{i+jd}(\mathbf{u})}(t_{i+(k+j)d})}{3^{j+1}} = x_i(u).$$

Se  $\sigma(k)$  è dispari:

$$3^k(x_i(t) - x_i(t(k))) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2 - \xi^{S_{i+jd}(\mathbf{u})}(t_{i+(k+j)d})}{3^{j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{3^{j+1}} = -x_i(u).$$

In entrambi i casi si ottiene la tesi, ovvero:

$$3^k(x_i(t) - x_i(t(k))) = (-1)^{\sigma(k)} x_i(3^{kd}(t - t(k))). \quad \square$$

Di seguito si riporta la definizione di curva *autoaffine* secondo Kôno [9] [10]:

**Definizione 1.4** (Auto-affinità). Una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  si definisce *auto-affine* con parametro di scala  $H > 0$  rispetto alla base  $r > 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , se per ogni coppia di interi  $k, s$  (con  $k \geq 1$  e  $0 \leq s \leq r^k - 1$ ) e per ogni  $h$  (con  $0 \leq h < r^{-k}$ ) vale:

$$f(sr^{-k} + h) - f(sr^{-k}) = \epsilon(k, s)r^{-Hk}f(r^k h) \quad (1.2)$$

dove  $\epsilon(k, s) \in \{-1, 1\}$ .

*Osservazione 1.5.* Le coordinate della curva di Peano costruite nella sezione precedente sono funzioni auto-affine con parametro  $H = \frac{1}{d}$  e base  $r = 3^d$ . Basta infatti sostituire nella relazione (1.1) :

- $r = 3^d$ ;
- $t = sr^{-k} + h = \Phi(t_s)_{s \in \mathbb{N}}$ ;
- $t(k) = sr^{-k} = s3^{-kd} = \Phi(t_1, \dots, t_{kd}, \mathbf{0})$ .

*Osservazione 1.6.* In generale una funzione auto-affine non è necessariamente continua.

**Teorema 1.7** (Hölderianità). *Le coordinate  $x_i$  della curva di Peano  $d$ -dimensionale  $\alpha$  sono  $1/d$ -hölderiane.*

La dimostrazione di questo teorema segue immediatamente da un risultato più generale sulle curve auto-affini.

**Proposizione 1.8** (Hölderianità auto-affine). *Se  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e auto-affine con parametro di scala  $H$ , allora è anche hölderiana di parametro  $H$ . Ovvero esiste  $\lambda > 0$  tale che  $\forall t, t' \in [0, 1]$ :*

$$|f(t) - f(t')| \leq \lambda |t - t'|^H.$$

*Dimostrazione.* Essendo  $f$  continua ammette massimo  $M$  sul compatto  $[0, 1]$ , inoltre la relazione (1.2) deve valere almeno  $\forall h \in [0, r^{-k}]$  (per continuità).

Dati  $t, t' \in [0, 1]$  si consideri  $k_0 := \max\{k \geq 0 \mid |t - t'| \leq r^{-k}\}$ . I casi possibili sono due:

1. esistono  $t_a = sr^{-k_0}$  e  $t_b = (s+1)r^{-k_0}$  tali che  $t_a \leq t \leq t_b \leq t'$ ;

2. esistono  $t_a = sr^{-k_0}$  e  $t_b = (s+1)r^{-k_0}$  tali che  $t_a \leq t \leq t' \leq t_b$ .

Applicando la relazione (1.2) si trova rispettivamente:

$$\begin{aligned} (1) \quad |f(t) - f(t')| &\leq |f(t) - f(t_a)| + |f(t_b) - f(t_a)| + |f(t') - f(t_b)| \leq \\ &\leq 3Mr^{-Hk_0} = 3Mr^H r^{-H(k_0+1)}; \\ (2) \quad |f(t) - f(t')| &\leq |f(t) - f(t_a)| + |f(t') - f(t_a)| \\ &\leq 2Mr^{-Hk_0} = 2Mr^H r^{-H(k_0+1)}. \end{aligned}$$

Osservando che per definizione di  $k_0$  deve valere necessariamente  $|t - t'| \geq r^{-(k_0+1)}$ , in entrambi i casi si può concludere:

$$|f(t) - f(t')| \leq 3Mr^H r^{-H(k_0+1)} \leq 3Mr^H |t - t'|^H. \quad (1.3)$$

Da ciò segue la tesi.  $\square$

## 1.4 Distribuzione uniforme delle coordinate

L'obiettivo di questo paragrafo é dimostrare che le coordinate della curva di Peano sono *uniformemente distribuite*.

**Definizione 1.9** (Uniformemente distribuita). Una funzione  $f$  definita su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  si dice uniformemente distribuita (rispetto alla misura di Lebesgue  $\mathcal{L}$ ) se,  $\forall A \subset \mathbb{R}$  misurabile,  $f^{-1}(A)$  è misurabile e  $\mathcal{L}(f^{-1}(A)) = \mathcal{L}(A)$ .

Per semplicità ci si restringe al caso della curva di Peano bidimensionale ( $d = 2$ ,  $H = \frac{1}{2}$ ,  $r = 9$ ). In particolare si vuole mostrare che  $\forall A \subseteq [0, 1]^2$  misurabile  $\mathcal{L}^1(\alpha^{-1}(A)) = \mathcal{L}^2(A)$ . Dalla definizione di *auto-affine* (in particolare dalla relazione (1.2) estesa per continuità, applicata a  $h \in [0, 9^{-k}]$ ) e dalla surgettività della curva di Peano segue la seguente proprietà di tipo insiemistico (dove  $A$  è l'isometria rappresentata dalla matrice con  $(-1)^{\sigma_i(k)}$  sull'elemento  $i$ -esimo della diagonale e zeri altrove):

$$\alpha\left(\left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right) = \alpha\left(\frac{s}{9^k}\right) + A \frac{1}{3^k} \alpha([0, 1]) = \alpha\left(\frac{s}{9^k}\right) + A \left[0, \frac{1}{3^k}\right]^2.$$

In particolare si ottiene:

$$\mathcal{L}^2\left(\alpha\left(\left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right)\right) = \frac{1}{9^k} = \mathcal{L}^1\left(\left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right) \quad (1.4)$$

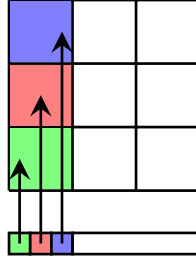


Figura 1.3: Immagine tramite la curva di Peano degli intervalli nella partizione di quadrati.

Da questa equazione segue immediatamente:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{L}^2([0, 1]^2) = \mathcal{L}^2(\alpha([0, 1])) = \mathcal{L}^2\left(\alpha\left(\bigcup_{s=0}^{9^k-1} \left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right)\right) = \\ &= \mathcal{L}^2\left(\bigcup_{s=0}^{9^k-1} \alpha\left(\left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right)\right) \stackrel{\text{subadd.}}{\leq} \sum_{s=0}^{9^k-1} \mathcal{L}^2\left(\alpha\left(\left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right)\right) \stackrel{\text{eq.(1.4)}}{=} 1 \end{aligned}$$

dunque, affinché la disuguaglianza sia un'uguaglianza, i quadrati dati dagli insiemi del tipo  $\alpha\left(\left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right)$  devono costituire (a meno di insiemi trascurabili) una partizione di  $[0, 1]^2$  (vedi figura 1.3).

Ricapitolando, definendo  $Q_{(a,b)}^k := \left(\frac{a}{3^k}, \frac{b}{3^k}\right) + \left[0, \frac{1}{3^k}\right]^2$ , fissato  $k$  vale che  $\{Q_{(a,b)}^k\}_{0 \leq a, b < 3^k}$  ricoprono tutto  $[0, 1]^2$  con intersezioni di misura nulla (i bordi) e  $\forall 0 \leq a, b < 3^k$  esiste  $s$  tale per cui:

$$\mathcal{L}^1(\alpha^{-1}(Q_{(a,b)}^k)) = \mathcal{L}^1\left(\left[\frac{s}{9^k}, \frac{s+1}{9^k}\right]\right) = \frac{1}{9^k} = \mathcal{L}^2(Q_{(a,b)}^k). \quad (1.5)$$

Sia adesso  $\Lambda = \{A \subset [0, 1]^2 \text{ misurabili t.c. } \mathcal{L}^1(\alpha^{-1}(A)) = \mathcal{L}^2(A)\}$ . È sufficiente provare che tale insieme contenga i rettangoli misurabili per concludere tramite il criterio di unicità delle misure la tesi sull'uniforme distribuzione delle coordinate della curva di Peano. Dall'identità (1.5) segue che  $\{Q_{(a,b)}^k\}_{k \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b < 3^k} \subseteq \Lambda$ . Inoltre la proprietà resta valida per unioni finite di elementi del tipo  $Q_{(a_n, b_n)}^{k_0}$ , infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1\left(\alpha^{-1}\left(\bigcup_n Q_{(a_n, b_n)}^{k_0}\right)\right) &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_n \alpha^{-1}(Q_{(a_n, b_n)}^{k_0})\right) \stackrel{q. \text{ disgiunti}}{=} \sum_n \mathcal{L}^1(\alpha^{-1}(Q_{(a_n, b_n)}^{k_0})) = \\ &= \sum_n \mathcal{L}^2(Q_{(a_n, b_n)}^{k_0}) = \mathcal{L}^2\left(\bigcup_n Q_{(a_n, b_n)}^{k_0}\right). \end{aligned}$$

e pertanto ogni rettangolo con vertici di coordinate della forma  $\frac{a}{3^k}$  è contenuto in  $\Lambda$  (si prende il massimo  $k$  dei vertici e si suddivide il rettangolo in quadrati di lato  $3^{-k}$ ).

Infine è sufficiente osservare che per densità è possibile approssimare ogni rettangolo  $R$  con una successione crescente (per inclusione) di rettangoli  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  del tipo descritto sopra, ovvero  $\bigcup T_n \uparrow R$ . Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\alpha^{-1}(R)) &= \mathcal{L}^1\left(\alpha^{-1}\left(\bigcup_n T_n\right)\right) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_n \alpha^{-1}(T_n)\right) \\ &= \sup_n \mathcal{L}^1(\alpha^{-1}(T_n)) = \sup_n \mathcal{L}^2(T_n) = \mathcal{L}^2(R) \end{aligned}$$

e da ciò segue quanto cercato.

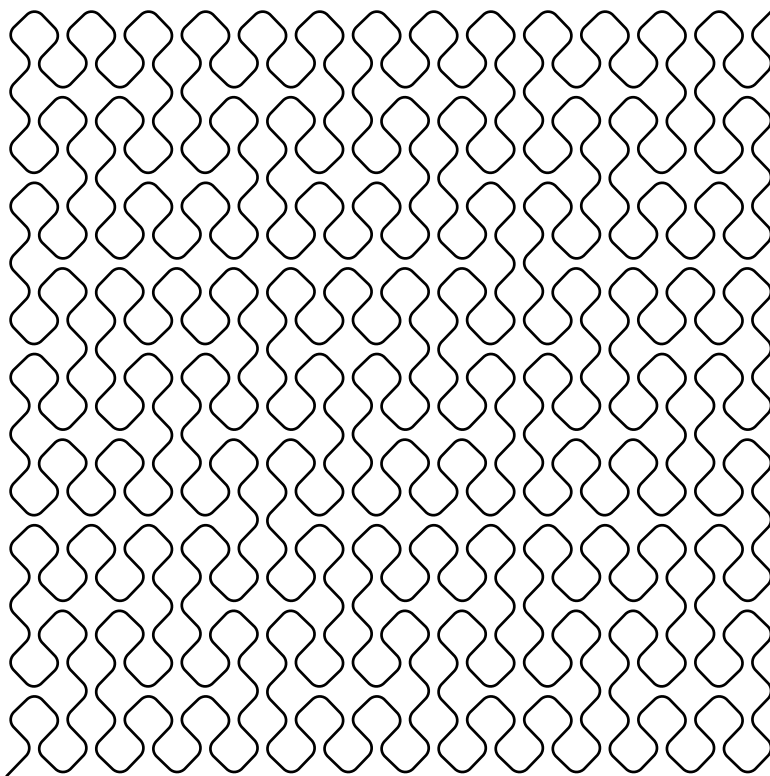


Figura 1.4: Valori della curva di Peano ottenuti suddividendo  $[0,1]$  in  $9^3$  parti. Gli angoli sono stati arrotondati per rendere più evidente l'andamento della funzione.

## 1.5 Le approssimanti della curva di Peano

Dal punto di vista applicativo (ma come si vedrà successivamente anche teorico) è utile definire le approssimanti della curva di Peano nel seguente modo:

**Definizione 1.10** (Approssimanti). Si definisce la  $k$ -esima approssimante della curva di Peano  $d$ -dimensionale  $\alpha$  come la spezzata  $\alpha^k(t) = (x_1^k, \dots, x_d^k)$  che collega i punti  $x_i^k(\frac{s}{3^{dk}}) := x_i(\frac{s}{3^{dk}})$  per  $i = 1, \dots, d$  ed  $s = 0, \dots, 3^{dk}$ .

*Osservazione 1.11.* Tutti i grafici finora mostrati rappresentano le approssimanti della curva di Peano secondo la definizione appena data. È possibile comunque definire altri tipi di approssimanti come in figura 1.5.

**Lemma 1.12.** Le approssimanti  $x_i^k$  verificano la seguente relazione:  $\forall u \in [\frac{s}{3^d}, \frac{s+1}{3^d}]$  con  $s \in \{0, 1, \dots, 3^d - 1\}$

$$x_i^{k+1}(u) - x_i^{k+1}\left(\frac{s}{3^d}\right) = (-1)^{\sigma(1)} \frac{1}{3} x_i^k(3^d u - s).$$

*Dimostrazione.* Sia  $t$  intero tale che  $\frac{t}{3^{d(k+1)}} \in [\frac{s}{3^d}, \frac{s+1}{3^d}]$ , con  $s \in \{0, 1, \dots, 3^d - 1\}$ . Estendendo la relazione (1.1) per continuità (con  $k = 1$ ) ed usando la definizione delle approssimanti si trova:

$$\begin{aligned} 3 \left( x_i^{k+1}\left(\frac{t}{3^{d(k+1)}}\right) - x_i^{k+1}\left(\frac{s}{3^d}\right) \right) &= 3 \left( x_i\left(\frac{t}{3^{d(k+1)}}\right) - x_i\left(\frac{s}{3^d}\right) \right) = \\ &= (-1)^{\sigma(1)} x_i \left( 3^d \left( \frac{t}{3^{d(k+1)}} - \frac{s}{3^d} \right) \right) = \\ &= (-1)^{\sigma(1)} \left( x_i \left( \frac{t}{3^{dk}} - s \right) \right) = \\ &= (-1)^{\sigma(1)} x_i^k \left( \frac{t}{3^{dk}} - s \right), \end{aligned}$$

ovvero:

$$x_i^{k+1}\left(\frac{t}{3^{d(k+1)}}\right) - x_i^{k+1}\left(\frac{s}{3^d}\right) = (-1)^{\sigma(1)} \frac{1}{3} x_i^k \left( \frac{t}{3^{dk}} - s \right).$$

La trasformazione descritta nell'enunciato manda allora i vertici della spezzata  $x^{k+1}$  nei vertici corrispondenti della spezzata  $x^k$ . Dunque anche i segmenti che congiungono tali vertici devono verificare la tesi, trattandosi di una trasformazione affine. Da ciò segue la relazione cercata.  $\square$

**Lemma 1.13.** Le  $\alpha^k$  sono funzioni  $\frac{1}{d}$ -hölderiane di costante  $D$  (non dipendente da  $k$ ).

*Dimostrazione.* Si è già provato nel lemma 1.7 che  $\alpha$  è  $1/d$ -hölderiana. Dunque  $\forall k > 0$  e  $\forall 0 \leq s \leq t \leq 3^{dk}$  interi vale:

$$\left| \alpha^k\left(\frac{t}{3^{dk}}\right) - \alpha^k\left(\frac{s}{3^{dk}}\right) \right| = \left| \alpha\left(\frac{t}{3^{dk}}\right) - \alpha\left(\frac{s}{3^{dk}}\right) \right| \leq D \left| \frac{t}{3^{dk}} - \frac{s}{3^{dk}} \right|^{1/d}.$$

Per concludere basta sfruttare il fatto che tra  $\frac{s}{3^{dk}}$  e  $\frac{s+1}{3^{dk}}$  le  $\alpha^k$  sono lineari.  $\square$

**Proposizione 1.14.** La successione  $\alpha^k(t)$  converge uniformemente ad  $\alpha$ .



*Dimostrazione.* Per la definizione di  $\alpha^k(t)$ , chiamando  $s := \lfloor \frac{3^{kd}t}{3^{kd}} \rfloor$ :

$$\begin{aligned} |\alpha^k(t) - \alpha(t)| &\leq |\alpha^k(t) - \alpha^k(s)| + |\alpha^k(s) - \alpha(s)| + |\alpha(t) - \alpha(s)| \\ &\leq |\alpha^k(t) - \alpha^k(s)| + |\alpha(s) - \alpha(s)| + |\alpha(t) - \alpha(s)| \\ &\leq 2D|t - s|^{1/d} \leq \frac{2D}{3^k}, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è sfruttato la  $\frac{1}{2}$ -hölderianità di  $\alpha$  e  $\alpha^k$  con costante  $D$ .

Pertanto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\alpha^k - \alpha\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2D}{3^k} = 0. \quad \square$$

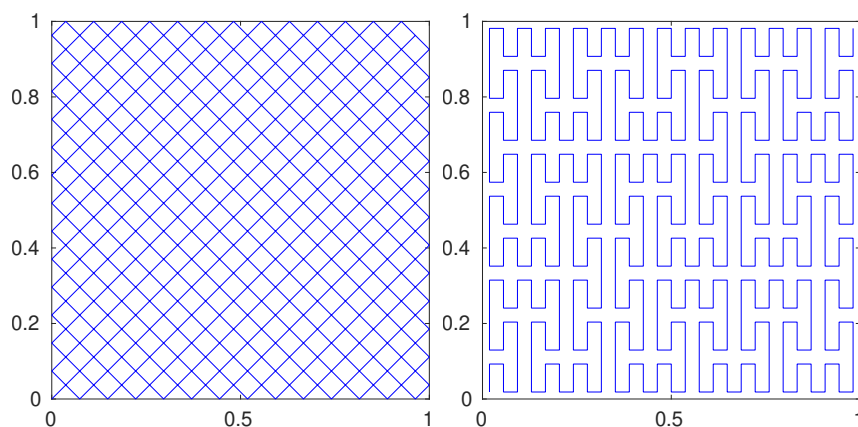


Figura 1.5: Grafici di due possibili approssimanti. A sinistra è riportata  $\alpha^3$  secondo la definizione 1.10. A destra invece è stata scelta  $\{\frac{1}{2 \cdot 3^{2k}} + \frac{i}{3^{2k}}\}_i$  come suddivisione di  $[0, 1]$ , anche in questo caso con  $k = 3$ .



## Capitolo 2

# Rough Paths

Questo capitolo introduce la teoria dei Rough Paths, soffermandosi in particolare sui risultati che saranno necessari nella trattazione successiva.

Tale teoria venne elaborata negli anni '90 da Terry Lyons con lo scopo iniziale di costruire una solida base per la trattazione di equazioni differenziali stocastiche, riuscendo ad includere casi che la teoria degli integrali di Young o di Itô non potrebbero affrontare.

Negli ultimi anni l'interesse nei confronti dei Rough Paths è cresciuto notevolmente, consentendo l'espansione della teoria in molteplici direzioni e con molteplici approcci (di tipo algebrico, probabilistico, analitico. . .). In queste pagine si è quindi scelto di seguire la trattazione di P. Friz e M. Hairer in [7]. Una estensione dei Rough Paths dalle equazioni ordinarie a quelle alle derivate parziali è la teoria delle *Regularity Structures* che valsero la medaglia Fields proprio ad Hairer nel 2014.

### 2.1 Motivazioni

Una classe di equazioni differenziali ordinarie particolarmente interessante per le sue applicazioni è quella delle ODE *controllate*, ovvero equazioni della forma:

$$\dot{Y}_t = f_0(Y_t) + f(Y_t)\dot{X}_t, \quad (2.1)$$

dove  $X$  rappresenta l'input ed  $Y$  l'output di un qualche sistema modellizzato da funzioni non-lineari  $f_0$  ed  $f$ . La necessità di una teoria in grado di affrontare casi di bassa regolarità sorge spontaneamente nel momento in cui si considera ad esempio un sistema soggetto a *white noise*. Nonostante Itô ed altri abbiano contribuito a costruire una rigorosa struttura matematica in grado di affrontare questi problemi, si è comunque cercato di colmare la mancanza di stabilità e continuità delle soluzioni fornite da queste teorie.

La teoria dei *rough paths* nasce quindi con lo scopo di superare le difficoltà menzionate ed ammettere come segnale di input  $X$  cammini di regolarità inferiore. Il primo ostacolo consiste proprio nel dare un senso alla (2.1), definendo l'integrale:

$$\int_0^t f(Y_s) dX_s.$$

Tale argomento verrà approfondito nel corso del capitolo, tuttavia è importante sottolineare già adesso come gli approcci precedenti (che sostanzialmente consistono in somme di Riemann-Stieltjes) riescano a fornire una buona definizione dell'integrale soltanto per  $X$  ed  $Y$  cammini  $\alpha$  e  $\beta$  hölderiani con  $\alpha + \beta > 1/2$  (risultato ottenuto da Young in [16] all'inizio del '900). In realtà il problema può essere semplificato osservando che le variazioni di  $Y$  sono controllate dalla (2.1), e pertanto  $Y$  deve essere "simile", in qualche senso, ad  $X$ . L'idea fondamentale su cui si fonda la teoria di Lyons è infatti quella di compensare l'irregolarità del cammino aggiungendo l'informazione mancante, tramite la definizione, o meglio *postulando*, il valore dell'integrale di  $X$  lungo sé stesso:

$$\int_s^t X_{s,r}^i dX_r^j.$$

Nel teorema di Lyons 2.15 il senso di "simile" si riduce ad  $Y = G(X)$ , mentre Gubinelli ne estende il significato in 2.18.

In ogni caso la barriera di Young viene abbassata da  $1/2$  ad  $1/3$ . É bene comunque sottolineare che non ci si è limitati a spostare il problema: la teoria dei rough paths è infatti in grado di trattare cammini di regolarità arbitrariamente bassa, a patto di continuare ad aggiungere informazione tramite integrali iterati successivi, generalizzando quanto descritto nella pagine che seguono.

## 2.2 Lo spazio dei Rough Paths

Sebbene la teoria possa essere estesa in modo naturale al caso di spazi di Banach, qui ci si limiterà a  $\mathbb{R}^d$  per semplicità.

**Definizione 2.1** ( $\alpha$ -Hölder rough paths). Per  $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ , si definisce lo spazio dei rough paths  $\alpha$ -hölderiani su  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$ , come l'insieme delle coppie  $(\gamma, \Gamma)$  tali che:

- $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua;
- $\Gamma : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  continua;
- 

$$\|\gamma\|_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \neq t \in [0, T]} \frac{|\gamma_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} < \infty, \quad \|\Gamma\|_{2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \neq t \in [0, T]} \frac{|\Gamma_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty; \quad (2.2)$$

- il "processo del secondo ordine"  $\Gamma$  verifica la *relazione di Chen*. Ovvero per ogni  $s, u, t \in [0, T]$  deve valere:

$$\Gamma_{s,t} - \Gamma_{s,u} - \Gamma_{u,t} = \gamma_{s,u} \otimes \gamma_{u,t}. \quad (2.3)$$

Dove si è usata la notazione  $\gamma_{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(t) - \gamma(s)$  e  $\Gamma_{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(s, t)$ .

La relazione di Chen è una relazione di tipo algebrico che nasce dalla necessità di definire un integrale che sia additivo rispetto agli estremi, come si discuterà meglio in seguito.

*Osservazione 2.2.* Nel caso di spazi di Banach  $\otimes$  è il prodotto tensore. Nel nostro caso è sufficiente interpretarlo in coordinate come prodotto di Kronecker.

*Osservazione 2.3.* Una notazione frequentemente utilizzata nella teoria dei Rough Paths prevede l'utilizzo di  $(X, \mathbb{X})$  al posto di  $(\gamma, \Gamma)$  e di  $Y$  anziché  $F(\gamma)$ .

*Osservazione 2.4.* Poiché  $\gamma_{t,t} = 0$  allora dalla (2.3) segue che  $\forall t \Gamma_{t,t} = 0$ . Inoltre, sempre grazie alla relazione di Chen (2.3), è sufficiente conoscere il cammino  $t \mapsto (\gamma_{0,t}, \Gamma_{0,t})$  per determinare completamente il processo del secondo ordine  $\Gamma$ .

Si conclude allora il paragrafo con la seguente definizione di integrale:

$$\int_s^t \gamma_{s,r} \otimes d\gamma_r \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{s,t}, \quad (2.4)$$

che in coordinate si riscrive come:

$$\int_s^t (\gamma_r^i - \gamma_s^i) d\gamma_r^j \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{s,t}^{i,j}.$$

*Osservazione 2.5.* Se  $\gamma$  è liscia allora si può definire  $\Gamma_{s,t} := \int_s^t \gamma_{s,r} \otimes \dot{\gamma}_r dr$  (dove l'integrale è quello usuale) e la relazione di Chen (2.3) è automaticamente soddisfatta. Questo fornisce un'intuizione del significato del processo del secondo ordine e del motivo della definizione (2.4).

## 2.3 Distanza $\alpha$ -hölderiana sui rough paths

Per la proprietà (2.2) è spontaneo pensare  $(\gamma, \Gamma)$  come elemento dello spazio di Banach  $C^\alpha \times C^{2\alpha}$  con la (semi-)norma  $\|\gamma\|_\alpha + \|\Gamma\|_{2\alpha}$ . È comunque importante notare che  $\mathcal{C}^\alpha$  non è un sottospazio vettoriale, per via della relazione (non lineare) di Chen (2.3).

**Definizione 2.6** (Distanza). Dati due rough paths  $\Gamma, \mathbf{B} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$  si definisce la distanza  $\alpha$ -hölderiana come:

$$\rho_\alpha(\Gamma, \mathbf{B}) := \sup_{s \neq t \in [0, T]} \frac{|\gamma_{s,t} - \beta_{s,t}|}{|t - s|^\alpha} + \sup_{s \neq t \in [0, T]} \frac{|\Gamma_{s,t} - B_{s,t}|}{|t - s|^{2\alpha}}.$$

Si può dimostrare che tale distanza rende  $\mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$  uno spazio metrico completo.

## 2.4 Non unicità del sollevamento

La relazione di Chen non è sufficiente a determinare  $\Gamma$  come funzione di  $\gamma$ . Infatti, data una qualsiasi  $F \in C^{2\alpha}([0, T], \mathbb{R}^{d \times d})$ , sostituendo  $\Gamma_{s,t}$  con  $\Gamma_{s,t} + F_t - F_s$ , il membro a sinistra della (2.3) non cambia.

In realtà vale anche il viceversa: sia  $\gamma$  una funzione a cui è possibile associare due differenti processi del secondo ordine  $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ , definendo  $G_{s,t} = \Gamma_{s,t} - \tilde{\Gamma}_{s,t}$  si ottiene dalla (2.3) che  $G_{s,t} = G_{u,t} + G_{s,u}$ . In particolare  $G_{s,t} = G_{0,t} - G_{0,s}$ .

*Esempio 2.7.* Il cammino nullo  $\gamma \equiv 0$  si può sollevare a rough path sia tramite il processo del secondo ordine  $\Gamma \equiv 0$ , sia tramite  $\Gamma : (s, t) \mapsto t - s$ .

*Esempio 2.8.* Un esempio banale è il *sollevamento canonico a rough path* di un cammino liscio  $\gamma$ , della forma  $(\gamma, \int \gamma \otimes d\gamma)$  (i rough path così ottenuti sono indicati con  $\mathcal{L}(C^\infty)$ ). Vale  $\mathcal{L}(C^\infty) \subset \mathcal{C}^\infty$ , dove con  $\mathcal{C}^\infty$  si intende l'insieme dei rough paths lisci.

*Osservazione 2.9.* Qualsiasi cammino scalare  $\gamma \in C^\alpha$  può essere sollevato ad un rough path imponendo  $\Gamma_{s,t} := (\gamma_{s,t})^2/2$ . Tuttavia per un cammino a valori vettoriali la situazione diventa più complicata. Un risultato in questa direzione è il *teorema di estensione di Lyons-Victoir* [12] che però richiede  $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ , escludendo quindi il caso della curva di Peano bidimensionale in cui  $\alpha$  è proprio  $\frac{1}{2}$ .

*Osservazione 2.10.* Il moto Browniano, grazie al teorema di continuità di Kolmogorov, risulta quasi certamente  $\alpha$ -hölderiano  $\forall \alpha < 1/2$ . Pertanto la teoria si presta naturalmente a trattare processi stocastici di questo tipo.

Nel caso  $\alpha > 1/2$  si ha una scelta canonica di  $\Gamma$  leggendo la definizione (2.4) da destra verso sinistra ed interpretando l'integrale come integrale di Young. Inoltre in tal caso  $\Gamma$  è unico dato che ogni incremento addizionale dovrebbe essere  $2\alpha$ -hölderiano e ciò sarebbe possibile solo per  $\alpha \leq 1/2$  (perchè una funzione  $\beta$ -hölder con  $\beta > 1$  sarebbe costante e vale l'osservazione 2.4).

## 2.5 Lo spazio dei rough paths geometrici

La relazione di Chen (2.3) come già detto racchiude la proprietà di additività dell'integrale rispetto agli estremi, tuttavia non implica nessuna forma di integrazione per parti. Da una buona teoria dell'integrazione ci si aspetterebbe un'identità del tipo:

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{s,t}^{i,j} + \Gamma_{s,t}^{j,i}) = \frac{1}{2} \int_s^t (\gamma_{s,r}^i d\gamma_r^j + \gamma_{s,r}^j d\gamma_r^i) = \frac{1}{2} \int_s^t d(\gamma_{s,r}^i \gamma_{s,r}^j) = \frac{1}{2} \gamma_{s,t}^i \gamma_{s,t}^j.$$

Ovvero che:

$$\text{Sym}(\Gamma_{s,t}) = \frac{1}{2} \gamma_{s,t} \otimes \gamma_{s,t}. \quad (2.5)$$

Tale equazione non è detto che valga per un generico rough path  $(\gamma, \Gamma)$ , pertanto si dà la seguente definizione:

**Definizione 2.11** (Rough paths geometrici). L'insieme dei rough paths geometrici  $\mathcal{C}_g^\alpha$  consiste nei  $(\gamma, \Gamma) \in \mathcal{C}^\alpha$  che soddisfano l'equazione (2.5).

Esempi di rough paths geometrici sono i sollevamenti canonici di cammini lisci (osservazione 2.5), per cui chiaramente vale la formula di integrazione per parti.

## 2.6 Integrazione lungo rough paths

In questo paragrafo si vuole dare significato all'espressione  $\int Y_t d\gamma_t$ , con  $\gamma \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$  e  $Y : [0, T] \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$  continua. Per avere buone proprietà sarà necessario limitare l'insieme di tali  $Y$  ammissibili.

Un approccio naturale sarebbe quello di provare a definire l'integrale come limite di somme di Riemann-Stieltjes, cioè:

$$\int_0^1 Y_t d\gamma_t = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[s,t] \in \mathcal{P}} Y_s [\gamma_{s,t}], \quad (2.6)$$

dove  $\mathcal{P}$  denota una partizione di  $[0, 1]$ . Questa definizione è detta *integrale di Young* e si dimostra che tale somma converge se  $\gamma \in C^\alpha$  e  $Y \in C^\beta$ , con  $\alpha + \beta > 1$  [16]. La principale intuizione dei rough paths consiste nel poter superare questa barriera (che nel caso  $\alpha = \beta$  si riduce ad  $\alpha > 1/2$ ) aggiungendo una struttura addizionale al problema, cioè il processo del secondo ordine, che *postula* il valore dell'integrale di  $\gamma$  lungo sé stesso.

Un primo caso è quello dato dall'integrazione di 1-forme  $Y = F(\gamma)$  lungo  $\Gamma = (\gamma, \Gamma) \in \mathcal{C}^\alpha$ , con  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$  almeno  $C^1$ . Si definisce *l'integrale rough*

"compensando" la (2.6) tramite il processo del secondo ordine:

$$\int_0^1 F(\gamma_s) d\Gamma_s = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[s,t] \in \mathcal{P}} F(\gamma_s)[\gamma_{s,t}] + dF(\gamma_s)[\Gamma_{s,t}]. \quad (2.7)$$

Nel seguito verrà dimostrata la buona definizione della (2.7).

**Lemma 2.12.** *Sia  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$  una funzione  $C_b^2$  e sia  $(\gamma, \Gamma) \in \mathcal{C}^\alpha$  per qualche  $\alpha > \frac{1}{3}$ . Definendo  $Y_s := F(\gamma_s)$ ,  $Y'_s := dF(\gamma_s)$  e  $R_{s,t}^Y := Y_{s,t} - Y'_s[\gamma_{s,t}]$  vale:*

$$Y, Y' \in C^\alpha \quad e \quad R^Y \in C^{2\alpha}.$$

*Dimostrazione.* Il fatto che  $F \in C_b^2$  implica che sia  $F$  che  $dF$  sono lipschitziane con costanti  $\|dF\|_\infty$  e  $\|d^2F\|_\infty$  rispettivamente. Pertanto vale  $\|Y\|_\alpha \leq \|dF\|_\infty \|\gamma\|_\alpha$  e  $\|Y'\|_\alpha \leq \|d^2F\|_\infty \|\gamma\|_\alpha$ .

Per il termine relativo al resto si consideri la funzione:

$$[0, 1] \ni \xi \mapsto F(\gamma_s + \xi \gamma_{s,t}).$$

Lo sviluppo di Taylor al primo ordine con resto di Lagrange implica che  $\exists \xi \in (0, 1)$  tale per cui:

$$R_{s,t}^Y = F(\gamma_t) - F(\gamma_s) - dF(\gamma_s)[\gamma_{s,t}] = \frac{1}{2} d^2F(\gamma_s + \xi \gamma_{s,t})[\gamma_{s,t}, \gamma_{s,t}],$$

e quindi si trova:

$$\|R^Y\|_{2\alpha} \leq \frac{1}{2} \|d^2F\|_\infty \|\gamma\|_\alpha^2. \quad \square$$

Young provò nel suo articolo [16] la seguente disuguaglianza:

$$\left| \int_s^t Y_r d\gamma_r - Y_s[\gamma_{s,t}] \right| \leq C \|Y\|_\beta \|\gamma\|_\alpha |t - s|^{\alpha+\beta}.$$

Allora, definendo  $Z_t := \int_0^t Y_r d\gamma_r$  come in (2.6), si trova:

$$Z_{s,t} = Y_s[\gamma_{s,t}] + o(|t - s|)$$

e  $\Xi_{s,t} := Y_s[\gamma_{s,t}]$  è una buona approssimazione locale, nel senso che è sufficiente a determinare  $Z$  tramite la (2.6). È utile introdurre lo spazio  $C_2^{\alpha,\beta}([0, T], \mathbb{R}^k)$  delle funzioni  $\Xi$  dal semplice  $\{0 \leq s \leq t \leq T\}$  in  $\mathbb{R}^k$  tali per cui:

$$\Xi_{t,t} = 0 \quad e \quad \|\Xi\|_{\alpha,\beta} \stackrel{def}{=} \|\Xi\|_\alpha + \|\delta\Xi\|_\beta < \infty \quad (2.8)$$

dove  $\|\Xi\|_\alpha = \sup_{s < t} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$  come al solito ed inoltre:

$$\delta\Xi_{s,u,t} = \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t} \quad e \quad \|\delta\Xi\|_\beta \stackrel{def}{=} \sup_{s < u < t} \frac{|\delta\Xi_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta}.$$

Finalmente è possibile dimostrare uno dei lemmi centrali della teoria dei Rough Paths: il Sewing Lemma.



**Lemma 2.13** (Sewing lemma). *Siano  $\alpha$  e  $\beta$  con  $0 < \alpha \leq 1 < \beta$ . Allora esiste un'unica applicazione lineare continua  $\mathcal{I} : C_2^{\alpha,\beta}([0, T], W) \rightarrow C^\alpha([0, T], W)$  tale per cui  $(\mathcal{I}\Xi)_0 = 0$  e*

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leq C|t - s|^\beta \quad (2.9)$$

con  $C$  dipendente soltanto da  $\beta$  e  $\|\delta\Xi\|_\beta$ .

*Osservazione 2.14.* Dalla (2.9) segue che  $I := \mathcal{I}\Xi$  deve necessariamente essere un limite alla Riemann, infatti data una partizione  $\mathcal{P}$  di  $[s, t]$  deve valere:

$$\begin{aligned} \left| I_{s,t} - \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \Xi_{u,v} \right| &= \left| \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (I_{u,v} - \Xi_{u,v}) \right| \leq \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} |I_{u,v} - \Xi_{u,v}| \\ &\stackrel{(2.9)}{\leq} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} C|u - v|^\beta \leq C|\mathcal{P}|^{\beta-1} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} |u - v| = O(|\mathcal{P}|^{\beta-1}) \end{aligned}$$

e cioè:

$$(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \Xi_{u,v}.$$

*Dimostrazione. Unicit .* Se  $I, \bar{I}$  soddisfano entrambi la (2.9), allora:

$$|(I - \bar{I})_{s,t}| = |I_{s,t} - \bar{I}_{s,t}| \leq |I_{s,t} - \Xi_{s,t}| + |\bar{I}_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leq 2C|t - s|^\beta.$$

Ma d'altra parte  $|(I - \bar{I})_{s,t}| = |(I - \bar{I})_t - (I - \bar{I})_s|$ , dunque la mappa  $t \mapsto I - \bar{I}$    " $\beta$ -Hölder" con  $\beta > 1$ , cio  costante. Inoltre per ipotesi  $(I - \bar{I})_0 = 0$ , da cui l'unicit .

**Esistenza** (Young). Sia  $\mathcal{P}$  una partizione di  $[0, T]$ . Definendo:

$$\int_{\mathcal{P}} \Xi := \sum_{[s,t] \in \mathcal{P}} \Xi_{s,t}$$

si vuole mostrare che esiste il limite  $\mathcal{I}\Xi := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \int_{\mathcal{P}} \Xi$ .

Se  $r$    il numero di intervalli della partizione  $\mathcal{P}$  ed  $r \geq 2$  allora  $\exists u \in [s, t]$  tale per cui  $[u_-, u], [u, u_+] \in \mathcal{P}$  e

$$|u_+ - u_-| \leq \frac{2}{r-1}|t - s|.$$

Quindi:

$$\left| \int_{\mathcal{P} \setminus \{u\}} \Xi - \int_{\mathcal{P}} \Xi \right| = |\delta\Xi_{u_-, u, u_+}| \leq \|\delta\Xi\|_\beta \left( 2 \frac{|t - s|}{r-1} \right)^\beta.$$

Iterando il ragionamento fino a ridurre la partizione a quella banale  $\mathcal{P} = \{[s, t]\}$  si arriva alla *disequazione massimale*:

$$\sup_{\mathcal{P} \subset [s,t]} \left| \Xi_{s,t} - \int_{\mathcal{P}} \Xi \right| \leq 2^\beta \|\delta\Xi\|_\beta |t - s|^\beta \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(l-1)^\beta} = 2^\beta \zeta(\beta) \|\delta\Xi\|_\beta |t - s|^\beta.$$

Adesso, date due partizioni  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$ , senza perdita di generalità si possono supporre una raffinamento dell'altra. Quindi, poiché ogni  $[s, t] \in \mathcal{P}_1$  è un elemento di  $\mathcal{P}_2$  oppure è suddiviso in sottointervalli da elementi di  $\mathcal{P}_2$ , si ottiene:

$$\left| \int_{\mathcal{P}_1} \Xi - \int_{\mathcal{P}_2} \Xi \right| = \left| \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}_1} \left( \Xi_{u,v} - \int_{\mathcal{P}_2 \cap [u,v]} \Xi \right) \right| \leq C \|\delta \Xi\|_\beta \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}_1} |u-v|^\beta \leq C \|\delta \Xi\|_\beta T |\mathcal{P}_1|^{\beta-1}$$

da cui, per  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\sup_{|\mathcal{P}_1| \vee |\mathcal{P}_2| < \epsilon} \left| \int_{\mathcal{P}_1} \Xi - \int_{\mathcal{P}_2} \Xi \right| \rightarrow 0.$$

Quindi il limite  $\mathcal{I}\Xi := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \int_{\mathcal{P}} \Xi$  esiste. La mappa  $\mathcal{I}$  è così ben definita, oltre ad essere continua in quanto lineare e limitata dalla stima appena ottenuta. Inoltre vale anche  $\delta I_{s,u,t} = 0$ , cioè l'additività rispetto agli estremi di integrazione.  $\square$

Si conclude quindi il paragrafo con il seguente teorema che prova la buona definizione dell'integrale rough (2.7). La dimostrazione è una diretta conseguenza del Sewing Lemma 2.13.

**Teorema 2.15** (Lyons). *Sia  $\Gamma = (\gamma, \Gamma) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$  con  $\alpha > \frac{1}{3}$  e  $F : V \rightarrow \mathcal{L}(L, W)$  una funzione  $\mathcal{C}_b^2$ . Allora, l'integrale rough definito in (2.7) esiste e vale la disuguaglianza:*

$$\left| \int_s^t F(\gamma_r) d\Gamma_r - F(\gamma_s)[\gamma_{s,t}] - dF(\gamma_s)[\Gamma_{s,t}] \right| \leq C \|F\|_{\mathcal{C}_b^2} (\|\gamma\|_\alpha^3 + \|\gamma\|_\alpha \|\Gamma\|_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha}$$

con  $C$  dipendente solo da  $T$  ed  $\alpha$ .

Inoltre l'integrale rough indefinito è  $\alpha$ -Hölder continuo su  $[0, T]$ .

## 2.7 Derivata di Gubinelli

L'integrale rough fin qui definito si basa fondamentalmente sul lemma 2.12. Questa osservazione motiva l'introduzione della nozione di *cammino controllato*  $Y$  (relativamente ad un cammino fissato  $X$ ) da parte di Gubinelli[8].

**Definizione 2.16** (Controlled Rough Paths). Dato  $X \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$ , indicando con  $W := \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ , il cammino  $Y \in C^\alpha([0, T], W)$  si dice "controllato" da  $X$  se esiste  $Y' \in C^\alpha([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, W))$  tale che il termine di resto  $R^Y$  dato implicitamente dalla relazione

$$Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R_{s,t}^Y,$$

soddisfa  $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$ . Questo definisce lo spazio dei *rough paths controllati*:

$$(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W).$$

Inoltre, sebbene  $Y'$  in generale non sia univocamente determinata da  $Y$ , si definisce qualsiasi di queste  $Y'$  come *derivata di Gubinelli* di  $Y$  (rispetto ad  $X$ ).

*Osservazione 2.17.* Si è già osservato nel paragrafo 2.3 che lo spazio dei rough paths  $\mathcal{C}^\alpha$  non è uno spazio vettoriale. Si può invece dimostrare che  $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ , dotato della norma  $\|Y, Y'\|_{X, 2\alpha} \stackrel{def}{=} \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}$ , è un ben definito spazio di Banach.

Si può adesso definire l'integrale di un cammino controllato da  $X$  lungo  $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ . Richiamando il lemma 2.12 e la definizione di integrale rough (2.7) è naturale porre:

$$\int_0^1 Y d\mathbf{X} \stackrel{def}{=} \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[s,t] \in \mathcal{P}} (Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}). \quad (2.10)$$

Sfruttando ancora una volta il Sewing Lemma 2.13 è possibile dimostrare il seguente teorema di Gubinelli [8]:

**Teorema 2.18** (Gubinelli). *Siano  $T > 0$ ,  $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$  per qualche  $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ , e sia  $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k))$ . Allora esiste una costante  $C$  dipendente solo da  $\alpha$  tale che:*

- L'integrale definito in (2.10) esiste e, per ogni  $s, t$ , si ha la disuguaglianza:

$$\left| \int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t} \right| \leq C(\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha) |t - s|^{2\alpha};$$

- la mappa da  $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k))$  in  $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \mathbb{R}^k)$  data da:

$$(Y, Y') \mapsto (Z, Z') := \left( \int_0^\cdot Y_t d\mathbf{X}_t, Y \right),$$

è una mappa lineare e continua tra spazi di Banach e vale la seguente disuguaglianza:

$$\|Z, Z'\|_{X, 2\alpha} \leq \|Y\|_\alpha + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + CT^\alpha (\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha).$$

## 2.8 Il Sewing Lemma applicato all'integrale di Young

L'integrale di Young può essere ritrovato applicando il Sewing Lemma al "germe"  $\Xi_{s,t} = Y_s X_{s,t}$ . Si verifica che vale  $\delta \Xi_{s,u,t} = -Y_{s,u} X_{u,t}$  e che pertanto il bound (2.8) è verificato, in generale, soltanto se  $Y$  e  $X$  sono Hölder con esponenti che si sommano a  $\beta > 1$ . Ancora una volta quindi si sottolinea la presenza della barriera  $\frac{1}{2}$  che rende inapplicabile l'integrale di Young a cammini di bassa regolarità.

Il "germe" dell'integrale Rough è invece dato da  $\Xi_{s,t} = Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}$  ed usando la notazione del lemma 2.12 si trova:

$$\delta \Xi_{s,u,t} = -R_{s,u}^Y X_{u,t} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t}.$$

Dato che  $X$  e  $Y'$  sono  $\alpha$ -Hölder ed  $R$  e  $\mathbb{X}$  sono  $2\alpha$ -Hölder, allora dalla disuguaglianza triangolare segue che è sufficiente porre  $1 < \beta := 3\alpha$  affinché siano verificate le ipotesi del Sewing Lemma. Ovvero  $\alpha > \frac{1}{3}$  come precedentemente descritto.

Infine si osserva che, aggiungendo a  $\Xi$  termini dipendenti dai processi di ordini successivi, è possibile diminuire ulteriormente la regolarità richiesta. In tal modo la teoria dei Rough Paths non si limita a spostare la barriera da  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{3}$  ma fornisce gli strumenti per affrontare una più vasta classe di problemi.

## Capitolo 3

# La curva di Peano come Rough Path

Come discusso nel capitolo precedente l'integrale di Young è in grado di affrontare problemi riguardanti al più cammini  $\alpha$ -holderiani con  $\alpha > \frac{1}{2}$ , mentre nel primo capitolo si è dimostrato che la curva di Peano è esattamente 1/2-hölder. La bassa regolarità rende necessario abbandonare la teoria di Young nel caso in cui si voglia dare una buona definizione di integrale o si desideri costruire una robusta teoria per equazioni differenziali controllate da tale curva. Inoltre non si tratta di una difficoltà ristretta alla curva di Peano, dato che nessuna space filling curve può essere  $\alpha$ -holderiana con  $\alpha > \frac{1}{2}$  (infatti  $\forall k$  l'unione delle immagini degli intervalli  $[i/k, (i+1)/k]$  deve ricoprire  $[0, 1]^2$  e quindi una o più di tali immagini deve avere diametro almeno  $2\pi^{-\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}$ ).

In questo capitolo viene data una costruzione esplicita del processo del secondo ordine per la curva di Peano bidimensionale, in modo da rendere possibile l'applicazione, anche numerica, dei risultati enunciati nella sezione precedente. Come spesso accade si procede considerando successioni convergenti al cammino cercato (in qualche senso che verrà meglio specificato) per poi studiare separatamente la parte simmetrica ed antisimmetrica del processo del secondo ordine.

In teoria si potrebbe provare a sollevare la curva di Peano in altre dimensioni, costruendo di conseguenza anche i processi di ordine successivo al secondo. L'unico risultato a tal proposito trovato in letteratura è contenuto nella tesi di dottorato di Yam [15], allievo di Lyons, che costruisce un sollevamento per  $d = 3$ . I casi  $d = 2$  e  $d > 3$  non sembrano essere stati ancora trattati.

### 3.1 Parte simmetrica

La curva di Peano  $\gamma$  è descrivibile come limite delle approssimanti  $k$ -esime  $\gamma^k$  definite in 1.10. Dato che si tratta di mappe  $C^1$  a tratti è allora naturale sollevarle a rough path geometrici  $\Gamma^k = (\gamma^k, \Gamma^k)$  attraverso la relazione:

$$B_{s,t}^{k,i,j} := \frac{1}{2}(\Gamma_{s,t}^{k,i,j} + \Gamma_{s,t}^{k,j,i}) = \gamma_{s,t}^{k,i} \gamma_{s,t}^{k,j}$$

con  $i, j \in \{1, 2\}$ . Allora si pone come processo limite  $B_{s,t}^{i,j} := \gamma_{s,t}^i \gamma_{s,t}^j$ .

**Proposizione 3.1.** *Il processo  $B_{s,t}^{i,j}$  è tale che:*

$$\sup_{s \neq t \in [0,1]} \frac{|B_{s,t}|}{|t-s|} < \infty$$

ed inoltre  $B^k \rightarrow B$  uniformemente.

*Dimostrazione.* Nel primo capitolo si è vista la  $1/2$ -hölderianità della curva di Peano bidimensionale. Chiamando  $D$  la costante di Hölder corrispondente si trova:

$$|B_{s,t}^{i,j}| = |\gamma_{s,t}^i \gamma_{s,t}^j| \leq (D|t-s|^{1/2})^2 \leq D^2|t-s|,$$

da cui segue immediatamente la prima proprietà.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme:

$$\begin{aligned} |B_{s,t}^{k,i,j} - B_{s,t}^{i,j}| &= |\gamma_{s,t}^{k,i} \gamma_{s,t}^{k,j} - \gamma_{s,t}^i \gamma_{s,t}^j| \leq |\gamma_{s,t}^{k,i} (\gamma_{s,t}^{k,j} - \gamma_{s,t}^j)| + |(\gamma_{s,t}^{k,i} - \gamma_{s,t}^i) \gamma_{s,t}^j| \\ &\leq 2\|\gamma^{k,j} - \gamma^j\|_\infty + 2\|\gamma^{k,i} - \gamma^i\|_\infty \end{aligned}$$

e la tesi segue dal lemma 1.14. □

### 3.2 Area di Lèvy

Spesso nello studio di sollevamenti di cammini a rough paths è utile ridursi alla cosiddetta "area di Lèvy", ovvero la parte antisimmetrica del processo del secondo ordine  $\Gamma$ . Nel caso di cammini  $C^1$  si ha a disposizione la seguente formula esplicita:

$$A_{s,t}^{i,j} = \frac{1}{2}(\Gamma_{s,t}^{i,j} - \Gamma_{s,t}^{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \int_s^t \gamma_{s,r}^i d\gamma_r^j - \int_s^t \gamma_{s,r}^j d\gamma_r^i \right). \quad (3.1)$$

Uno degli aspetti più utili di tale definizione è l'interpretazione geometrica che si può dare della (3.1). Il cammino  $\gamma := (\gamma^i, \gamma^j)$  può essere supposto senza perdita di generalità chiuso, tramite l'aggiunta di un segmento che collega  $\gamma(s)$  e  $\gamma(t)$  (e che non

contribuisce all'integrale (3.1)). Inoltre, chiamando  $\omega$  la 1-forma  $\omega := \frac{1}{2}(xdy - ydx)$  ed osservando che  $d\omega = dx \wedge dy$ , dal teorema di Stokes segue immediatamente:

$$A_{s,t}^{i,j} = \int_{\gamma} \omega = \int_D d\omega$$

dove  $D$  è il dominio delimitato da  $\gamma$ .

Quindi si può concludere che  $A_{s,t}^{i,j}$  corrisponde all'area (con segno) racchiusa dal cammino  $\gamma$  tra  $s$  e  $t$  e dal segmento che ne congiunge gli estremi (vedi figura 3.1).

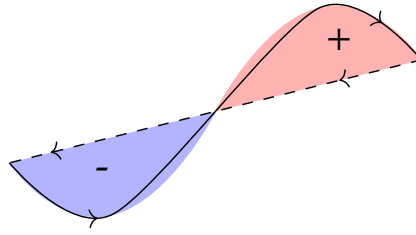


Figura 3.1: Esempio di Area di Lévy.

### 3.3 Area di Lévy per la curva di Peano

Ricordando la definizione 1.10 delle approssimanti della curva di Peano, è possibile porre come area di Levy da 0 a  $t$  dell'approssimante  $\gamma^k(t)$  la quantità:

$$A_{0,t}^{(k)} := \frac{1}{2} \left( \sum_{m=0}^{p(t)-1} \left[ \gamma_1 \left( \frac{m}{3^{2k}} \right) \gamma_2 \left( \frac{m+1}{3^{2k}} \right) - \gamma_2 \left( \frac{m}{3^{2k}} \right) \gamma_1 \left( \frac{m+1}{3^{2k}} \right) \right] + \gamma_1 \left( \frac{p(t)}{3^{2k}} \right) \gamma_2^k(t) - \gamma_2 \left( \frac{p(t)}{3^{2k}} \right) \gamma_1^k(t) \right)$$

dove  $p(t) = \lfloor 3^{2k}t \rfloor$ . Inoltre da ora in poi il fattore  $\frac{1}{2}$  verrà tralasciato per alleggerire la notazione.

La definizione di  $A_{0,t}^k$  appena data seguirebbe da un'applicazione esplicita della formula per l'area di Levy per cammini  $C^1$  a tratti,  $A_{s,t} := \frac{1}{2} \left( \int_s^t \gamma_{s,r}^1 d\gamma^2(r) - \int_s^t \gamma_{s,r}^2 d\gamma^1(r) \right)$ . Tuttavia si può ricavare anche guardando la parte antisimmetrica della relazione di Chen (2.3):

$$A_{s,t}^k - A_{s,u}^k - A_{u,t}^k = \gamma_{s,u}^1 \gamma_{u,t}^2 - \gamma_{s,u}^2 \gamma_{u,t}^1 \tag{3.2}$$

che nel caso di  $A_{0,t}$  diventa:

$$A_{0,t}^k - A_{0,s}^k = A_{s,t}^k + \gamma_s^1 \gamma_t^2 - \gamma_s^2 \gamma_t^1 \tag{3.3}$$

ed osservando che  $A_{s,t}^k = 0$  se  $\frac{m}{3^{2k}} \leq s \leq t \leq \frac{m+1}{3^{2k}}$  perché all'interno di tali intervalli l'approssimante  $k$ -esima è un segmento.

Lo scopo di questo paragrafo è quindi mostrare che ponendo

$$A_{0,t} := \lim_{k \rightarrow \infty} A_{0,t}^k$$

si ha una buona definizione per l'area di Lèvy di  $\gamma$ . In particolare basterà poi porre:

$$A_{s,t} := A_{0,t} - A_{0,s} - \gamma_1(s)\gamma_2(t) + \gamma_2(s)\gamma_1(t).$$

È utile iniziare la trattazione con i seguenti risultati:

**Lemma 3.2.** *Se  $\frac{m}{9} \leq s \leq t \leq \frac{m+1}{9}$ , con  $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ , allora:*

$$A_{s,t}^{k+1} = \pm \frac{1}{9} A_{9s-m, 9t-m}^k.$$

*Dimostrazione.* Segue dal lemma 1.12 e dal fatto che l'area con segno racchiusa dal cammino resta invariata se si effettuano traslazioni mentre se il cammino viene dilatato di un fattore  $\lambda$  va moltiplicata per  $\lambda^2$ .  $\square$

**Proposizione 3.3.** *Le  $A^k$  sono  $C$  – lipschitziane, nel senso che  $\forall s, t \in [0, 1]$ :*

$$|A_{s,t}^k| \leq C|t - s|.$$

*Osservazione 3.4.* Il termine "lipschitziano" è qui utilizzato in modo improprio, tuttavia è stato mantenuto perché rende bene l'idea del tipo di disuguaglianza da dimostrare.

*Dimostrazione.* Si procede per induzione su  $k$ .  $A^1$  è  $M$  – lipschitziana per qualche  $M > 0$  (perché  $C^1$  a tratti).

Se  $A^k$  è  $C$ -lipschitziana allora dati  $s, t \in \left[\frac{m}{9}, \frac{m+1}{9}\right]$  per il lemma 3.2 si trova:

$$|A_{s,t}^{k+1}| = \frac{1}{9} |A_{9s-m, 9t-m}^k| \leq \frac{1}{9} C|9t - 9s| = C|t - s|.$$

Restano da collegare i 9 intervalli per poter ottenere la lipschitzianità su tutto  $[0, 1]$ . Siano allora  $s \leq \frac{a}{9} \leq \frac{b}{9} \leq t$  con  $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . (Indico da ora in poi  $\frac{a}{9}$  e  $\frac{b}{9}$  semplicemente con  $a$  e  $b$  rispettivamente).

Allora, sfruttando la (3.2) due volte, si trova:

$$A_{s,t}^{k+1} = A_{s,a}^{k+1} + A_{a,b}^{k+1} + A_{b,t}^{k+1} + (\gamma_{a,b}^1 \gamma_{b,t}^2 - \gamma_{a,b}^2 \gamma_{b,t}^1) + (\gamma_{s,a}^1 \gamma_{a,t}^2 - \gamma_{s,a}^2 \gamma_{a,t}^1).$$

Adesso siano  $M$  la costante di Lipschitz per  $A^1$  e  $D$  la costante di Holdër per la curva di Peano bidimensionale:

$$\begin{aligned} |A_{s,t}^{k+1}| &\leq |A_{s,a}^{k+1}| + |A_{a,b}^1| + |A_{b,t}^{k+1}| + |(\gamma_{a,b}^1 \gamma_{b,t}^2 - \gamma_{a,b}^2 \gamma_{b,t}^1) + (\gamma_{s,a}^1 \gamma_{a,t}^2 - \gamma_{s,a}^2 \gamma_{a,t}^1)| \\ &\leq C|a - s| + M|b - a| + C|t - b| + 4[D(2|b - a|)^{1/2}]^2 \\ &\leq C|a - s| + (M + 8D^2)|b - a| + C|t - b| \leq C|t - s|. \end{aligned}$$



Dove nel primo passaggio si è sfruttato ancora una volta il lemma 3.5; nel secondo passaggio la C-lipschitzianità di  $A^{k+1}$  sui 9 intervalli, la M-lipschitzianità di  $A^1$ , la D-hölderianità di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  ed il fatto che  $t - s \leq 2(b - a)$ ; infine nel terzo passaggio si è supposto senza perdita di generalità che  $C \geq M + 8D^2$ .

Quindi anche  $A^{k+1}$  è C-lipschitziana. □

Si può mostrare adesso che la successione degli  $A_{0,t}^k$  converge uniformemente.

**Lemma 3.5.** *Fissato  $k \in \mathbb{N}$ , per ogni  $m \in \{0, \dots, 3^{2k}\}$  vale:*

$$A_{0, \frac{m}{3^{2k}}}^{(k+1)} = A_{0, \frac{m}{3^{2k}}}^{(k)}.$$

*Dimostrazione.* È sufficiente verificare che  $A_{0, \frac{m+1}{3^{2k}}}^{(k+1)} - A_{0, \frac{m}{3^{2k}}}^{(k+1)} = A_{0, \frac{m+1}{3^{2k}}}^{(k)} - A_{0, \frac{m}{3^{2k}}}^{(k)}$  per ottenere la tesi tramite somme telescopiche.

$$\begin{aligned} A_{0, \frac{m+1}{3^{2k}}}^{(k+1)} - A_{0, \frac{m}{3^{2k}}}^{(k+1)} &= A_{\frac{m}{3^{2k}}, \frac{m+1}{3^{2k}}}^{(k+1)} + \gamma_1 \left( \frac{m}{3^{2k}} \right) \gamma_2 \left( \frac{m+1}{3^{2k}} \right) - \gamma_2 \left( \frac{m}{3^{2k}} \right) \gamma_1 \left( \frac{m+1}{3^{2k}} \right) = \\ &= \gamma_1 \left( \frac{m}{3^{2k}} \right) \gamma_2 \left( \frac{m+1}{3^{2k}} \right) - \gamma_2 \left( \frac{m}{3^{2k}} \right) \gamma_1 \left( \frac{m+1}{3^{2k}} \right) = A_{0, \frac{m+1}{3^{2k}}}^{(k)} - A_{0, \frac{m}{3^{2k}}}^{(k)}, \end{aligned}$$

dove si è usato nel primo passaggio la (3.3) e nel secondo l'osservazione che  $A_{\frac{m}{3^{2k}}, \frac{m+1}{3^{2k}}}^{(k+1)}$  è l'area di Lévy di un cammino ottenuto riscaldando  $\gamma^1$ , pertanto deve essere un multiplo di  $A_{0,1}^{(1)}$  che si verifica essere 0. □

**Lemma 3.6.** *Le  $A_{0,t}^k$  sono  $\frac{1}{2}$ -hölderiane.*

*Dimostrazione.* Per il lemma 3.3 si sa che  $|A_{s,t}^k| \leq C|t - s|$ . Inoltre dalla relazione (3.3) segue che:

$$\begin{aligned} |A_{0,t}^k - A_{0,s}^k| &\leq |A_{s,t}^k| + |\gamma_s^1 \gamma_t^2 - \gamma_s^2 \gamma_t^1| \leq C|t - s| + |\gamma_s^1 \gamma_{s,t}^2 - \gamma_s^2 \gamma_{s,t}^1| \leq \\ &\leq C|t - s| + 2D|t - s|^{1/2} \leq (C + 2D)|t - s|^{1/2}. \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 3.7.** *Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , vale la seguente disuguaglianza  $\forall t \in [0, 1]$ :*

$$|A_{0,t}^{(k+1)} - A_{0,t}^{(k)}| \leq \frac{C + 2D}{3^{k-1}}.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} |A_{0,t}^{(k+1)} - A_{0,t}^k| &\leq |A_{0,t}^{(k+1)} - A_{0, \frac{\lfloor 3^{2(k+1)} t \rfloor}{3^{2(k+1)}}}^{(k+1)}| + |A_{0, \frac{\lfloor 3^{2(k+1)} t \rfloor}{3^{2(k+1)}}}^{(k+1)} - A_{0, \frac{\lfloor 3^{2k} t \rfloor}{3^{2k}}}^{(k)}| + |A_{0, \frac{\lfloor 3^{2k} t \rfloor}{3^{2k}}}^{(k)} - A_{0, \frac{\lfloor 3^{2k} t \rfloor}{3^{2k}}}^{(k)}| \\ &= |A_{0,t}^{(k+1)} - A_{0, \frac{\lfloor 3^{2(k+1)} t \rfloor}{3^{2(k+1)}}}^{(k+1)}| + |A_{0, \frac{\lfloor 3^{2(k+1)} t \rfloor}{3^{2(k+1)}}}^{(k+1)} - A_{0, \frac{\lfloor 3^{2k} t \rfloor}{3^{2k}}}^{(k+1)}| + |A_{0, \frac{\lfloor 3^{2k} t \rfloor}{3^{2k}}}^{(k)} - A_{0, \frac{\lfloor 3^{2k} t \rfloor}{3^{2k}}}^{(k)}| \\ &\leq \frac{C + 2D}{3^k} + \frac{C + 2D}{3^k} + \frac{C + 2D}{3^k}. \end{aligned}$$

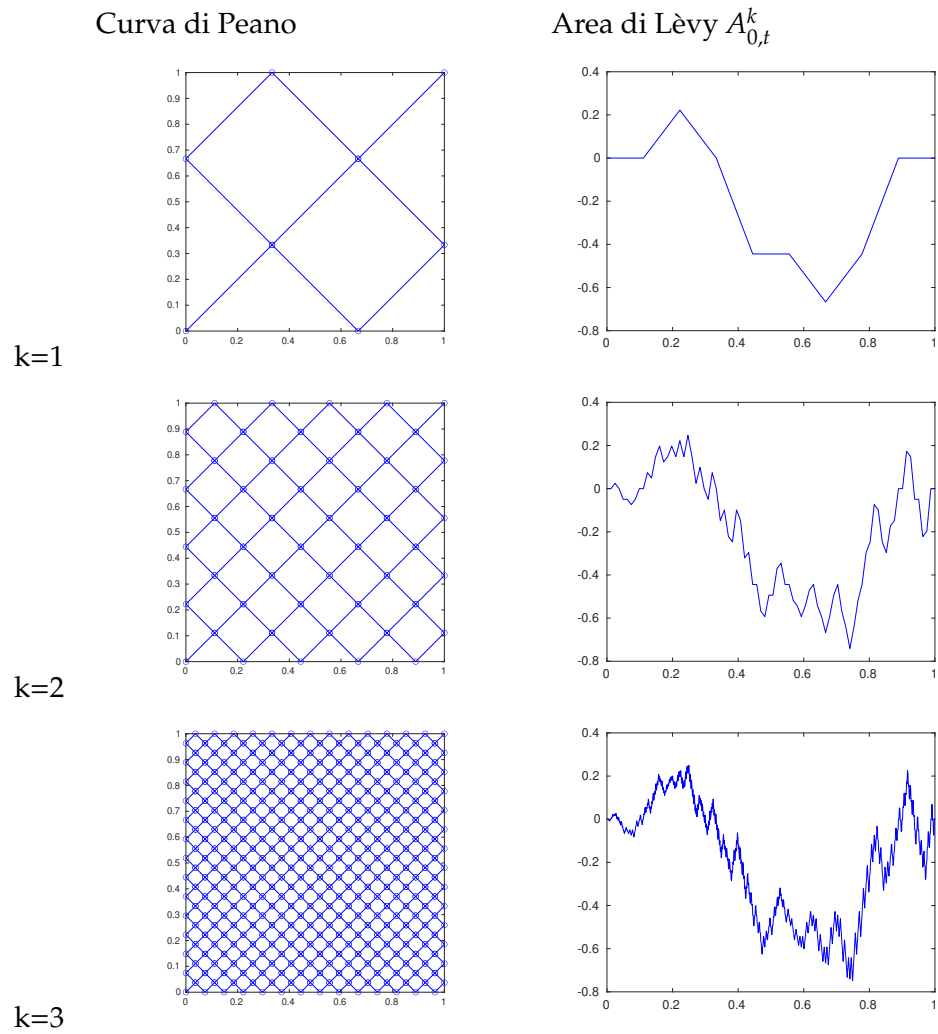


Figura 3.2: Grafici delle approssimazioni dell'Area di Lèvy tra 0 e  $t$  per  $k = 1, 2, 3$ .

Nel secondo rigo si è usato il lemma 3.5, nel terzo rigo si è usata la  $\frac{1}{2}$ -hölderianità delle  $A_{0,\cdot}^k$ .  $\square$

*Osservazione 3.8.* Il fatto che  $|A_{0,t}^{(k+1)} - A_{0,t}^{(k)}|$  sia sommabile implica non solo l'esistenza del limite ma anche la convergenza uniforme delle  $A_{0,\cdot}^k \rightarrow A_{0,\cdot}$ , ottenendo immediatamente la continuità di  $A_{0,t}$  e di conseguenza di  $A_{s,t}$ .

*Osservazione 3.9.* Il fatto che le approssimanti  $A^k$  siano C-lipschitziane e la convergenza puntuale sono sufficienti a provare che anche  $A$  sia C-lipschitziana. In formule questo si riscrive come:

$$\sup_{s \neq t \in [0,1]} \frac{|A_{s,t}|}{|t-s|} < \infty.$$

Si è pertanto costruito un processo del secondo ordine  $\Gamma_{s,t} := B_{s,t} + A_{s,t}$  per la curva di Peano  $\gamma$ . In particolare le proprietà 1 e 2 della definizione di Rough Path (con  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) seguono dall'osservazione 3.8 e dalla continuità di  $B_{s,t}$  e di  $\gamma$ . La proprietà 3 segue invece dall'osservazione 3.9 e dalla proposizione 3.1. Infine la parte antisimmetrica dell'identità di Chen (3.2) vale per le  $A_{s,t}^k$  e di conseguenza anche per  $A_{s,t}$  perché passa al limite puntuale. Tramite lo stesso ragionamento si trova che la parte simmetrica vale per  $B_{s,t}$  e dunque che il processo costruito  $\Gamma$  soddisfa anche la proprietà 4 della definizione di rough path.

Si può quindi concludere che  $(\gamma, \Gamma) \in \mathcal{C}^{1/2}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ .

### 3.4 Convergenza nello spazio dei Rough Paths

**Proposizione 3.10.** *Siano  $\Gamma^k = (\gamma^k, \Gamma^k)$  e  $\Gamma = (\gamma, \Gamma)$  i rough paths ottenuti sollevando le approssimazioni  $k$ -esime della curva di Peano nel modo descritto precedentemente. Allora  $\Gamma^k \rightarrow \Gamma$  nello spazio  $(\mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^2), \rho_\alpha)$  per ogni  $\alpha < \frac{1}{2}$ .*

*Dimostrazione.* Occorre provare che  $\rho_\alpha(\Gamma^k, \Gamma) \rightarrow 0$  e cioè che tendono a 0 i due addendi:

$$\sup_{s \neq t \in [0,T]} \frac{|\gamma_{s,t}^k - \gamma_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{s \neq t \in [0,T]} \frac{|\Gamma_{s,t}^k - \Gamma_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}}.$$

Essendo  $\Gamma_{s,t} = B_{s,t} + A_{s,t}$ , con  $A$  la parte antisimmetrica e  $B$  la parte simmetrica di  $\Gamma$ , si può mostrare la convergenza in tre passi.

- *Area di Lévy.* Per quanto riguarda l'area di Lévy, applicando le relazioni (3.3) e (3.2), si trova:

$$\begin{aligned}
|A_{s,t}^k - A_{s,t}| &= |(A_{0,t}^k - A_{0,s}^k - \gamma_s^{k1} \gamma_t^{k2} + \gamma_s^{k2} \gamma_t^{k1}) - (A_{0,t} - A_{0,s} - \gamma_s^1 \gamma_t^2 + \gamma_s^2 \gamma_t^1)| \\
&\leq 2\|A_{0,\cdot}^k - A_{0,\cdot}\|_\infty + |\gamma_s^{k1} \gamma_t^{k2} - \gamma_s^{k2} \gamma_t^{k1} - \gamma_s^1 \gamma_t^2 + \gamma_s^2 \gamma_t^1| \\
&\leq 2\|A_{0,\cdot}^k - A_{0,\cdot}\|_\infty + 4\|\gamma^k - \gamma\|_\infty
\end{aligned}$$

D'altra parte per il lemma 3.3:

$$|A_{s,t}^k - A_{s,t}| \leq 2C|t - s|.$$

Dunque tramite la media geometrica delle due quantità appena trovate si ottiene:

$$|A_{s,t}^k - A_{s,t}| \leq 2C^{2\alpha} (\|A_{0,\cdot}^k - A_{0,\cdot}\|_\infty + 2\|\gamma^k - \gamma\|_\infty)^{1-2\alpha} |t - s|^{2\alpha}.$$

Per concludere allora è sufficiente notare che per l'osservazione 3.8 vale:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{s \neq t} \frac{|A_{s,t}^k - A_{s,t}|}{|t - s|^{2\alpha}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2C^{2\alpha} (\|A_{0,\cdot}^k - A_{0,\cdot}\|_\infty + 2\|\gamma^k - \gamma\|_\infty)^{1-2\alpha} = 0.$$

*Osservazione 3.11.* Il ragionamento qui proposto è un argomento standard di interpolazione e verrà ripetuto anche per gli altri addendi.

- *Cammino.* Analogamente a prima, si trova:

$$|\gamma_{s,t}^k - \gamma_{s,t}| = |(\gamma_t^k - \gamma_t) - (\gamma_s^k - \gamma_s)| \leq 2\|\gamma^k - \gamma\|_\infty,$$

e allo stesso tempo per il lemma 1.13:

$$|\gamma_{s,t}^k - \gamma_{s,t}| \leq 2D|t - s|^{1/2}.$$

Ancora una volta tramite media geometrica si ricava:

$$|\gamma_{s,t}^k - \gamma_{s,t}| \leq 2D^\alpha \|\gamma^k - \gamma\|_\infty^{1-2\alpha} |t - s|^{2\alpha/2}$$

e grazie al lemma 1.14 si ottiene la tesi.

- *Parte simmetrica.* Ripetendo per la terza volta il ragionamento:

$$\begin{aligned}
|B_{s,t}^{k,i,j} - B_{s,t}^{i,j}| &= |\gamma_{s,t}^{k,i} \gamma_{s,t}^{k,j} - \gamma_{s,t}^i \gamma_{s,t}^j| \leq |\gamma_{s,t}^{k,i} (\gamma_{s,t}^{k,j} - \gamma_{s,t}^j)| + |(\gamma_{s,t}^i - \gamma_{s,t}^{k,i}) \gamma_{s,t}^j| \\
&\leq 2\|\gamma^{k,j} - \gamma^j\|_\infty + 2\|\gamma^{k,i} - \gamma^i\|_\infty \leq 4\|\gamma^k - \gamma\|_\infty.
\end{aligned}$$

Inoltre per la proposizione 3.1:

$$|B_{s,t}^k - B_{s,t}| \leq D^2|t - s|$$

e la tesi segue come prima.

□

### 3.5 Esempio di implementazione dell'integrale rough

Una volta costruito esplicitamente il sollevamento a rough path  $\Gamma$  della curva di Peano bidimensionale  $\gamma$  è possibile integrare numericamente lungo tale cammino.

In particolare si sono voluti confrontare i comportamenti dell'integrale di Young e dell'integrale rough nel calcolo di:

$$\int_0^1 F(\gamma_r) d\gamma_r.$$

con  $F(x, y) = (x^2 + y^2)dx$ .

L'implementazione numerica consiste nell'approssimare rispettivamente la (2.6) e la (2.7) attraverso 3 possibili successioni di suddivisioni alla Riemann dell'intervallo  $[0, 1]$ :

1.  $\{\frac{i}{3^{2k}}\}_i$  per  $i = 0, \dots, 3^{2k}$ ;
2.  $0, \{\frac{1}{2 \cdot 3^{2k}} + \frac{i}{3^{2k}}\}_i, 1$  per  $i = 0, \dots, 3^{2k} - 1$ ;
3.  $\{\frac{i}{10^k}\}_i$  per  $i = 0, \dots, 10^k$ .

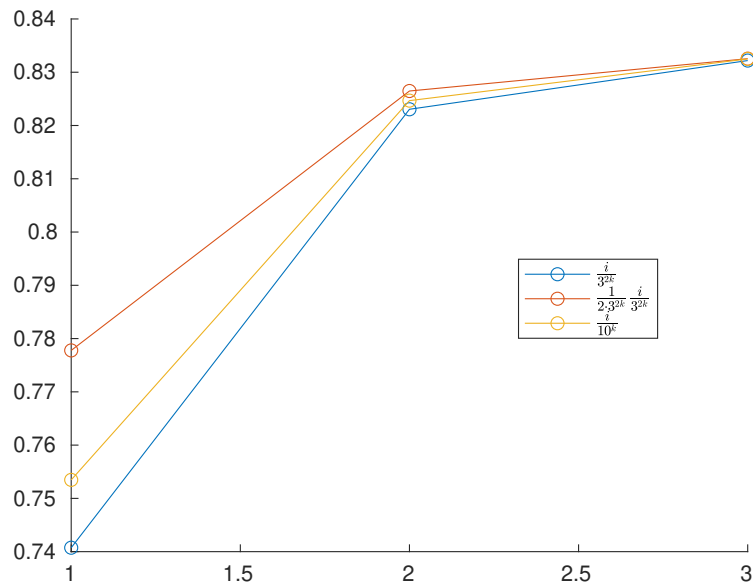


Figura 3.3: Valori ottenuti tramite la definizione di integrale rough per  $k = 1, 2, 3$ .

Le figure 3.4 e 3.3 riportano i risultati ottenuti, facendo emergere chiaramente la buona definizione del limite che definisce l'integrale rough e le ragioni che portano allo sviluppo di tale teoria. Infatti, a differenza dell'integrale di Young, il valore limite non dipende dalla successione di partizioni scelta.

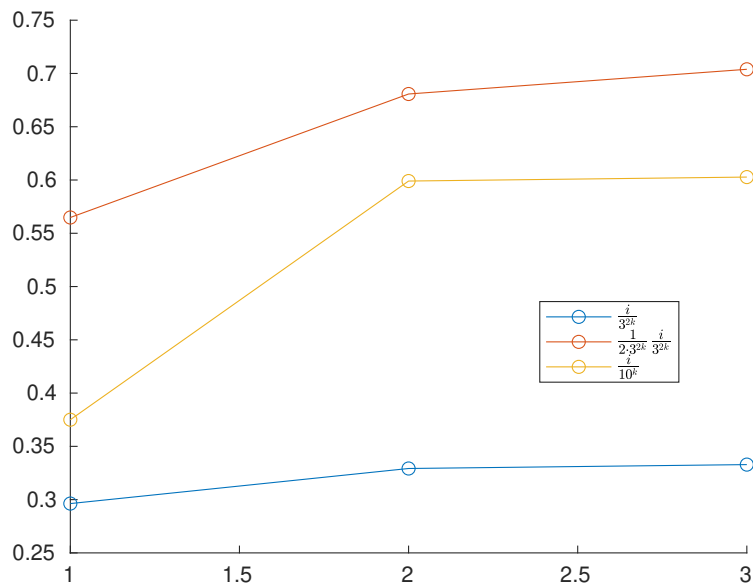


Figura 3.4: Valori ottenuti tramite somme alla Young per  $k = 1, 2, 3$ .

Inoltre, grazie alla buona definizione dell'integrale rough ed alle proprietà della curva di Peano, è possibile trovare degli accorgimenti che riducono il tempo di calcolo, ad esempio:

- per calcolare i valori della curva di Peano, nei casi di partizioni come la (1) e la (2), risulta più conveniente sfruttare l'auto-affinità rispetto alla formula esplicita data nel primo capitolo;
- come possibile successione di partizioni nel calcolo dell'integrale la prima tra quelle elencate risulta particolarmente efficiente. Infatti è sufficiente determinare soltanto la parte simmetrica del processo del secondo ordine, essendo  $A_{\frac{i}{3^{2k}}, \frac{i+1}{3^{2k}}} = 0$  per i lemmi precedentemente dimostrati.

## Capitolo 4

# Applicazioni e conclusioni

In questo capitolo vengono descritte brevemente alcune applicazioni della curva di Peano e delle space-filling curves. È possibile comunque riassumere tali applicazioni in quella che Bartholdi e Platzman definirono "*Generic Space-Filling Heuristic*" [3]:

1. trasformare il problema sul quadrato unitario in un problema sull'intervallo unitario tramite una space-filling curve;
2. risolvere il (più facile) problema sull'intervallo unitario;

Segue una breve introduzione alle equazioni differenziali rough ed una lista di domande rimaste ancora aperte.

### 4.1 Parallel computing e PDE

In molte aree della ricerca scientifica è necessario effettuare simulazioni numeriche di processi e fenomeni che senza particolari accorgimenti sarebbero intrattabili anche per i più moderni supercomputers: dallo studio delle proprietà aerodinamiche dei veicoli alle previsioni meteorologiche, dalla fisica molecolare all'astrofisica. In genere la strategia che consente di rendere trattabili tali problemi è quella della parallelizzazione, cioè la suddivisione del dominio computazionale in parti "uguali" da distribuire ai cores disponibili.

Nel caso della risoluzione numerica di una PDE su un dominio assegnato si procede determinando una griglia di nodi corrispondenti ai punti in cui verranno calcolati i valori della soluzione approssimata. Si vorrebbe inoltre una densità di nodi maggiore nelle zone che necessitano di una precisione più grande.

Il problema fondamentale consiste quindi nel determinare come suddividere tale griglia affinché la parallelizzazione avvenga nel modo più efficiente possibile. Tra i criteri più importanti da rispettare ci sono sicuramente i due seguenti:

- ogni core deve essere sottoposto allo stesso carico computazionale (ad esempio imponendo che ogni partizione contenga lo stesso numero di incognite);
- il tempo impiegato nella comunicazione tra i processori deve essere trascurabile rispetto al tempo necessario per la risoluzione del problema stesso (ad esempio richiedendo che i bordi delle partizioni siano più corti possibili, così da rendere minimo il numero di incognite "accoppiate" tra i cores);

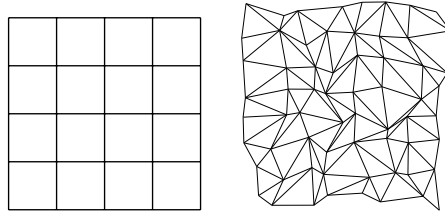


Figura 4.1: Esempi di due possibili griglie di nodi per lo studio di una PDE.

Le space-filling curves risultano dunque particolarmente adatte al partizionamento del dominio, grazie alle numerose proprietà, come quelle discusse nel capitolo 1 a proposito della Curva di Peano:

- forniscono un ordine *sequenziale* su domini computazionali multidimensionali, semplificando la fase del partizionamento in carichi equidistribuiti e riducendo ad un'unica dimensione il problema;
- grazie alla continuità preservano le relazioni di "località", ovvero nodi con indici simili corrispondono a punti vicini nel dominio;

Uno degli approcci più utilizzati consiste nel calcolare un indice per ogni punto della griglia di discretizzazione invertendo la curva di Peano. Il numero di operazioni necessarie per partizionare una griglia di  $N$  punti è dell'ordine di  $O(N \log N)$  e non si richiede alcuna restrizione sulla struttura della griglia stessa.

## 4.2 TSP e Matching

Il "*Traveling salesperson problem*" (TSP) è certamente uno dei più famosi problemi di ottimizzazione combinatoria. In breve consiste nel trovare una permutazione  $\sigma \in S_n$  che minimizzi una funzione di costo dipendente dagli  $n$  punti assegnati  $x_1, \dots, x_n$ . Ad esempio per  $p > 0$ :

$$\min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n |x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)}|^p$$



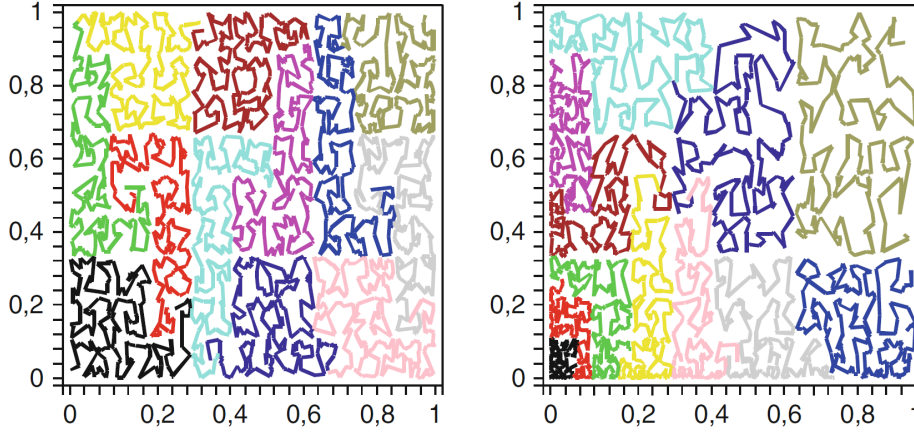


Figura 4.2: Due esempi di partizionamento tramite curva di Peano di una griglia con punti disposti in modo casuale [2].

In alcuni casi si aggiunge anche la richiesta che il percorso sia un ciclo. È ben noto che il TSP sia un problema *NP-hard* e pertanto spesso si è limitati ad approcci euristici oppure alla ricerca di bounds uniformi o probabilistici. Come mostrato in [14] è possibile sfruttare alcune space-filling curves per ottenere interessanti risultati analitici e computazionali.

Dal punto di vista euristico si può procedere nel seguente modo per individuare un percorso che collega i punti  $x_1, \dots, x_n$  nel quadrato  $[0, 1]^2$  (ma generalizzabile in dimensione  $d$  arbitraria):

1. viene fissata una space-filling curve  $\alpha$  (in molti casi la stessa curva di Peano descritta nel capitolo 1);
2. si calcola un insieme di punti  $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [0, 1]$  tali che  $\alpha(t_i) = x_i$ ;
3. si riordinano i  $t_i$  in modo tale che  $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(n)}$ ;
4. si definisce la permutazione  $\sigma \in S_n$  in modo che  $x_{\sigma(i)} = \alpha(t_{(i)})$ ;

Grazie alla proprietà di  $1/d$ -holderianità per la curva di Peano  $d$ -dimensionale mostrata nel capitolo 1, è possibile ottenere immediatamente il seguente risultato:

$$\min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n-1} |x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)}|^p \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})|^p \leq \|\alpha\|_{C^{1/d}}^p \sum_{i=1}^{n-1} |t_i - t_{i+1}|^{p/d}. \quad (4.1)$$

Ad esempio per  $p = d$  e sfruttando la disuguaglianza (1.3) si trova la stima:

$$= \|\alpha\|_{C^{1/d}}^p \sum_{i=1}^{n-1} |t_i - t_{i+1}| \leq \|\alpha\|_{C^{1/d}}^p \leq (3Mr^H)^p = (3(3^d)^{1/d})^p = 9^d.$$

I risultati provati nel capitolo 1 si possono sfruttare anche per ottenere bounds di tipo probabilistico. Ad esempio la proprietà di distribuzione uniforme delle coordinate della curva di Peano, cioè il preservare la misura di Lebesgue, consente di concludere che, date  $U_i$  variabili aleatorie indipendenti ed uniformemente distribuite su  $[0, 1]$ , le variabili  $X_i = \alpha(U_i)$  sono ancora indipendenti ed uniformemente distribuite su  $[0, 1]^d$ . Tale osservazione rende possibile trasportare in dimensione superiore risultati noti in dimensione bassa tramite la disuguaglianza 4.1.

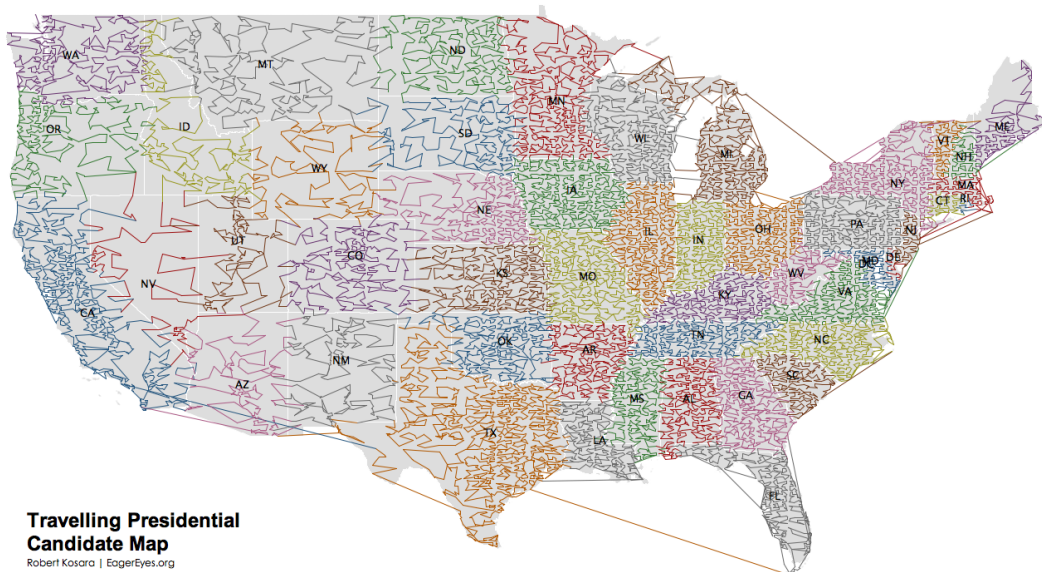


Figura 4.3: "Travelling Presidential Candidate Map". Percorso attraverso i 37000 codici postali degli USA generato tramite curva di Hilbert [11].

Tuttavia in alcuni casi si rivela utile anche il contrario, cioè passare da dimensione più bassa a dimensione più alta, come nel caso del *matching bipartito*. Consiste in una variante molto più semplice del TSP in cui però si suddividono i punti in due classi ( $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$ ) richiedendo che i collegamenti avvengano solo tra coppie di punti di classe diverse. L'obiettivo è trovare la permutazione  $\sigma \in S_n$  che minimizzi il costo totale:

$$C_{MB}^p = \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n |x_i - y_{\sigma(i)}|^p.$$

In dimensione 1, per  $0 < p < 1$ , la soluzione del problema non è banale (anche se esplicita). Nel caso aleatorio, per  $p \geq 1$ , è noto che se  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  sono variabili aleatorie i.i.d uniformi in  $[0, 1]^d$  allora valgono le seguenti stime asintotiche

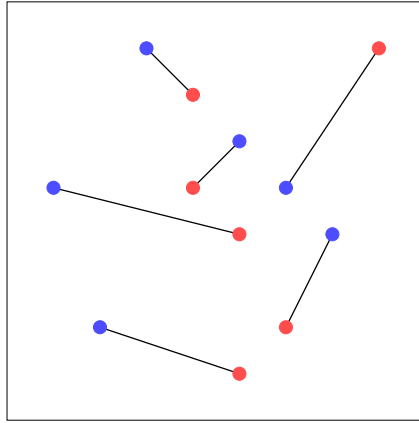


Figura 4.4: Esempio di matching bipartito

[1] :

$$\mathbb{E}[C_{MB}^{p,d}] \approx \begin{cases} n(n^{-1/2})^p & \text{se } d = 1, \\ n(n^{-1/2} \sqrt{\log(n)})^p & \text{se } d = 2, \\ n(n^{-1/d})^p & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Sfruttando le proprietà della curva di Peano è però possibile ottenere agevolmente altri risultati in dimensione 1, ad esempio il seguente:

**Proposizione 4.1.** *In dimensione 1 vale la seguente stima asintotica per il valore atteso del costo totale del matching bipartito con  $p = 1/2$ :*

$$\mathbb{E}[C_{MB}^{p=1/2,d=1}] \approx n(n^{-1/2} \sqrt{\log(n)}).$$

*Dimostrazione.* Sostituendo  $p = 1/2$ ,  $d = 2$  nella disuguaglianza (4.1) si trova:

$$\mathbb{E}[C_{MB}^{p=1/2,d=1}] \geq c \mathbb{E}[C_{MB}^{p=1/2,d=2}].$$

Pertanto:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[C_{MB}^{p=1/2,d=1}]}{n(n^{-1/2} \sqrt{\log(n)})} > 0$$

ed insieme al risultato noto ([5],[4])

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[C_{MB}^{p=1/2,d=1}]}{n(n^{-1/2} \sqrt{\log(n)})} < +\infty$$

si conclude che vale la tesi. □

### 4.3 Equazioni differenziali Rough

Lo sviluppo della teoria di Itô e in particolare l'introduzione di equazioni differenziali "controllate" dal moto Browniano hanno permesso il raggiungimento di risultati interessanti sia dal punto di vista applicativo che teorico. Nel caso della curva di Peano la teoria dei Rough Paths fornisce già tutti gli strumenti necessari per procedere nella stessa direzione, dando un significato ad equazioni differenziali del tipo:

$$\frac{dY_t}{dt} = f(Y_t) \frac{dX_t}{dt}$$

con  $X : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  la curva di Peano bidimensionale,  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^{2 \times 2}$  ed  $Y$  incognita.

In generale vale infatti il seguente teorema:

**Teorema 4.2.** *Siano  $(X, \mathbf{X}) \in \mathcal{C}^\beta([0, T], V)$ ,  $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ,  $f \in C_b^3(W, \mathcal{L}(W, V))$  e  $\xi \in W$ . Allora esistono  $0 < T_0 \leq T$  ed un unico elemento  $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\beta}([0, T_0], W)$ , con  $Y' = f(Y)$ , tale per cui:*

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s) d\mathbf{X}_s \quad \forall t \in [0, T_0],$$

ovvero  $Y$  risolve l'equazione differenziale rough (RDE)  $dY = f(Y)d\mathbf{X}$ .

La dimostrazione segue la stessa idea delle iterate di Picard. In particolare si definisce, per  $1/3 < \alpha < \beta$ , la mappa:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T : \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W) &\longrightarrow \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W) \\ (Y, Y') &\longmapsto \left( \xi + \int_0^\cdot f(Y_s) d\mathbf{X}_s, f(Y) \right). \end{aligned}$$

La soluzione  $(Y, Y')$  della RDE è allora un punto fisso di tale mappa. Si dimostra inoltre che l'insieme

$$\mathcal{B}_T := \{(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W) \mid Y_0 = \xi, Y'_0 = f(\xi) \text{ e } \|(Y - f(\xi)X_{0,\cdot}, Y' - f(\xi))\|_{X, 2\alpha} \leq 1\}$$

è un chiuso invariante per  $\mathcal{M}_{T_0}$  con  $T_0$  sufficientemente piccolo ed inoltre  $\mathcal{M}_{T_0}$  è una contrazione se ristretta a  $\mathcal{B}_{T_0}$ . Grazie al fatto che  $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$  è uno spazio di Banach, come enunciato nel capitolo 2, dal teorema del punto fisso segue la tesi.

La stessa dimostrazione fornisce quindi anche un metodo iterativo per ottenere numericamente una soluzione delle equazioni differenziali proposte.

## 4.4 Conclusioni

In queste pagine sono stati affrontati i passaggi preliminari necessari alla definizione dell'integrale di 1-forme lungo la curva di Peano ed alla costruzione di soluzioni per equazioni differenziali controllate da tale curva. I possibili sviluppi in queste direzioni sono molteplici e qui si elencheranno solo alcune tra le domande che hanno motivato l'approfondimento dell'argomento:

- una volta sollevata a Rough Path la curva di Peano in dimensione 2, è possibile sfruttare tale costruzione per dare un senso ad integrali di 2-forme poco regolari? Ovvero, fissate  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , è possibile trovare una 1-forma  $\omega$  tale per cui si abbia:

$$\int_{[0,1]^2} f(x, y) dg_1 \wedge dg_2 \stackrel{?}{=} \int_{\gamma} \omega,$$

dove  $\gamma$  è la curva di Peano? Una tale domanda sorge spontaneamente nel momento in cui si prova ad integrare forme differenziali su 2-superfici in  $\mathbb{R}^n$  di bassa regolarità (ad esempio con parametrizzazioni hölderiane). Alcuni risultati a proposito sembrerebbero essere stati ottenuti da Yam nella sua già citata tesi [15].

- nella sezione precedente si è specificato il significato di equazioni differenziali del tipo:

$$\frac{dy_t}{dt} = f(y_t) \frac{d\gamma_t}{dt}$$

con  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  la curva di Peano bidimensionale,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ed  $y$  incognita. Come variano le proprietà geometriche della soluzione  $y$  al variare della  $f$ ?

Ad esempio: quale condizione è necessario imporre sulla funzione  $f$  affinché la soluzione della RDE sopra descritta sia ancora "space-filling"? Una possibile congettura potrebbe essere una condizione del tipo  $\det(f) \neq 0$ , ma anche soltanto la definizione di "localmente space-filling" non è immediata.

Oppure: si è visto che la curva di Peano manda la misura di Lebesgue unidimensionale  $\mathcal{L}^1$  in  $\mathcal{L}^2$ . Come viene trasformata allora la misura di Lebesgue tramite la soluzione  $y$ ? Anche in questo caso una plausibile risposta potrebbe essere contenuta in  $\det(f)$ .

Ed infine: nel caso del moto Browniano, per funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 2}$ , le equazioni differenziali stocastiche del tipo visto sopra presentano in alcuni casi soluzioni che "vagano" in tutto lo spazio, ossia con leghe delle marginali

$Y_t$  assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ . Si può concludere lo stesso anche per la curva di Peano?

Altre possibili domande comprendono la questione della convergenza delle approssimanti della curva di Peano  $\Gamma^k \rightarrow \Gamma$  nello spazio  $(\mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^2), \rho_\alpha)$  per  $\alpha = \frac{1}{2}$ , dato che tramite interpolazioni nella Proposizione 3.10 si riesce a concludere soltanto per  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Infine è certamente non trascurabile il numero di domande ancora aperte su problemi come il matching bipartito ed il TSP.

# Appendice A

## Codice Matlab

### A.1 Area di Lèvy

La funzione  $\text{area}(t, k)$  ha lo scopo di calcolare il valore di  $A_{0,t}^k$  discusso nella sezione 3.3. L'implementazione della funzione  $\text{PeanoCurve}(k)$ , che restituisce in due array le ascisse ed ordinate della  $k$ -esima approssimazione della curva di Peano, può essere effettuata sia tramite la definizione data nel capitolo 1, che tramite la proprietà di auto-affinità, numericamente più conveniente.

---

```
1 function A=area(t,k)
2     %Partizione di [0,1]
3     P=0:3^(-2*k):t;
4     P=[P,t];
5
6     %Calcola i punti sulla curva di Peano relativi alla partizione scelta.
7     [X,Y]=PeanoCurve(P);
8
9     %Inizializza i valori dell'area di Levy A^12,
10    %del punto finale dell'intervallo della partizione gt.
11    Ast=0;
12    gt=[0;0];
13
14    %Applico la formula descritta nella tesi per A_{0,t}
15    for i=1:length(x)-1
16        gs=gt;
17        gt=[X(i+1);Y(i+1)];
18
```

```

19         A=A+gs(1)*gt(2)-gs(2)*gt(1);
20     end
21 end

```

---

## A.2 Integrale rough

Viene adesso riportato brevemente lo script in Matlab utilizzato per realizzare la figura 3.3. La funzione `roughIntegral(F,dF,t,k)` calcola il valore della (2.7), ovvero:

$$\int_0^t F(\gamma_s) d\Gamma_s \approx \sum_{[s,t] \in \mathcal{P}} F(\gamma_s)[\gamma_{s,t}] + dF(\gamma_s)[\Gamma_{s,t}],$$

dove per  $\mathcal{P}$  nel codice riportato si intende la partizione di  $[0, t]$  tramite i numeri della forma  $\frac{i}{3^{2k}}$  con  $i \in \{0, \dots, 3^{2k}\}$ , ma che può essere modificata arbitrariamente.

Inoltre  $F(\text{gs}, \text{gst})$  e  $dF(\text{gs}, \text{Gst})$  sono funzioni che prendono in input  $\text{gs} = \gamma_s$  e  $\text{gst} = \gamma_{s,t}$  (risp.  $\text{gs} = \gamma_s$  e  $\text{Gst} = \Gamma_{t,s}$ ) e restituiscono  $F(\gamma_s)[\gamma_{s,t}]$  (risp.  $dF(\gamma_s)[\Gamma_{s,t}]$ ).

---

```

1  function int=roughIntegral(F,dF,t,k)
2      %F: 1-forma da integrare.
3      %dF: differenziale di F da applicare a Gamma.
4      %t: estremo superiore di integrazione.
5      %k: iterazione della partizione da considerare.
6
7      %Si considera qui a titolo di esempio la partizione i/3^2k.
8      P=0:3^(-2*k):t;
9      P=[P,t];
10
11     %Calcola i punti sulla curva di Peano relativi alla partizione scelta.
12     %La funzione PeanoCurve restituisce due array contenenti le ascisse
13     %e le ordinate dei valori calcolati.
14     %Può essere implementata in modo generale tramite la formula in base 3.
15     %Oppure tramite auto-affinità si ottengono risultati migliori
16     %per specifiche partizioni come quella dell'esempio.
17     [X,Y]=PeanoCurve(P);
18
19     %Dichiara i valori dell'area di Levy A^12,
20     %del punto finale dell'intervallo della partizione gt,
21     %del processo del secondo ordine G e
22     %dell'integrale complessivo int.

```



```
23     Ast=0;
24     gt=[0;0];
25     Gst=zeros(2,2);
26     int=0;
27     s=0;
28     %Calcolo dell'integrale
29     for i=1:length(x)-1
30         gs=gt;
31         gt=[X(i+1);Y(i+1)];
32
33         s=t;
34         t=x(i+1);
35
36         gst=gt-gs;
37
38         %Calcolo dell'area di Levy A_{s,t}.
39         %In realtà per la particolare partizione scelta
40         %sarebbe sufficiente porre A=0;
41         Ast=area(t,k)-area(s,k)-gs(1)*gt(2)+gs(2)*gt(1);
42
43         %Calcolo di Gamma_{s,t} sommando anche la parte simmetrica.
44         Gst=0.5*[gst(1)*gst(1),gst(1)*gst(2)+A;
45                 gst(1)*gst(2)-A,gst(2)*gst(2)];
46
47         %Somma del "germe" dell'integrale rough.
48         %Per l'integrale di Young basta eliminare il termine in dF.
49         int=int+F(gs,gst)+dF(gs,Gst);
50     end
51 end
52 end
```

---



# Bibliografia

- [1] Miklós Ajtai, János Komlós, and Gábor Tusnády. On optimal matchings. *Combinatorica*, 4(4):259–264, 1984.
- [2] Michael Bader. *Space-filling curves: an introduction with applications in scientific computing*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] John J. Bartholdi and Loren K. Platzman. Heuristics based on spacefilling curves for combinatorial problems in euclidean space. *Management Science*, 34(3):291–305, 1988.
- [4] Sergey G Bobkov and Michel Ledoux. Transport inequalities on euclidean spaces for non-euclidean metrics. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 26(4):1–27, 2020.
- [5] Sergio Caracciolo, Matteo P D’Achille, Vittorio Erba, and Andrea Sportiello. The dyck bound in the concave 1-dimensional random assignment model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53(6):064001, 2020.
- [6] Jaquim E. DE Freitas, Ronaldo F. de Lima, and Daniel T. dos Santos. The  $n$ -dimensional peano curve. 2018.
- [7] Peter K Friz and Martin Hairer. *A course on rough paths*. Springer, 2020.
- [8] Massimiliano Gubinelli. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis*, 216(1):86–140, 2004.
- [9] Norio Kôno. On self-affine functions. *Japan Journal of Applied Mathematics*, 3(2):259–269, 1986.
- [10] Norio Kôno. On self-affine functions ii. *Japan Journal of Applied Mathematics*, 5(3):441–454, 1988.
- [11] Robert Kosara. Travelling Presidential Candidate Map. <https://eagereyes.org/zipscribble-maps/travelling-presidential-candidate-map>, 2006. [Online].

- [12] Terry Lyons and Nicolas Victoir. An extension theorem to rough paths. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 24, pages 835–847, 2007.
- [13] Peano. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, 36:157–160, 1890.
- [14] J Michael Steele. *Probability theory and combinatorial optimization*. SIAM, 1997.
- [15] S. Yam. Analytical and topological aspects of signatures. 2008.
- [16] Laurence C Young. An inequality of the hölder type, connected with stieltjes integration. *Acta Mathematica*, 67(1):251, 1936.