Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

# Teoria di Ramsey
## delle configurazioni esponenziali: risultati recenti

**Relatore**
**Prof. Mauro Di Nasso**

**Candidato**
**Tommaso Capolla**

**Anno accademico 2019/2020**

# Indice

# Introduzione

Dato un insieme $X$, una collezione di suoi sottoinsiemi si dice (debolmente) regolare per partizioni se è impossibile partizionare $X$ in un numero finito di pezzi che non contengono alcun sottoinsieme della collezione. Parlando in termini generali, si può dire che la teoria di Ramsey studia la regolarità per partizioni delle collezioni di sottoinsiemi. Ciò che la rende interessante è la forma che assumono i suoi enunciati:

> *Se $X$ è abbastanza grande, la collezione dei suoi sottoinsiemi che presentano una certa struttura è regolare per partizioni.*

Per esempio, il teorema di Ramsey [Ram, 1930] implica che, se l'intero $n$ è sufficientemente grande, non si possono *colorare* gli archi di un grafo completo di taglia $n$ con un numero fissato di colori, senza che almeno un sottografo completo di taglia fissata sia *monocromatico*. Spesso, come in questo caso, il termine *colorazione* viene usato come sinonimo di *partizione finita*, mentre il termine *monocromatico* sta per *incluso in un pezzo della partizione*.

A questo punto è significativo chiedersi *quanto* grande debba essere $X$, affinché la collezione dei suoi sottoinsiemi che hanno una data struttura sia regolare. Nel caso del teorema di Ramsey, la risposta a questo interrogativo è costituita dai cosiddetti *numeri di Ramsey*: il numero $R(r, b)$ è il minimo intero positivo $n$ per cui un grafo completo di taglia $n$, se colorato con due colori (rosso e blu), contiene necessariamente un sottografo completo rosso di taglia $r$ o un sottografo completo blu di taglia $b$. Ad oggi, si conosce il valore esatto soltanto per nove di questi numeri (per $b \geq r \geq 3$), mentre su altri sono note solo alcune stime. In [Radz] si può trovare un resoconto aggiornato sui risultati in merito.

Sebbene la teoria di Ramsey si inserisca nel contesto più generale del calcolo combinatorio, la ricerca di strutture *aritmetiche* regolari ha sempre avuto un ruolo primario, anche per la naturalezza con cui emergono i suoi risultati. La dimostrazione del teorema di Van der Waerden, ad esempio, è addirittura antecedente [Wae, 1927] ai risultati di F. P. Ramsey. Il suo enunciato si può formulare così:

> *Ogni colorazione dei naturali ammette una progressione aritmetica monocromatica di lunghezza fissata.*

Questo teorema — e le sue generalizzazioni — hanno permesso di dimostrare i più svariati risultati nel contesto della teoria *aritmetica* di Ramsey: pochi anni dopo la sua pubblicazione, R. Rado ha caratterizzato i sistemi lineari di equazioni diofantee omogenee per i quali esiste una soluzione monocromatica in ciascuna colorazione dei naturali [Rado, 1933]. Un altro risultato notevole è dovuto a N. Hindman, che ha dimostrato che in ogni partizione finita dei naturali, almeno uno dei pezzi contiene tutte le possibili somme degli elementi di un qualche suo sottoinsieme infinito [Hin, 1974]. Più recentemente, anche le equazioni non lineari sono state oggetto di studio: si veda [DNLB, 2018] per un'esposizione aggiornata sull'argomento.

Ancora oggi, il teorema di Van der Waerden ha un ruolo sostanziale nella dimostrazione di nuovi risultati: ad esempio, A. Sisto ha dimostrato, con l'uso di ultrafiltri, l'esistenza di triple monocromatiche della forma $a, b, a^b \,\big|\, a, b > 1$ (nel seguito: *triple esponenziali*) in ogni colorazione in due colori dei naturali [Sis, 2011]. In seguito, T. Brown ha trovato una dimostrazione *elementare* del teorema di Sisto [Bro, 2015] e poi J. Sahasrabudhe ha esteso l'enunciato a colorazioni arbitrarie dei naturali [JS1, 2018]. In quest'ultima pubblicazione e in [JS2, 2018], Sahasrabudhe ha dimostrato anche risultati più generali, rispondendo a questioni poste dagli altri due autori, ed evidenziandone altre tutt'ora aperte, che danno motivo di credere che questo nuovo capitolo sia solo all'inizio del suo sviluppo.

In questa tesi presento lo stato dell'arte di quella che potremmo chiamare *teoria di Ramsey delle configurazioni esponenziali.* Nella prima parte della trattazione vengono richiamati i risultati classici su cui poggiano gli sviluppi più recenti. Queste *pietre angolari*[1] — ad alcune di esse si è già accennato — sono presentate in ordine logico-cronologico e sono accompagnate da brevi note storiche; la dimostrazione viene illustrata solo se non appesantisce la lettura. Le principali opere di riferimento sono la monografia [GRS] per le dimostrazioni e il saggio [Soi] per le note.

La seconda parte costituisce il cuore del lavoro: il punto di partenza è il teorema di Sahasrabudhe già richiamato sopra:

> *Ogni colorazione dei naturali ammette una tripla esponenziale monocromatica.*

L'enunciato può essere generalizzato in due direzioni. Una consiste nel definire un'operazione di esponenziazione sulle collezioni di sottoinsiemi di naturali: per questa via si arriva al teorema di caratterizzazione dei sistemi *esponenziali* regolari, discusso nel terzo capitolo [JS2]. L'altra, invece, introduce la moltiplicazione nel contesto esponenziale: nel secondo capitolo viene dimostrata la regolarità del pattern $a, b, ab, a^b \,\big|\, a, b > 1$ e di pattern più complicati che mescolano esponenziazione e moltiplicazione [JS1]. Infine, sempre nel secondo capitolo, vengono presentati alcuni risultati che mostrano la non regolarità di certe collezioni: tra le loro implicazioni si trova la risposta — negativa — a uno degli interrogativi posti da Sisto in merito alla regolarità del pattern *esponenziale* infinito che definisce la collezione

$$\mathbf{FE}^{\mathrm{I}} = \{\mathrm{FE}^{\mathrm{I}}(X) \mid X \subset \mathbb{N},\ X \text{ infinito}\}$$

dove l'insieme $\mathrm{FE}^{\mathrm{I}}(X)$ si ottiene tramite composizioni ripetute dell'operazione di elevamento a potenza tra gli elementi di $X$. [Sis]

Ogni capitolo si chiude con la discussione delle questioni emerse nella trattazione.

I risultati presentati si collocano in un filone di ricerca molto recente, ancora in fase *esplorativa*: l'obiettivo principale di questo lavoro è quello di mettere in luce le idee chiave delle dimostrazioni già esistenti, potenzialmente generalizzabili e applicabili anche ad altri contesti.

[1] *"cornerstones"*, in [JS1, p. 13]

In conclusione, la validità di molti teoremi classici della teoria aritmetica di Ramsey è strettamente collegata alla struttura di semigruppo additivo e moltiplicativo: considerando l'operazione di esponenziazione, viene a mancare la proprietà di associatività. È interessante chiedersi, allora, che tipo di proprietà combinatorie continuino a valere in un contesto così generale. In qualche modo, i risultati della teoria di Ramsey delle configurazioni esponenziali contribuiscono a comprendere sempre meglio la natura dell'oggetto più affascinante e primitivo della matematica, i numeri naturali.

# Definizioni preliminari

**Partizioni vs colorazioni.** Dati un insieme $X$ e un cardinale $\kappa$, una *partizione di $X$ in $\kappa$ pezzi* è una collezione $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ di $\kappa$ parti di $X$ la cui unione disgiunta dà $X$. Cioè

$$|\mathcal{K}| = \kappa \qquad \bigcup_{C \in \mathcal{K}} C = X \qquad C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

per ogni $C_1, C_2 \in \mathcal{K}$. Le singole parti $C \in \mathcal{K}$ sono i *pezzi* della partizione. Una collezione $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di $X$ è *regolare per la partizione* $\mathcal{K}$ se almeno un elemento di $\mathcal{A}$ è incluso in un qualche pezzo $C \in \mathcal{K}$. Cioè se

$$\mathcal{A}|_C = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(C) \neq \emptyset$$

per qualche $C \in \mathcal{K}$. La collezione $\mathcal{A}$ è *(debolmente) regolare per partizioni (di $X$)* se è regolare per ogni partizione finita di $X$. Cioè se per ogni partizione di $X$ in un numero finito di pezzi, poniamo sia

$$X = C_1 \cup \cdots \cup C_k$$

con $k$ finito, esiste un sottoinsieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $A \subset C_i$, per qualche $i \leq k$.

Dati un insieme $X$ e un insieme finito $K$, una *colorazione di $X$ a colori in $K$* è una funzione

$$f \colon X \to K$$

Gli elementi $c \in K$ sono i *colori* della colorazione $f$. In particolare, per ogni $x \in X$, l'elemento $f(x) \in K$ è il *colore di $x$* secondo $f$. Un sottoinsieme $A \subset X$ è *monocromatico* rispetto a $f$ se $f$ è costante su $A$, cioè se tutti gli elementi di $A$ sono dello stesso colore, detto *colore di $A$*. Una collezione $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di $X$ è *regolare per la colorazione $f$* se almeno uno degli elementi $A \in \mathcal{A}$ è monocromatico.

Una colorazione $f$ di $X$ a colori in $K$ definisce naturalmente una partizione $\mathcal{K}(f)$ di $X$ in $|K|$ pezzi:

$$\mathcal{K}(f) = \left\{ f^{-1}\{c\} \,\middle|\, c \in K \right\} \subset \mathcal{P}(X)$$

dove $f^{-1}\{c\} = \{x \in X \mid f(x) = c\}$, per ogni $c \in K$. Una collezione di sottoinsiemi di $X$ è regolare per $f$ se e solo se è regolare per $\mathcal{K}(f)$.

D'altra parte, una partizione finita $\mathcal{K}$ di $X$ definisce naturalmente una colorazione $f(\mathcal{K})$ di $X$ a colori in $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{K}) \colon X &\to \mathcal{K} \\ x &\mapsto C_x \end{aligned}$$

dove $C_x \in K$ è l'unico pezzo che contiene $x$. Una collezione di sottoinsiemi di $X$ è regolare per $\mathcal{K}$ se e solo se è regolare per $f(\mathcal{K})$.

La corrispondenza perfetta tra partizioni finite e colorazioni implica la validità del seguente criterio.

> *Una collezione $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di un insieme $X$ è debolmente regolare per partizioni di $X$ se e solo se è regolare per ogni colorazione di $X$. Cioè se e solo se per ogni insieme $K$ finito e per ogni colorazione $f\colon X \to K$ esiste un elemento $A \in \mathcal{A}$ monocromatico.*

Il criterio stabilisce l'assoluta equivalenza delle due terminologie: quella delle partizioni e quella delle colorazioni. Ritengo che la seconda abbia il pregio di essere semplice da visualizzare, e che renda la lettura più scorrevole. Per questo motivo, il seguito della trattazione è scritto in termini di colorazioni, con l'unica eccezione nell'uso dell'espressione *regolare per partizioni*, in cui il termine *debolmente* viene sempre omesso.

**Regolarità di pattern ed equazioni.** Supponiamo di avere una collezione di insiemi descritta in modo esplicito, cioè per elencazione dei suoi elementi in funzione di uno o più parametri. Per esempio:

$$\mathcal{E} = \left\{ \{a, b, a^b\} \,\middle|\, a, b > 1 \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

In casi come questo, per semplicità di notazione, parleremo di regolarità per partizioni del *pattern* (a volte, della *configurazione*)

$$a, b, a^b \,\big|\, a, b > 1$$

Si noti che la scrittura non indica un insieme, ma definisce un insieme di insiemi (cioè la collezione $\mathcal{E}$).

La nozione di regolarità per partizioni ha senso anche per collezioni di $t$-uple di elementi di un qualche insieme. Dati un insieme $X$ e una sua colorazione $f$, una $t$-upla (per qualche $t \in \mathbb{N}$)

$$x = \left(x^{(1)}, \ldots, x^{(t)}\right) \in X^t$$

è *monocromatica* rispetto a $f$ se è monocromatico l'insieme delle sue componenti $\left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(t)}\right\}$. Si noti che la definizione si può estendere a collezioni di $\tau$-sequenze, intese come $t$-*uple* con $\tau$ componenti (per $\tau$ cardinale). L'estensione, comunque, non riguarda il contenuto di questa trattazione.

Consideriamo una collezione di $t$-uple descritta in modo implicito, cioè per separazione dei suoi elementi in base a una o più condizioni, ad esempio

$$\mathcal{I} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \,\middle|\, x + y = z \right\} \subset \mathbb{N}^3$$

In questo caso, parleremo di regolarità per partizioni dell'*equazione* (a volte, del *vincolo*)

$$x + y = z$$

**Alcuni simboli.** Quando non specificato diversamente, l'elenco di simboli che segue ne definisce il significato.

- Il simbolo $\mathbb{N}$ denota l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ dei numeri naturali, cioè i numeri interi e positivi.
- Il simbolo $\mathbb{N}_0$ denota l'insieme $\mathbb{N} \cup \{0\}$ degli interi non negativi.
- I simboli $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ denotano i rispettivi insiemi numerici.
- Dato un intero positivo $n \in \mathbb{N}$, il simbolo $[n]$ denota l'insieme

  $$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

  dei numeri naturali non più grandi di $n$.
- Dati due interi $m, n \in \mathbb{Z}$, i simboli $[m, n]$ e $(m, n]$ denotano, rispettivamente, gli insiemi

  $$\{m, m+1, \ldots, n\} \qquad \{m+1, \ldots, n\}$$

- Dati un numero reale $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e un insieme $X \subset \mathbb{R}$ di numeri reali, i simboli $X_{>\bar{x}}$ e $X_{\geq\bar{x}}$ denotano, rispettivamente, gli insiemi

  $$\{x \in X \mid x > \bar{x}\} \qquad \{x \in X \mid x \geq x\}$$

- Dato un insieme $X$, il simbolo $\mathcal{P}(X)$ denota l'insieme delle parti (o sottoinsiemi) di $X$.
- Dati un insieme $X$ e un cardinale $\nu$, il simbolo $\mathcal{P}^{(\nu)}(X)$ (risp. $\mathcal{P}^{(<\nu)}(X)$ e $\mathcal{P}^{(\leq\nu)}(X)$) denota l'insieme delle parti di $X$ di cardinalità pari a $\nu$ (risp. inferiore a $\nu$ e non superiore a $\nu$).
- Dati un insieme $X$ e un intero positivo $n$, il simbolo $X^n$ (risp. $X^{<n}$ e $X^{\leq n}$) denota l'insieme delle $n$-uple di elementi di $X$ (risp. delle $t$-uple di elementi di $X$ al variare di $t < n$ e delle $t$-uple di elementi di $X$ al variare di $t \leq n$).
- Dati un insieme $X$ e un intero positivo $n$, il simbolo $X^{[0,n]}$ denota l'insieme delle $(n+1)$-uple di elementi di $X$; un generico elemento di $X^{[0,n]}$ si scrive nella forma $x = \big(x^{(0)}, \ldots, x^{(n)}\big)$.
- Il simbolo $\star$ denota l'operazione binaria di elevamento a potenza, o esponenziazione:

  $$a \star b = a^b$$

  se in un'espressione compaiono anche altre operazioni binarie, $\star$ ha la precedenza.
- Il simbolo log denota la funzione *logaritmo in base* 2:

  $$\log x = \log_2 x$$

- Il simbolo exp denota la funzione *esponenziale di base* 2:

  $$\exp x = 2^x$$

# Parte I

# Prima parte

# Capitolo 1

# Teoria di Ramsey: risultati classici

## 1.1 Sottoinsiemi: il teorema di Ramsey

**Il problema dei calzini** Un primo esempio di regolarità per partizioni è il *problema dei calzini*, la cui soluzione è conosciuta anche come il *lemma dei cassetti*, o il *principio della piccionaia.* Delle tre formulazioni, la prima mi sembra quella più adatta al contesto.

> Un uomo ha molti calzini colorati, riposti in un cassetto buio. Quanti ne deve prendere per essere certo di averne almeno un paio dello stesso colore da indossare?

*Soluzione.* La risposta dipende dal numero di colori disponibili. Se, ad esempio, sono due, poniamo bianco e nero, prendendo due soli calzini resta la possibilità che siano di colori differenti: ma anche in questo caso, prendendone un terzo, certamente ci sarà un paio di calzini dello stesso colore. Non è difficile credere - né dimostrare - che se i calzini sono colorati con $k$ colori, è sufficiente prenderne $k + 1$ per averne almeno un paio *monocromatico.* $\square$

La soluzione è del tutto ovvia e certamente non si può eleggere a *pietra angolare* della teoria di Ramsey. Piuttosto, ne è la premessa, sulla cui validità si fondano gli altri risultati. Per completare la metafora architettonica, il principio della piccionaia potrebbe rappresentare i mattoni della casa, senza i quali non esisterebbero né la casa, né tantomeno le pietre angolari.

**Il rompicapo dei sei invitati.** Una versione non banale del problema dei calzini è il seguente *rompicapo.*[1]

> In una festa con sei invitati, ce ne sono almeno tre che si conoscono a vicenda o che si ignorano a vicenda.

*Soluzione.* Siano A, B, C, D, E, F i sei invitati alla festa. Per il principio della piccionaia, ognuno di essi conosce oppure ignora almeno tre degli altri cinque

[1] *"puzzle problem"*, in [GRS, p. 1]

invitati. Supponiamo, senza perdita di generalità, che A conosca B, C e D. Si danno due casi. Può essere che i tre invitati B, C e D si ignorino a vicenda, come volevamo dimostrare. In caso contrario, per esempio se B e C si conoscono, i tre invitati A, B e C si conoscono a vicenda, come volevamo dimostrare. □

Si noti che le soluzioni di questi primi due problemi non predicono il colore del paio di calzini che indosserà l'uomo, né se i tre invitati si conoscano o si ignorino a vicenda. Analogamente, i risultati di regolarità per partizioni esposti in questa trattazione sono risultati di esistenza, cioè non predicono in quale pezzo della partizione si trova un elemento della collezione data: dimostrano solo che un tale pezzo esiste.

Apro una breve parentesi per dire che la teoria di Ramsey non si occupa esclusivamente di risultati di esistenza. Per esempio, nel 1974 E. Szemerédi ha dimostrato che ogni insieme $A \subset \mathbb{N}$ tale che

$$\limsup_N \frac{|A \cap [N]|}{N} > 0$$

contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe [GRS, section 2.5].

**Verso il teorema di Ramsey.** Il rompicapo dei sei invitati contiene l'idea di fondo del teorema di Ramsey, applicata in un caso semplice. La notazione usata qui per descriverla in generale è stata introdotta da P. Erdős e R. Rado in [ER1].

**Definizione.** Dati $k, n, m \in \mathbb{N}$ tre interi positivi, diciamo che un insieme $X$ verifica la $m$-esima proprietà di Ramsey per colorazioni di $\mathcal{P}^{(n)}(X)$ in $k$ colori, e scriviamo

$$X \to (m)^n_k$$

se, per ogni colorazione dell'insieme $\mathcal{P}^{(n)}(X)$ in $k$ colori, si può trovare un sottoinsieme $A \subset X$ di cardinalità $m$ le cui parti di cardinalità $n$ sono tutte dello stesso colore. Cioè

$$\forall f\colon \mathcal{P}^{(n)}(X) \to \{c_1, \dots, c_k\} \ : \ \exists\, A \subset X \ : \ |A| = m \ \wedge \ f|_{\mathcal{P}^{(n)}(A)} = \text{cost.}$$

Gli interi $n, k$ si omettono nei casi in cui, rispettivamente, $n = 2$ e $k = 2$.

*Osservazione* 1. Il fatto che un insieme verifichi una certa proprietà di Ramsey dipende esclusivamente dalla sua cardinalità. Se $\xi$ è un cardinale, la scrittura

$$\xi \to (m)^n_k$$

indica che tutti gli insiemi di cardinalità maggiore o uguale a $\xi$ verificano la rispettiva proprietà di Ramsey.

*Osservazione* 2. Il rompicapo dei sei invitati coincide con l'asserzione

$$6 \to (3)$$

mentre una versione più generale del principio della piccionaia corrisponde a

$$mk + 1 \longrightarrow (m)^1_k$$

È naturale chiedersi quali insiemi, se ce ne sono, verificano una data proprietà di Ramsey. Nel 1930, alle prese con i suoi studi di logica formale, Frank Plumpton Ramsey trova la risposta.

**Teorema di Ramsey [Ram, 1930].** *Siano $k, n, m \in \mathbb{N}$ tre interi positivi. Esiste un intero positivo $R_{k,n}(m) \in \mathbb{N}$ tale che*

$$R_{k,n}(m) \to (m)^n_k$$

In termini di regolarità per partizioni, il teorema di Ramsey implica che, fissati tre interi positivi $k, n, m \in \mathbb{N}$, esiste un insieme finito $X$ per cui la collezione

$$\mathcal{A}^{(n)}(X, m) = \left\{ \mathcal{P}^{(n)}(A) \,\middle|\, A \subset X,\ |A| = m \right\} \subset \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}^{(n)}(X)\Big)$$

è regolare per ogni partizione di $\mathcal{P}^{(n)}(X)$ in $k$ pezzi. Del 1930 è anche una versione *infinita* del teorema di Ramsey.

**Teorema di Ramsey** (versione infinita)**.** *Siano $k, n \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Per ogni insieme infinito $X$, la collezione*

$$\mathcal{A}^{(n)}(X, \infty) = \left\{ \mathcal{P}^{(n)}(A) \,\middle|\, A \subset X,\ A \text{ infinito} \right\} \subset \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}^{(n)}(X)\Big)$$

*è regolare per ogni partizione di $\mathcal{P}^{(n)}(X)$ in $k$ pezzi.*

Il teorema di Ramsey ha avuto un riflesso notevole sullo studio dei *grandi cardinali*. Rimando a [GRS, sezione 6.4] per approfondire l'argomento, che esula dallo scopo di questa trattazione. Mi limito a dire che nella notazione di Erdos e Rado la versione infinita del teorema di Ramsey è l'asserzione

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \ : \ \omega \to (\omega)^n_k$$

dove $\omega$ è il primo ordinale numerabile.

**Finito e infinito.** A questo punto, è conveniente modificare leggermente la nozione di regolarità per una partizione. Dati due insiemi $Y \subset X$, una collezione $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di $X$ è regolare per una partizione di $Y$ se per quella partizione è regolare la collezione di sottoinsiemi di $Y$

$$\mathcal{A}|_Y = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(Y)$$

Chiaramente, se una collezione di sottoinsiemi di $X$ è regolare per le partizioni di un qualche $Y \subset X$, allora è regolare anche per ogni partizione di $X$. Viceversa, se una collezione è regolare per ogni partizione di $X$, non necessariamente è regolare anche per le partizioni di un qualche sottoinsieme di $X$. Un caso in cui questo accade è se tutti gli elementi della collezione sono insiemi finiti.

**Teorema di compattezza [BE, 1951].** *Sia $k \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Siano $X$ un insieme e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}^{(<\aleph_0)}(X)$ una collezione di sottoinsiemi finiti dell'insieme $X$. Se $\mathcal{A}$ è regolare per ogni partizione di $X$ in $k$ pezzi, allora è regolare per ogni partizione di $F$ in $k$ pezzi, per qualche $F \subset X$ sottoinsieme finito di $X$.*

La dimostrazione si scrive bene con il linguaggio della topologia e, in generale, richiede la validità dell'*assioma di scelta*. È possibile farne a meno, ricorrendo ad un argomento *diagonale*, se l'insieme $X$ è numerabile. Rimando a [GRS] per entrambe le dimostrazioni.

Il teorema di compattezza permette di dedurre un risultato *finito* dalla sua *versione infinita*, la cui dimostrazione spesso presenta meno complicazioni, come nel caso del teorema di Ramsey. Quando Ramsey ne scrisse la dimostrazione, però, il teorema di compattezza non esisteva ancora: la dimostrazione, di N. G. de Bruijn e P. Erdős, compare per la prima volta in un breve articolo del 1951 [BE].

*Osservazione* 3. La versione infinita del teorema di Ramsey implica la versione finita.

*Dimostrazione.* Fissati tre interi positivi $k, n, m \in \mathbb{N}$, sia $X$ l'insieme infinito fornito dalla versione infinita del teorema di Ramsey. Poiché la collezione $\mathcal{A}^{(n)}(X, \infty)$ è regolare per partizioni di $\mathcal{P}^{(n)}(X)$ in $k$ pezzi, a maggior ragione la è anche $\mathcal{A}^{(n)}(X, m)$. Questo perché, per ogni elemento della prima collezione, uno dei suoi sottoinsiemi è un elemento della seconda. Poiché tutti gli elementi della collezione $\mathcal{A}^{(n)}(X, m)$ sono insiemi finiti, questa è regolare per partizioni di $F$ in $k$ pezzi, per qualche $F \subset \mathcal{P}^{(n)}(X)$ finito. Consideriamo l'insieme finito

$$Y = \bigcup F \subset X$$

Poiché $F \subset \mathcal{P}^{(n)}(Y)$, la collezione $\mathcal{A}^{(n)}(X, m) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}^{(n)}(X))$ è regolare per partizioni di $\mathcal{P}^{(n)}(Y)$ in $k$ pezzi. Cioè la collezione

$$\mathcal{A}^{(n)}(Y, m) = \mathcal{A}^{(n)}(X, m) \cap \mathcal{P}^{(n)}(Y)$$

è regolare per partizioni di $\mathcal{P}^{(n)}(Y)$ in $k$ pezzi. □

## 1.2 Progressioni: il teorema di Van der Waerden

Nel 1916, Issai Schur trovò una nuova dimostrazione di un recente risultato di L. E. Dickson legato all'ultima congettura — oggi ultimo teorema — di Fermat [Dic, 1909]. Lo riporto nella stessa forma in cui Schur lo enuncia in [Sch]:

> ***Teorema di Dickson.*** *Sia $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo. La congruenza*
>
> $$x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$$
>
> *ha una soluzione non banale per ogni $p$ primo sufficientemente grande.*

La dimostrazione di Schur consiste nell'applicare un *lemma molto semplice, che appartiene più alla combinatoria che alla teoria dei numeri,*[2] che suona più o meno così:

> ***Lemma.*** *Siano $m, N \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Si partizioni l'insieme $[N]$ in $m$ pezzi. Se $N > m!\, e$, almeno uno dei pezzi contiene due interi e la loro differenza.*

Oggi, nel contesto della teoria di Ramsey, questo *Lemma* è conosciuto come *teorema di Schur.* Ne propongo due formulazioni equivalenti (in virtù del teorema di compattezza), di cui dimostro la prima in un modo *anacronistico*, nel senso che faccio uso del teorema di Ramsey. Dovendo fare a meno di questo strumento potente, Schur dimostra il suo *Lemma* mediante un ragionamento per assurdo un po' più laborioso.

[2] *"einem sehr einfachen Hilfssatz [...], der mehr der Kombinatorik als der Zahlentheorie angehört"*, in [Sch, p. 114]

**Teorema di Schur [Sch, 1916].** *Sia $K$ un insieme finito di colori e sia $f\colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione dei naturali. L'equazione*

$$x + y = z \tag{1.1}$$

*ha una soluzione monocromatica.*

**Teorema di Schur** (versione finita)**.** *Sia $k \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Esiste un intero positivo $S_k \in \mathbb{N}$ tale che il pattern*

$$x, y, x + y \mid x, y \in \mathbb{N}$$

*sia regolare per ogni partizione di $[S_k]$ in $k$ pezzi.*

*Dimostrazione.* Sia $\chi\colon \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N}) \to K$ la colorazione dell'insieme delle paia di naturali definita da

$$\chi\{i < j\} = f(j - i)$$

Fissiamo $m = 3$. Per la versione infinita del teorema di Ramsey, esistono tre interi positivi $i < j < k$ tali che $\mathcal{P}^{(2)}\{i, j, k\}$ è monocromatico rispetto a $\chi$. Cioè

$$f(j - i) = f(k - i) = f(k - j)$$

Quindi gli interi positivi $x = j - i$, $y = k - j$, $z = k - i$ costituiscono una soluzione monocromatica della (1.1). $\square$

Si noti che l'argomento anacronistico fornisce la stima

$$S_k \leq R_k(3) - 1$$

dove $R_k(3)$ è il minimo intero per cui vale il teorema di Ramsey,[3] mentre quella fornita dal *Lemma* è

$$S_k \leq k!\, e + 1$$

**Una nota.** In realtà il primo risultato di regolarità per partizioni di cui si ha traccia è dovuto a David Hilbert: è conosciuto come *Cube Lemma* e compare in [Hil, 1892]. In ogni caso, rimane un risultato isolato, che non ha avuto alcun impatto sullo sviluppo della teoria di Ramsey e che, dal 1927, può essere dedotto dal teorema di Van der Waerden.

Il teorema di Van der Waerden fu congetturato indipendentemente da Schur e da P. J. H. Baudet: Bartel Leendert van der Waerden venne a conoscenza della congettura dal secondo. Colpisce come egli non avesse mai sentito parlare del teorema di Schur fino agli anni novanta del secolo scorso [Soi, pp. 5-6]. Al contrario, il teorema di Van der Waerden fu un tassello fondamentale per i successivi risultati ottenuti da Schur e dai suoi due studenti di dottorato, Alfred Brauer e Richard Rado.

**Teorema di Van der Waerden [Wae, 1927]** (Congettura di Baudet-Schur)**.** *Siano $k, l \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Esiste un intero positivo $W_k(l) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni colorazione di $[W_k(l)]$ in $k$ colori esiste una progressione aritmetica monocromatica di lunghezza $l$.*

[3] $R_2(3) = 6,\ R_3(3) = 17,\ R_4(3) = 51,\ R_5(3) = 162,\ R_6(3) = 538,\ R_7(3) = 1682$ [Radz]

Esistono numerose dimostrazioni di questo teorema centrale della teoria di Ramsey, e nessuna di esse è poco laboriosa. Quella di Van der Waerden consiste in una doppia induzione: fissato $l$, si mostra che il teorema vale per la coppia $(k+1, l)$ assumendo che valga per $(k, l)$; dopo si mostra che il teorema vale per $l+1$ assumendo che valga per ogni coppia $(k, l)$ al variare di $k$. Per i dettagli rimando a [GRS, sezione 2.1].

A causa della doppia induzione, questo procedimento fornisce una stima *enorme*[4] sul minimo $W_k(l)$ che realizza l'enunciato. Nel 1987 S. Shelah trovò una dimostrazione essenzialmente diversa, che permette di stimare i numeri di Van der Waerden con una funzione che cresce meno rapidamente. Per un approfondimento rimando a [GRS, section 2.7].

Il teorema di Van der Waerden ha un corrispettivo *multidimensionale*, la cui dimostrazione è stata pubblicata nel 1943, nonostante, di fatto, T. Gallai l'avesse trovata alcuni anni prima [Soi, p. 22].

**Teorema di Gallai.** *Siano $k, n, m \in \mathbb{N}$ tre interi positivi. Sia $A \subset \mathbb{Z}^n$ un insieme di cardinalità $m$. Per ogni colorazione di $\mathbb{Z}^n$ in $k$ colori, esiste un insieme $A' \subset \mathbb{Z}^n$ simile e parallelo ad $A$ e monocromatico.*

Quando Schur e Brauer seppero che la loro congettura sulle progressioni aritmetiche era stata provata, in poche settimane riuscirono a dimostrare alcuni risultati di teoria dei numeri su cui stavano lavorando. In aggiunta, Schur dimostrò una variante *forte* del teorema di Van der Waerden [Soi, section 5].

**Teorema di Schur (II).** *Siano $k, l, s \in \mathbb{N}$ tre interi positivi. Esiste un intero positivo $B_k(l, s)$ tale che il pattern*

$$a, sd, a+d, \dots, a+(l-1)\cdot d \;\Big|\; a, d \in \mathbb{N}$$

*sia regolare per ogni partizione di $[B_k(l, s)]$ in $k$ pezzi.*

*Dimostrazione.* Illustro la dimostrazione solo nel caso $s = 1$, il caso generale è analogo. In questa dimostrazione scrivo $B_k(l)$ al posto di $B_k(l, 1)$. Procediamo per induzione su $k$.

**Passo base:** il minimo intero che verifica la condizione richiesta è $B_1(l) = l$, infatti

$$1, 1, 2, \dots, l \leq l$$

sono ovviamente dello stesso colore.

**Passo induttivo:** consideriamo l'intero $B_k(l)$ dato dall'ipotesi induttiva, e poniamo $L = 1 + (l-1)\cdot B_k(l)$. Mostriamo che $B_{k+1}(l) \leq W_{k+1}(L)$.

Sia $f\colon [W_{k+1}(L)] \to K$ una colorazione in $k+1$ colori, dove $K$ è l'insieme di colori. Per il teorema di Van der Waerden esiste una progressione aritmetica

$$P = \{a + h\cdot d \,|\, h < L\}$$

di lunghezza $L$ monocromatica. Sia $c \in K$ il suo colore. Al variare di $x \leq B_k(l)$, consideriamo le sottoprogressioni

$$P_x = \{a + h'\cdot xd \,|\, h' < l\}$$

[4] *"Eeeeenormous Upper Bounds"*, in [GRS, section 2.7]

di ragione $xd$ e lunghezza $l$. Esse sono tutte monocromatiche di colore $c$. Si danno due casi.

- Per qualche $x \leq B_k(l)$, il colore dell'intero $xd$ è $c$. Allora l'elemento del pattern
$$a, xd, a + xd, \ldots, a + (l-1) \cdot xd$$
è monocromatico, come volevamo dimostrare.

- Nessuno degli interi $xd$ è di colore $c$. In questo caso $f$ induce una colorazione in $k$ colori
$$\begin{aligned} f \circ d \colon [B_k(l)] &\to K \setminus \{c\} \\ x &\mapsto f(xd) \end{aligned}$$
Per l'ipotesi induttiva, esiste un elemento del pattern $b, e, b+e, \ldots, b+(l-1) \cdot e$ monocromatico rispetto a $f \circ d$. Allora
$$bd, ed, bd + ed, \ldots, bd + (l-1) \cdot ed$$
è un elemento del pattern monocromatico rispetto a $f$, come volevamo dimostrare. $\square$

*Corollario* 1. Siano $k, l, s \in \mathbb{N}$ tre interi positivi. Esiste un intero positivo $B'_k(l, s)$ tale che la collezione
$$\Big\{ \big\{ a, sd, a + \lambda d \,\big|\, |\lambda| \leq l \big\} \,\Big|\, a, d \in \mathbb{N} \Big\}$$
sia regolare per ogni partizione di $[B'_k(l, s)]$ in $k$ pezzi.

## 1.3 Equazioni lineari: il teorema di Rado

Il teorema di Rado fornisce un criterio semplice per stabilire se un sistema lineare di equazioni omogenee a coefficienti interi sia regolare per partizioni di $\mathbb{N}$. Nel seguito dimostro il caso particolare che tratta una singola equazione, mentre riporto solo l'enunciato del teorema nel caso generale.

**Teorema di Rado** (caso particolare)**.** *Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Siano $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ degli interi non nulli. L'equazione lineare omogenea*
$$S: \quad c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0 \tag{1.2}$$
*nelle indeterminate $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ è regolare per partizioni di $\mathbb{N}$ se e solo se esiste un insieme di indici $F \subset [n]$ non vuoto tale che $\sum_{j \in F} c_j = 0$.*

*Dimostrazione.* Mostriamo separatamente le due implicazioni.

**Se:** si danno due casi: se $c_1 + \cdots + c_n = 0$, una soluzione monocromatica è data da
$$x_1 = \cdots = x_n = 1$$
come volevamo dimostrare. Altrimenti, a meno di permutare gli indici, possiamo supporre che valga $F = [k]$, per qualche $k < n$. Consideriamo i seguenti interi:
$$\begin{array}{cc} A = \gcd(c_1, \ldots, c_k) & B = c_{k+1} + \cdots + c_n \neq 0 \\ s = \frac{A}{\gcd(A,B)} & t = -\frac{B}{\gcd(A,B)} \neq 0 \end{array}$$

Per l'identità di Bézout, esistono degli interi non nulli $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ per cui

$$t \cdot A = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_k c_k$$

Sia $f$ una colorazione di $\mathbb{N}$ in $k$ colori. Poniamo $l = \max\{|\lambda_i|\} > 0$. Per il corollario del teorema di Schur (II) esistono degli interi positivi $a, d, B'_k(l, s) \in \mathbb{N}$ per cui l'insieme

$$\{a, sd, a + \lambda \cdot d \mid |\lambda| \leq l\} \subset [B'_k(l, s)]$$

è monocromatico. Gli interi positivi

$$x_i(a, d) = \begin{cases} a + \lambda_i d & \text{se } i \leq k \\ sd & \text{altrimenti} \end{cases}$$

al variare di $i \leq n$ definiscono una soluzione monocromatica di 1.2, infatti

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + \dots + c_n x_n &= c_1(a + \lambda_1 d) + \dots + c_k(a + \lambda_k d) + c_{k+1} sd + \dots + c_n sd \\ &= (c_1 + \dots + c_k) \cdot a + (c_1 \lambda_1 + \dots + c_k \lambda_k) \cdot d + B \cdot sd \\ &= 0 + (At + Bs) \cdot d \\ &= 0 \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.

**Solo se:** poniamo

$$\pi = \prod_{F \neq \emptyset} \sum_{j \in F} c_j$$

Per ogni primo $p \in \mathbb{N}$ fissato, consideriamo la colorazione in $p - 1$ colori definita da

$$\begin{aligned} f_p \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{F}_p^* \\ x &\mapsto a \pmod{p} \end{aligned}$$

dove $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ è il campo finito con $p$ elementi e dove abbiamo scritto $x = p^j \cdot a$ per unici $j \geq 0$ e $a \in \mathbb{N}$ coprimo con $p$. Per la regolarità di (1.2), esiste una soluzione monocromatica $x_1, \dots, x_n$. A meno di dividerli per uno stesso fattore, possiamo supporre che gli interi positivi $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ siano coprimi, e, senza perdita di generalità, che solo i primi $k$ siano coprimi con $p$, per qualche $k \leq n$. Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 x_1 + \dots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1} + \dots + c_n x_n \\ &\equiv c_1 x_1 + \dots + c_k x_k \pmod{p} \\ &\equiv (c_1 + \dots + c_k) \cdot a \pmod{p} \end{aligned}$$

da cui

$$c_1 + \dots + c_k \equiv 0 \pmod{p}$$

e dunque $p \mid \pi$.

Poiché $\pi$ è multiplo di ogni primo, necessariamente deve valere $\pi = 0$, cioè $\sum_{j \in F} c_j = 0$ per qualche insieme di indici $F \subset [n]$ non vuoto. $\square$

Di questo teorema esiste anche una versione *moltiplicativa*. Si noti che il lemma usato nella sua dimostrazione, interviene anche in quella del teorema 6 nel capitolo 3.

**Teorema di Rado** (versione ridotta - formulazione moltiplicativa)**.** *Siano $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ degli interi non nulli. L'equazione lineare omogenea*

$$S' : \quad y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot y_n^{c_n} = 1 \tag{1.3}$$

*nelle indeterminate $y_1, \ldots, y_n > 1$ è regolare per partizioni di $\mathbb{N}$ se e solo se esiste un insieme di indici $F \subset [n]$ non vuoto tale che $\sum_{j \in F} c_j = 0$.*

*Dimostrazione.* È una conseguenza del lemma 1. □

**Lemma 1.** *Siano $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ degli interi non nulli. L'equazione lineare omogenea*

$$S' : \quad y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot y_n^{c_n} = 1$$

*nelle indeterminate $y_1, \ldots, y_n > 1$ è regolare per partizioni di $\mathbb{N}$ se e solo se la è l'equazione lineare omogenea*

$$S : \quad c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$$

*nelle indeterminate $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.*

*Dimostrazione.* Mostriamo separatamente le due implicazioni.

**Se:** Fissata $f$ una colorazione di $\mathbb{N}$, consideriamo la colorazione $f^\star$ definita da $f^\star(x) = f\big(2^x\big)$. Se $S$ è regolare per partizioni, esiste una soluzione $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ monocromatica rispetto a $f^\star$, cioè

$$f\big(2^{x_1}\big) = \cdots = f\big(2^{x_n}\big)$$

Per $i \leq n$, poniamo $y_i = 2^{x_i} > 1$. Allora $y_1, \ldots, y_n$ è una soluzione di $S'$ monocromatica rispetto a $f$, infatti

$$y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot y_n^{c_n} = 2 \star (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = 2^0 = 1$$

**Solo se:** definiamo una funzione *logaritmica* $\nu \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. Per fare ciò sfruttiamo il teorema fondamentale dell'aritmetica: per ogni intero positivo $y \in \mathbb{N}$ scriviamo la sua fattorizzazione unica in primi

$$y = p_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{e_k}$$

Definiamo $\nu(y) = e_1 + \cdots + e_k$. Si osservi che la funzione $\nu$ rispetta, proprio come per i logaritmi, le seguenti proprietà:

- $\forall y \in \mathbb{N} \ : \ \nu(y) = 0 \iff y = 1$;
- $\forall x, y \in \mathbb{N} \ : \ \nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$;
- per ogni intero positivo $c \in \mathbb{N} : \nu(y^c) = c \cdot \nu(y)$.

Fissata $f$ una colorazione di $\mathbb{N} \cup \{0\}$, consideriamo la colorazione $f \circ \nu$ definita da $f \circ \nu(x) = f(\nu(x))$. Se $S'$ è regolare per partizioni, esiste una soluzione $y_1, \ldots, y_n > 1$ monocromatica rispetto a $f \circ \nu$, cioè

$$f(\nu(y_1)) = \cdots = f(\nu(y_n))$$

Per $i \leq n$, poniamo $x_i = \nu(y_i) \in \mathbb{N}$. Allora $x_1, \ldots, x_n$ è una soluzione di $S$ monocromatica rispetto a $f$, infatti

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = \nu\big(y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot y_n^{c_n}\big) = \nu(1) = 0$$

Si noti che nell'ultimo passaggio ci sarebbe bisogno di portare al secondo membro di (1.2) i termini con coefficiente negativo, per poi applicare la funzione $\nu$ a entrambi i membri dell'equazione. $\square$

Per enunciare il teorema di Rado nel caso generale è necessario introdurre una notazione aggiuntiva.

**Notazione.** Sia $C = \big(c_j^{(i)}\big)_{i,j \leq n} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ una matrice di interi. Fissati $t \leq n$ e $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{t-1} < k_t = n$, e posto $k_0 = 0$, per $i \leq t$, definiamo il vettore

$$a_i = \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} c_j \in \mathbb{Z}^n$$

dove $c_j = \big(c_j^{(i)}\big)_{i \leq n}$ è la $j$-esima colonna della matrice $C$. La matrice $C$ verifica la condizione di Rado se esistono $t \leq n$ e $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{t-1} < k_t = n$ tali che, a meno di permutare le colonne di $C$, valgono:

- $a_1 = 0$;
- per ogni $i > 1$, il vettore $a_i$ è combinazione lineare di $c_1, \ldots, c_{k_{i-1}}$.

**Teorema di Rado [Rado, 1933].** *Il sistema omogeneo lineare*

$$S: \quad \begin{cases} c_1^{(1)} x_1 + \cdots + c_n^{(1)} x_n = 0 \\ \vdots \\ c_1^{(n)} x_1 + \cdots + c_n^{(n)} x_n = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

*è regolare se e solo se la matrice $C = \big(c_j^{(i)}\big)_{i,j \leq n}$ verifica la condizione di Rado.*

Rimando a [GRS] per la dimostrazione.

## 1.4 Pattern infiniti: il teorema di Hindman

Il teorema di Rado generalizza il teorema di Schur, infatti i coefficienti dell'equazione

$$x + y - z = 0$$

verificano la condizione di Rado. Un altro punto di vista sul teorema di Schur consiste nel considerare pattern simili a $x, y, x + y$. Dato un insieme $S \subset \mathbb{N}$, è definito l'insieme

$$\mathrm{FS}(S) = \big\{a_1 + \cdots + a_n \,\big|\, \{a_1, \ldots, a_n\} \subset S,\ n \in \mathbb{N}\big\} \subset \mathbb{N}$$

Alla fine degli anni sessanta, J. Folkman (nel 1965), J. H. Sanders (nel 1968) e V. I. Arnautov (nel 1969) provarono indipendentemente lo stesso risultato [Arn] [San].

**Teorema di Arnautov-Folkman-Sanders.** *Siano $k, m \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Esiste un intero positivo $F_k(m) \in \mathbb{N}$ tale che la collezione*

$$\mathbf{FS}(m) = \big\{ \mathrm{FS}(S) \,\big|\, S \subset \mathbb{N},\ |S| = m \big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

*sia regolare per ogni partizione di $[F_k(n)]$ in $k$ pezzi.*

La corretta attribuzione del merito di questo teorema costituisce un caso irrisolto, in quanto nella letteratura è stato associato a molti nomi, tra cui compaiono quelli di Rado, Rothschild e Graham. Qui ho seguito l'attribuzione argomentata da Soifer in [Soi, p. 16-17].

Come per il teorema di Rado, esiste una formulazione *moltiplicativa* del teorema di Arnautov-Folkman-Sanders. Dato un insieme $S \subset \mathbb{N}$, è definito l'insieme

$$\mathrm{FP}(S) = \big\{ a_1 \cdot \dots \cdot a_n \,\big|\, \{a_1, \dots, a_n\} \subset S,\ n \in \mathbb{N} \big\} \subset \mathbb{N}$$

**Teorema di Arnautov-Folkman-Sanders** (versione moltiplicativa)**.** *Siano $k, m \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Esiste un intero positivo $F'_k(m) \in \mathbb{N}$ tale che la collezione*

$$\mathbf{FP}(m) = \big\{ \mathrm{FP}(S) \,\big|\, S \subset \mathbb{N},\ |S| = m \big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

*sia regolare per ogni partizione di $[F'_k(n)]$ in $k$ pezzi.*

Uno dei problemi aperti più famosi della teoria di Ramsey è se anche la collezione

$$\mathbf{FPS}(m) = \big\{ \mathrm{FP}(S) \cup \mathrm{FS}(S) \,\big|\, S \subset \mathbb{N},\ |S| = m \big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

sia regolare per qualche $m$. Ad oggi non è nota la risposta nemmeno per il caso $m = 2$. Recentemente, però, J. Moreira ha dimostrato la regolarità del pattern $a, a+b, ab \mid a, b \in \mathbb{N}$ [Mor, 2017].

Anche nell'ambito della teoria degli insiemi vale un risultato simile al teorema di Arnautov-Folkman-Sanders. Dato un insieme $\mathcal{S}$, è definito l'insieme

$$\mathrm{FU}(\mathcal{S}) = \Big\{ \bigcup \mathcal{A} \,\Big|\, \mathcal{A} \subset \mathcal{S},\ \mathcal{A} \text{ finito} \Big\}$$

**Teorema delle unioni finite.** *Siano $k, m \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Esistono un intero positivo $F'_k(m) \in \mathbb{N}$ e un insieme $X$ di cardinalità $F'_k(m)$ tali che la collezione*

$$\mathbf{FU}(X, m) = \big\{ \mathrm{FU}(\mathcal{S}) \,\big|\, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X),\ |\mathcal{S}| = m \big\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

*sia regolare per ogni partizione di $\mathcal{P}(X)$ in $k$ pezzi.*

Per le dimostrazioni dei tre risultati presentati, che poggiano sul teorema di Van der Waerden, rimando a [GRS].

Nel 1974, Neil Hindman dimostrò un teorema già congetturato da Sanders sei anni prima.

**Teorema di Hindman [Hin, 1974]** (Congettura di Sanders)**.** *Per ogni colorazione dei naturali esiste un insieme infinito $S$ tale che $FS(S)$ sia monocromatico.*

In termini di regolarità per partizioni, il teorema di Hindman stabilisce la regolarità per partizioni della collezione

$$\mathbf{FS}(\infty) = \big\{\mathrm{FS}(S) \,\big|\, S \subset \mathbb{N},\ S \text{ infinito}\big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Analogamente a quanto osservato sul teorema di Ramsey nella sezione 1.1, si può dire che il teorema di Hindman corrisponda a una versione *infinita* (e quindi più forte, per il teorema di compattezza) del teorema di Arnautov-Folkman-Sanders.

# Parte II

# Seconda parte

# Capitolo 2

# Configurazioni

In questo capitolo vengono discussi i principali risultati della teoria di Ramsey delle configurazioni esponenziali. La prima sezione contiene la dimostrazione della regolarità del pattern $a, b, a^b \,\big|\, a, b > 1$.

**Teorema 1.** *Ogni colorazione dei naturali ammette una tripla esponenziale monocromatica.*

Nella seconda sezione questo risultato viene generalizzato in due direzioni:

2.2.1: viene definito l'esponenziale pesato $\mathrm{Exp}_W \mathcal{A}$ di una collezione $\mathcal{A}$ di $n$-uple di naturali e viene dimostrato che la regolarità di $\mathcal{A}$ è una condizione sufficiente per la regolarità di $\mathrm{Exp}_W \mathcal{A}$.

**Teorema 2.** *L'esponenziale pesato di una collezione regolare per partizioni è regolare per partizioni.*

2.2.2: vengono definite le collezioni $\mathbf{FE}(m)$ e $\mathbf{FEP}(m)$ e attraverso pattern *esponenziali* in cui compaiono un numero arbitrario di variabili e ne viene mostrata la regolarità per partizioni.

**Teorema 3.** *Per ogni intero positivo $m$, la collezione*

$$\mathbf{FEP}(m) = \big\{\mathrm{FE}(a_1, \ldots, a_m) \cup \mathrm{FP}(a_1, \ldots, a_m) \,\big|\, a_1, \ldots, a_m > 1\big\}$$

*è regolare per partizioni.*

Il risultato, generalizzato ulteriormente dal teorema 4, è il primo del suo genere e quindi di notevole rilievo, anche solo per $m = 2$. Infatti, come osservato nella sezione 1.4, non è noto se il pattern $a, b, a + b, ab \mid a, b \in \mathbb{N}$ sia regolare o meno, mentre dalla proposizione 3 (sezione 2.3) segue che il pattern $a, b, a + b, a^b \mid a, b > 1$ non lo sia.

Nella terza sezione sono raccolti alcuni risultati di non regolarità, tra cui la dimostrazione dell'*incompatibilità* tra configurazioni esponenziali e additive. Inoltre, come conseguenza di uno di questi risultati, si deduce la condizione necessaria e sufficiente affinché un pattern esponenziale *di minima altezza* sia regolare.

**Teorema 5.** *Dati un intero positivo $m$ e una relazione binaria* R*, la collezione*

$$\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \Big\{ \big\{ x_1, \ldots, x_m, x_i^{x_j} \,\big|\, i \,\mathrm{R}\, j \big\} \,\Big|\, x_1, \ldots, x_m > 1 \Big\}$$

*è regolare per partizioni se e solo se* R *è asimmetrica e il suo grafo associato non contiene cicli orientati.*

La stessa proposizione, inoltre, permette di rispondere parzialmente a un interrogativo posto da A. Sisto sulla regolarità di particolari pattern esponenziali ottenuti componendo l'operazione di elevamento a potenza tra gli elementi di un insieme infinito [Sis].

# Richiami e notazione

**Una nozione di convergenza nello spazio delle colorazioni.** Siano $X$ un insieme, $K$ un insieme finito di colori. Sia $\chi\colon X \to K$ una colorazione. La successione di colorazioni $\langle f_n\colon X \to K \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ converge alla colorazione $\chi$ se i termini $f_n$ della successione coincidono con $\chi$ su ogni insieme finito $F \subset X$ definitivamente in $n$. Cioè se per ogni $F$ vale

$$f_n|_F = \chi|_F$$

per $n$ sufficientemente grande. Si noti che la nozione di convergenza appena definita coincide con quella del prodotto di Tychonov $K^X$, dove $K$ è dotato della topologia discreta. Poiché lo spazio $K^X$ è di Hausdorff, in quanto prodotto di Tychonov di spazi di Hausdorff, se la successione $\langle f_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ converge, il suo limite è unico e dunque non c'è ambiguità nello scrivere

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n = \chi$$

come, d'altronde, risulta evidente dalla definizione.

Supponiamo che l'insieme $X$ sia numerabile, per esempio $X = \mathbb{N}$. La topologia dello spazio $K^{\mathbb{N}}$ coincide con quella indotta dalla metrica della minima differenza

$$d(\chi, \psi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi = \psi \\ 2^{-k} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $k = \min\{x \in \mathbb{N} \mid \chi(x) \neq \psi(x)\}$. Infatti la collezione degli insiemi

$$U_k(\chi) = \big\{ \psi \in K^{\mathbb{N}} \,\big|\, \psi|_{[k]} = \chi|_{[k]} \big\}$$

al variare di $k \in \mathbb{N}$ è una base d'intorni per $\chi$ in $K^{\mathbb{N}}$ sia come spazio metrico, sia come prodotto di Tychonov. Poiché lo spazio metrico $K^{\mathbb{N}}$ è compatto, in quanto prodotto di Tychonov di spazi compatti, il teorema di Bolzano-Weierstraß implica che ogni successione ammette un'estratta convergente.

> *Sia $K$ un insieme finito di colori. Ogni successione di colorazioni dei naturali $\langle f_n\colon \mathbb{N} \to K \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ ammette un'estratta convergente.*

Questo fatto, elemento essenziale nelle dimostrazioni riportate nel seguito, viene menzionato da Sahasrabudhe come *compactness property* in [JS1, Fact 7], a cui rimando per una dimostrazione di natura combinatoria, e in [JS2, Fact 4].

In effetti, come conseguenza del teorema di Bolzano-Weierstraß, la proprietà di compattezza vale su qualsiasi spazio compatto a base numerabile, in particolare scegliendo un qualsiasi insieme numerabile $X$ al posto di $\mathbb{N}$. Ciononostante, vale la pena enunciarla anche nel caso $X = \mathbb{N}^m$ (per $m \in \mathbb{N}$) in una forma leggermente più forte, che sarà utile nella sezione 2.2.2. Rimando al *compactness principle* [JS1, Fact 12] come riferimento.

> *Sia $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Siano $X$ un insieme, $K$ un insieme finito di colori. Sia $\langle f_n \colon X \to K \mid n \in \mathbb{N}^m \rangle \subset K^X$ una successione di colorazioni indicizzata dal multiindice $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$. Esistono $m$ insiemi infiniti $E_1, \ldots, E_m \subset \mathbb{N}$ e una colorazione $\chi \colon X \to K$ tali che*
> $$\lim_{n_m \in E_m} \cdots \lim_{n_1 \in E_1} f_{(n_1,\ldots,n_m)} = \chi$$

## 2.1 Triple esponenziali monocromatiche

Il teorema di Van der Waerden è la base di tutte le dimostrazioni (ad oggi conosciute) della regolarità della configurazione $a, b, a^b \mid a, b > 1$. In quella proposta da Sahasrabudhe si ha a che fare con diverse colorazioni, alle quali il teorema viene applicato in modo *simultaneo*, tenendo traccia dei colori e delle progressioni trovate man mano. Questo è possibile grazie al *lemma di simultaneità* (lemma 2). Segue il *lemma chiave* (lemma 3), un altro risultato preliminare che permette di applicare il lemma di simultaneità nel modo richiesto dal contesto *esponenziale*. A questo punto, la dimostrazione del teorema 1 è la presa d'atto che il lemma chiave produce quanto desiderato. In effetti, come osservato nei commenti, esso produce anche di più.

Una nota: il lemma chiave non corrisponde esattamente al lemma 9 in [JS1]. Questo perché la dimostrazione per assurdo del lemma 9 include anche la costruzione delle triple esponenziali. Il ragionamento descritto qui, invece, ripercorre gli stessi passi di Sahasrabudhe, ma con uno stile più *costruttivo*, che evita di procedere per assurdo.

**Colori di Van der Waerden per una colorazione.** Sia $K$ un insieme finito di colori. Sia $\chi \colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione. Un colore $c \in K$ è un *colore di Van der Waerden* per la colorazione $\chi$ se per ogni $M \in \mathbb{N}$ intero positivo esiste una progressione aritmetica di lunghezza $M$

$$P(M) = \{s(M) + h \cdot d(M) \mid h < M\}$$

che sia monocromatica rispetto a $\chi$ e di colore $c$. Cioè se per ogni $M$ esiste $P(M)$ tale che

$$\chi\big(s(M) + h \cdot d(M)\big) = c$$

per ogni $h < M$.

**Colori simultaneamente di Van der Waerden.** Siano $r \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $K$ un insieme finito di colori. Siano

$$\langle s(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \qquad\qquad \langle d(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N}$$

due successioni di interi positivi. I colori $c_1, \ldots, c_r \in K$ sono *simultaneamente di Van der Waerden* per la sequenza di colorazioni $\langle \chi_1, \ldots, \chi_r : \mathbb{N} \to K \rangle$ con *profilo di simultaneità* $\langle s(M), d(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$ se per ogni $M \in \mathbb{N}$ intero positivo esiste una progressione aritmetica di lunghezza $M$

$$P(M) = \{ s(M) + h \cdot d(M) \mid h < M \}$$

che sia monocromatica rispetto alle colorazioni $\chi_i$ e di colore $c_i$ al variare di $i \leq r$. Cioè se per ogni $M$ esiste $P(M)$ tale che

$$\chi_i\big(s(M) + h \cdot d(M)\big) = c_i$$

per ogni $i \leq r$ e per ogni $h < M$.

*Osservazione* 4. Se $c_1, \ldots, c_r$ sono simultaneamente di Van der Waerden per $\langle \chi_1, \ldots, \chi_r \rangle$ con profilo

$$\langle s(M), d(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$$

allora sono simultaneamente di Van der Waerden anche con profilo

$$\langle s(M(N)), d(M(N)) \mid N \in \mathbb{N} \rangle$$

per ogni $\langle M(N) \mid N \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N}$ successione crescente di interi positivi.

**Lemma 2** (simultaneità)**.** *Siano $r \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $K$ un insieme finito di colori.*

*a) Sia $\chi : \mathbb{N} \to K$ una colorazione. Esiste un colore di Van der Waerden per $\chi$.*

*b) Siano $\chi_1, \ldots, \chi_r : \mathbb{N} \to K$ colorazioni e $c_1, \ldots, c_r \in K$ colori simultaneamente di Van der Waerden per $\langle \chi_1, \ldots, \chi_r \rangle$. Sia $\chi_{r+1} : \mathbb{N} \to K$ una colorazione. Esiste un colore $c_{r+1} \in K$ tale che i colori $c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}$ siano simultaneamente di Van der Waerden per $\langle \chi_1, \ldots, \chi_r, \chi_{r+1} \rangle$.*

*Dimostrazione a).* Per ogni intero positivo $M' \in \mathbb{N}$, consideriamo la progressione aritmetica $P'(M') \subset \mathbb{N}$ di lunghezza $M'$ monocromatica rispetto alla colorazione $\chi$ data dal teorema di Van der Waerden. Poniamo

$$c(M') = \chi(P'(M')) \in K$$

il suo colore al variare di $M' \in \mathbb{N}$. Poiché $K$ è finito, deve esistere (almeno) un colore che occorre infinite volte nella successione $\langle c(M') \mid M' \in \mathbb{N} \rangle \subset K$. Sia $c$ quel colore. Poniamo

$$M'(M) = \min\{ n \geq M \mid c(n) = c \} \in \mathbb{N}$$

al variare di $M' \in \mathbb{N}$. Poniamo $P(M) \subset P'(M'(M))$ una qualsiasi progressione di lunghezza $M$ contenuta in $P'(M'(M))$ al variare di $M \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\chi(P(M)) = c(M'(M)) = c$$

per ogni $M \in \mathbb{N}$. $\square$

*Dimostrazione b).* Per ogni intero positivo $M' \in \mathbb{N}$, poniamo $W(M') \in \mathbb{N}$ come nel teorema di Van der Waerden e consideriamo la progressione aritmetica

$$P_0(W(M')) \subset \mathbb{N}$$

di lunghezza $W(M')$ monocromatica rispetto a $\chi_i$ e di colore $c_i$ al variare di $i \leq r$ data dall'ipotesi di simultaneità sui colori $c_1, \ldots, c_r$. Per ogni intero positivo $M' \in \mathbb{N}$, consideriamo la progressione aritmetica

$$P'(M') \subset P_0(W(M')) \subset \mathbb{N}$$

di lunghezza $M'$ monocromatica rispetto alla colorazione $\chi_{r+1}$ data dal teorema di Van der Waerden[1]. La dimostrazione prosegue esattamente come nel punto *a).* $\square$

**Notazione.** Sia $K$ un insieme finito di colori. Sia $f\colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione. Sia $d \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Sono definiti:

- gli interi positivi $a^{(d)}(x) > 1$ al variare di $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a^{(d)}(x) &= 2^d \star 2^x \\ &= 2 \star \big(d \cdot 2^x\big) > 1 \end{aligned}$$

- la colorazione

$$\begin{aligned} f^{(d)}\colon \mathbb{N} &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto f\Big(a^{(d)}(x)\Big) \end{aligned}$$

**Lemma 3** (Lemma chiave)**.** *Siano $r \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $K$ un insieme finito di colori. Sia $f\colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione. Esistono*

- *colorazioni $\chi_1, \ldots, \chi_r\colon \mathbb{N} \to K$ e colori $c_1, \ldots, c_r \in K$;*
- *successioni di interi positivi*

$$\begin{array}{cc} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \langle s_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \vdots & \vdots \\ \langle s_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \end{array}$$

*tali che*

*i) $l$-esima condizione di simultaneità: i colori $c_1, \ldots, c_l$ sono simultaneamente di Van der Waerden per $\langle \chi_1, \ldots, \chi_l \rangle$ con profilo $\langle s_{l+1}(M), d_{l+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$;*

*ii) $l$-esima condizione di convergenza: esiste il limite*

$$\lim_M f^{(d_l(M))} = \chi_l$$

*per ogni $l \leq r$.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su $r$.

[1] L'argomento è simile a quello usato nella dimostrazione del teorema di Schur (II).

**Passo base:** per ogni $M \in \mathbb{N}$, poniamo $d_1(M) = 1$. Poniamo $\chi_1 = f^{(1)}$. La prima condizione di convergenza è soddisfatta.

Sia $c_1 \in K$ il colore di Van der Waerden per $\chi_1$ fornito dal lemma $2.a$. Sia $\langle s_2(M), d_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$ il profilo di simultaneità. La prima condizione di simultaneità è soddisfatta.

**Passo induttivo:** supponiamo la tesi vera per $r \in \mathbb{N}$. L'ipotesi induttiva fornisce

- le colorazioni $\chi_1, \dots, \chi_r \colon \mathbb{N} \to K$ e i colori $c_1, \dots, c_r \in K$;
- le successioni di interi positivi

$$\begin{array}{cc} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \langle s_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \vdots & \vdots \\ \langle s_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \end{array}$$

che verificano le condizioni $i$ e $ii$ per ogni $l \le r$. Per la $r$-esima condizione di simultaneità, per ogni $M \in \mathbb{N}$, esiste una progressione aritmetica

$$P_{r+1}(M) = \{ s_{r+1}(M) + h \cdot d_{r+1}(M) \mid h < M \}$$

di lunghezza $M$, il cui colore rispetto a ogni $\chi_i$ è $c_i$, al variare di $i \le r$. Consideriamo la successione di colorazioni

$$\left\langle f^{(d_{r+1}(M))} \,\middle|\, M \in \mathbb{N} \right\rangle$$

Per l'osservazione 4, a meno di passare a una sua estratta, possiamo supporre che sia convergente a una qualche colorazione $\chi_{r+1}$ senza compromettere la validità delle condizioni $i$ e $ii$ per $l \le r$. La $(r+1)$-esima condizione di convergenza è soddisfatta.

Sia $c_{r+1} \in K$ il colore fornito dal lemma $2.b$ tale che i colori $c_1, \dots, c_{r+1}$ siano simultaneamente di Van der Waerden per $\langle \chi_1, \dots, \chi_{r+1} \rangle$. Sia

$$\langle s_{r+2}(M), d_{r+2}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$$

il profilo di simultaneità. La $(r+1)$-esima condizione di simultaneità è soddisfatta.

□

**Teorema 1.** *Ogni colorazione dei naturali ammette una tripla esponenziale monocromatica.*

*Dimostrazione.* Sia $K$ un insieme finito di colori. Sia $f \colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione dei naturali. Poniamo $r = |K| + 1$. Il lemma 3 fornisce

- le colorazioni $\chi_1, \dots, \chi_r \colon \mathbb{N} \to K$ e i colori $c_1, \dots, c_r \in K$;
- le successioni di interi positivi

$$\begin{array}{cc} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \langle s_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \vdots & \\ \langle s_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \end{array}$$

tali che per ogni $l \leq r$ valgano le condizioni di simultaneità e di convergenza.

Poiché $r > |K|$, per il principio della piccionaia esiste un colore $c \in K$ che compare (almeno) due volte nella sequenza di colori, diciamo $c = c_i = c_j$ per qualche $i < j \leq r$. Per la $j$-esima condizione di simultaneità, $c$ è un colore di Van der Waerden per $\chi_j$, quindi l'insieme

$$X_j^{(c)} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, \chi_j(x) = c\}$$

è non vuoto. Fissiamo $x_0 \in X_j^{(c)}$, ad esempio il minimo.

Per la $j$-esima condizione di convergenza, vale la relazione

$$\begin{aligned} c = \chi_j(x_0) &= \lim_M f^{(d_j(M))}(x_0) \\ &= f\Big(a^{(d_j(\overline{M}))}(x_0)\Big) \end{aligned} \tag{2.1}$$

per $\overline{M} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\overline{M} > 2^{x_0}$.

Consideriamo la progressione

$$P_j(\overline{M}) = \big\{s_j(\overline{M}) + h \cdot d_j(\overline{M}) \,\big|\, h < \overline{M}\big\}$$

Per la $(j-1)$-esima condizione di simultaneità, essa è monocromatica secondo la colorazione $\chi_i$ e di colore $c = c_i$. Cioè si ha

$$c = \chi_i\big(s_j(\overline{M}) + h \cdot d_j(\overline{M})\big)$$

per ogni $h < \overline{M}$. Aggiungendo la $i$-esima condizione di convergenza, si ha

$$\begin{aligned} c &= \chi_i\big(s_j(\overline{M}) + h \cdot d_j(\overline{M})\big) \\ &= \lim_M f^{(d_i(M))}(s_j(\overline{M}) + h \cdot d_j(\overline{M})) \\ &= f\Big(a^{(d_i(\widehat{M}))}(s_j(\overline{M}) + h \cdot d_j(\overline{M}))\Big) \end{aligned} \tag{2.2}$$

per ogni $h < \overline{M}$ e per $\widehat{M} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. In particolare, scegliendo rispettivamente $h = 0$ e $h = 2^{x_0} < \overline{M}$, valgono le relazioni

$$\begin{aligned} c &= \chi_i(s_j(\overline{M})) \\ &= \lim_M f^{(d_i(M))}(s_j(\overline{M})) \\ &= f\Big(a^{(d_i(\widehat{M}))}(s_j(\overline{M}))\Big) \end{aligned} \tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned} c &= \chi_i\big(s_j(\overline{M}) + 2^{x_0} \cdot d_j(\overline{M})\big) \\ &= \lim_M f^{(d_i(M))}\big(s_j(\overline{M}) + 2^{x_0} \cdot d_j(\overline{M})\big) \\ &= f\Big(a^{(d_i(\widehat{M}))}\big(s_j(\overline{M}) + 2^{x_0} \cdot d_j(\overline{M})\big)\Big) \end{aligned} \tag{2.4}$$

per $\widehat{M} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande.

Posti

$$A = a^{(d_i(\widehat{M}))}(s_j(\overline{M}))$$
$$B = a^{(d_j(\overline{M}))}(x_0)$$
$$C = a^{(d_i(\widehat{M}))}\big(s_j(\overline{M}) + 2^{x_0} \cdot d_j(\overline{M})\big)$$

accade che:

$$\begin{aligned} A \star B &= \Big(2 \star \Big(d_i(\widehat{M}) \cdot 2^{s_j(\overline{M})}\Big)\Big) \star \Big(2 \star \big(d_j(\overline{M}) \cdot 2^{x_0}\big)\Big) \\ &= 2 \star \Big(d_i(\widehat{M}) \cdot 2^{s_j(\overline{M})} \cdot \Big(2 \star \big(d_j(\overline{M}) \cdot 2^{x_0}\big)\Big) \\ &= 2 \star \Big(d_i(\widehat{M}) \cdot 2 \star \big(s_j(\overline{M}) + 2^{x_0} \cdot d_j(\overline{M})\big)\Big) = C \end{aligned}$$

Dunque $A, B, C$ è una tripla esponenziale e le relazioni (2.3), (2.1), (2.4) mostrano che è monocromatica. □

Gli argomenti utilizzati dimostrano alcuni enunciati più generali rispetto al teorema 1. Seguono alcune osservazioni in merito.

**Commento 1.** Di fatto, abbiamo mostrato la regolarità della configurazione

$$a, b, a \cdot 2^b \mid a, b \in \mathbb{N}$$

La tripla $A, B, C$ trovata, infatti, è della forma $A = 2^a, B = 2^b, C = 2^{a \cdot 2^b}$, e dunque è contenuta nel sottoinsieme dei naturali formato dalle potenze di 2. La dimostrazione funziona esattamente allo stesso modo cercando triple esponenziali formate da potenze di 3: quindi anche la configurazione

$$a, b, a \cdot 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}$$

è regolare ed è vero che per ogni colorazione esiste una tripla monocromatica della forma $A = 3^a, B = 3^b, C = 3^{a \cdot 3^b}$. In generale, per qualsiasi $\gamma > 1$, la configurazione

$$a, b, a \cdot \gamma^b \mid a, b > 1$$

è regolare e ogni colorazione ammette una tripla esponenziale monocromatica della forma $A = \gamma^a, B = \gamma^b, C = \gamma^{a \cdot \gamma^b}$, con $a, b \in \mathbb{N}$.

Nel caso di colorazioni in due colori, la dimostrazione di Brown, fornisce una tripla esponenziale $A, B, A^B$ in cui $A, B$ sono, rispettivamente, una potenza di 2 e una potenza di 3 (ma il suo argomento funziona per qualsiasi altra scelta di due interi maggiori di 1) [Bro]. Sorgono, allora, le seguenti domande.

> *Vale un risultato analogo per qualsiasi colorazione? Fissata una colorazione dei naturali, ci sono altri modi di esibire triple esponenziali monocromatiche?*

**Commento 2.** Sull'insieme $X_j^{(c)}$ abbiamo più informazioni di quelle sfruttate nella dimostrazione. Per esempio, per ogni $l \in [j, r]$, per la $l$-esima ipotesi di simultaneità, $X_j^{(c)}$ contiene le progressioni aritmetiche $P_{l+1}(M)$ al variare di $M \in \mathbb{N}$. Fissiamo un intero $L \in \mathbb{N}$, consideriamo una progressione

$$P_0(L+1) = \{s_0(L+1) + k \cdot d_0(L+1) \,|\, k \leq L\} \subset X_j^{(c)}$$

Ripercorriamo la dimostrazione ponendo $x_0 = s_0(L+1)$ e $c_0 = 2^{d_0(L+1)}$. La (2.1) diventa

$$\begin{aligned} c &= f\Big(a^{(d_j(\overline{M}))}(s_0(L+1) + k \cdot d_0(L+1))\Big) \\ &= f\Big(2 \star \big(d_j(\overline{M}) \cdot 2^{x_0} \cdot 2^{k \cdot d_0(L+1)}\big)\Big) \\ &= f\big(B^{c_0^k}\big) \end{aligned} \tag{2.5}$$

per ogni $k \leq L$ e per $\overline{M} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande (senza perdita di generalità possiamo supporre $\overline{M} > 2^{x_0} \cdot c_0^L$).

Posto $e = 2^{d_j(\overline{M})}$, dalla (2.2) si ha

$$\begin{aligned} c &= f\Big(a^{(d_i(\widehat{M}))}(s_j(\overline{M}) + h \cdot d_j(\overline{M}))\Big) \\ &= f\Big(2 \star \big(d_i(\widehat{M}) \cdot 2^{s_j(\overline{M})} \cdot 2^{h \cdot d_j(\overline{M})}\big)\Big) \\ &= f\big(A^{e^h}\big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

per ogni $h < \overline{M}$. Dunque la configurazione

$$A, B, A^e, \ldots, A^{e^{\overline{M}-1}}, B^{c_0}, \ldots, B^{c_0^L} \;\Big|\; A, B > 1$$

è regolare per ogni $L, \overline{M} \in \mathbb{N}$. In particolare, poiché $B = e^{2^{x_0}}$ e $\overline{M} > 2^{x_0} \cdot c_0^L$, la configurazione contiene gli insiemi della forma

$$A, B, A^B, A^{B^2}, \ldots, A^{B^L} \;\Big|\; A, B > 1$$

che, quindi, è un pattern regolare per ogni $L \in \mathbb{N}$.

**Commento 3.** Fissando $r = 2 \cdot |K| + 1$ all'inizio della dimostrazione, il principio della piccionaia implica che nella sequenza $\langle c_1, \ldots, c_r \rangle$ ci sia un colore $c \in K$ che compare (almeno) tre volte, diciamo $c = c_i = c_j = c_k$ per qualche $i < j < k \leq r$. Combinando opportunamente le condizioni di simultaneità e di convergenza, si deduce la regolarità del pattern

$$A, B, C, B^C, A^C, A^B, A^{B^C} \;\Big|\; A, B, C > 1$$

In generale, fissato $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo, si può mostrare che il pattern

$$A_1, \ldots, A_m, A_{i_1}^{A_{i_2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{A_{i_n}}}}}} \;\Bigg|\; A_1, \ldots, A_m > 1, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m, \quad n \in \mathbb{N}$$

è regolare. Viene spontaneo chiedersi se questo vale anche per il pattern infinito

$$A_1, A_2, \ldots, \; A_{i_1}^{A_{i_2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{A_{i_n}}}}}} \;\Bigg|\; A_1, A_2, \ldots > 1, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

L'argomento usato nel caso *finito* per rispondere positivamente fallisce. Infatti, seppure sia possibile definire ricorsivamente le colorazioni $\chi_r$ al variare di $r \in \mathbb{N}$, nel momento in cui si considera l'insieme $X_j^{(c)}$ viene fissato l'intero $m$. In effetti, la proposizione 1 (sezione 2.3) risponde negativamente a questa domanda.

## 2.2 Generalizzazioni

### 2.2.1 Esponenziale di una collezione

Siano $w, a, b, n, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{N}$ interi positivi, con $a, b > 1$. È definito l'insieme

$$\exp_{w,a,b}(z_1, \ldots, z_n) = \left\{a, b^{z_1}, \ldots, b^{z_n}, a^b, a^{b^2}, \ldots, a^{b^w}\right\}$$

Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ una collezione di $n$-uple di interi positivi, $W \colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ una funzione. È definita la collezione

$$\mathrm{Exp}_W \mathcal{A} = \left\{\exp_{W(z_i \mid i \leq n),a,b}(z_1, \ldots, z_n) \,\middle|\, (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{A},\ a, b > 1\right\}$$

detta *esponenziale pesato* di $\mathcal{A}$. La funzione $W$ è detta *funzione peso.*

Per esempio, la collezione $\mathrm{Exp}_1\{(1)\}$ corrisponde a quella definita dal pattern esponenziale $a, b, a^b \mid a, b > 1$ . Infatti, fissati $n = 1$, $\mathcal{A} = \{(1)\}$, $W(1) = 1$, si ha

$$\exp_{1,a,b}(1) = \left\{a, b, a^b\right\}$$

Quindi, per il teorema 1, la collezione $\mathrm{Exp}_1\{(1)\}$ è regolare per partizioni. Si noti che anche la collezione $\mathcal{A} = \{(1)\}$ è regolare per partizioni, perché il suo unico elemento è una 1-upla.

In generale, il teorema 2 stabilisce che la regolarità di una collezione $\mathcal{A}$ è una condizione sufficiente per la regolarità del suo esponenziale pesato $\mathrm{Exp}_W \mathcal{A}$. Si noti che la condizione non è necessaria, infatti un controesempio è dato, semplicemente, da $n = 2$, $\mathcal{A} = \{(1, 2)\}$, $W(1, 2) = 1$: la collezione $\mathcal{A}$ non è regolare, perché il suo unico elemento è una coppia, mentre il suo esponenziale $\mathrm{Exp}_1 \mathcal{A}$ sì, perché corrisponde al pattern $a, b, b^2, a^b \mid a, b > 1$, che è regolare per quanto osservato nei commenti del teorema 1.

La dimostrazione del teorema 2 segue passo passo quella del teorema 1. Il fattore discriminante sta nell'aggiunta, alle richieste del lemma chiave, di una terza condizione, legata alla regolarità della collezione $\mathcal{A}$.

**Lemma 4** (Lemma chiave)**.** *Siano $n, r \in \mathbb{N}$ due interi positivi, $K$ un insieme finito di colori. Siano $f \colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione, $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione. Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ una collezione di $n$-uple di naturali regolare per partizioni di $\mathbb{N}$. Esistono*

- *colorazioni $\chi_1, \ldots, \chi_r \colon \mathbb{N} \to K$ e colori $c_1, \ldots, c_r \in K$;*
- *successioni di interi positivi*

$$\begin{array}{cc} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\ \langle s_2(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_2(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\ \vdots & \vdots \\ \langle s_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \end{array}$$

- *successioni di $n$-uple di naturali*

$$\begin{gathered} \left\langle \left(x_1^{(1)}(M), \ldots, x_1^{(n)}(M)\right) \,\middle|\, M \in \mathbb{N} \right\rangle \subset \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n \\ \vdots \\ \left\langle \left(x_r^{(1)}(M), \ldots, x_r^{(n)}(M)\right) \,\middle|\, M \in \mathbb{N} \right\rangle \subset \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n \end{gathered}$$

  *dove, per ogni $k \in \mathbb{N}$ intero positivo, $P_k \in \mathbb{N}$ è un intero positivo tale che $\mathcal{A} \cap [P_k]^n$ è regolare per partizioni;*

*tali che*

*i) $l$-esima condizione di simultaneità: i colori $c_1, \ldots, c_l$ sono simultaneamente di Van der Waerden per la sequenza di colorazioni $\langle \chi_1, \ldots, \chi_l \rangle$ con profilo $\langle s_{l+1}(M), d_{l+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$;*

*ii) $l$-esima condizione di convergenza: esiste il limite*

$$\lim_M f^{\left(d_l(g(M)) \cdot x_l^{(1)}(M)\right)} = \chi_l$$

*iii) $l$-esima condizione di regolarità: per ogni $M \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \leq M$ vale*

$$\begin{aligned} f^{\left(d_l(g(M)) \cdot x_l^{(1)}(M)\right)}(y) &= f^{\left(d_l(g(M)) \cdot x_l^{(2)}(M)\right)}(y) \\ &\vdots \\ &= f^{\left(d_l(g(M)) \cdot x_l^{(n)}(M)\right)}(y) \end{aligned}$$

*per ogni $l \leq r$.*

*Dimostrazione.* Poiché gli elementi di $\mathcal{A}$ sono insiemi finiti, per il teorema di compattezza per ogni intero positivo $k \in \mathbb{N}$ esiste un intero positivo $P_k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{A} \cap [P_k]^n$ è regolare per partizioni. Procediamo per induzione su $r$.

**Passo base:** Per ogni $M \in \mathbb{N}$, poniamo $d_1(M) = 1$. Per ogni $M \in \mathbb{N}$ consideriamo una $n$-upla $x_1(M) \in \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n$ monocromatica rispetto alla colorazione

$$F_M(z) = \left(f^{(z)}(1), \ldots, f^{(z)}(M)\right) \in K^M$$

Per ogni $M \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \leq M$ vale

$$\begin{aligned} f^{\left(x_1^{(1)}(M)\right)}(y) &= f^{\left(x_1^{(2)}(M)\right)}(y) \\ &\vdots \\ &= f^{\left(x_1^{(n)}(M)\right)}(y) \end{aligned}$$

La prima condizione di regolarità è soddisfatta.

A meno di passare a un'estratta, cosa che non compromette la validità della prima condizione di regolarità, la successione di colorazioni

$$\left\langle f^{\left(x_1^{(1)}(M)\right)} \,\middle|\, M \in \mathbb{N} \right\rangle$$

è convergente. Poniamo $\chi_1 = \lim_M f^{\left(x_1^{(1)}(M)\right)}$. La prima condizione di convergenza è soddisfatta.

Sia $c_1 \in K$ il colore di Van der Waerden per $\chi_1$ fornito dal lemma 2.$a$. Sia $\langle s_2(M), d_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$ il profilo di simultaneità. La prima condizione di simultaneità è soddisfatta.

**Passo induttivo:** Supponiamo la tesi vera per $r \in \mathbb{N}$. L'ipotesi induttiva fornisce

- le colorazioni $\chi_1, \dots, \chi_r \colon \mathbb{N} \to K$ e i colori $c_1, \dots, c_r \in K$;
- le successioni di interi positivi

$$\begin{array}{cc} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \langle s_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_2(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \\ \vdots & \vdots \\ \langle s_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{N} \end{array}$$

- le successioni di $n$-uple di naturali

$$\begin{gathered} \left\langle \left(x_1^{(1)}(M), \dots, x_1^{(n)}(M)\right) \,\middle|\, M \in \mathbb{N} \right\rangle \subset \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n \\ \vdots \\ \left\langle \left(x_r^{(1)}(M), \dots, x_r^{(n)}(M)\right) \,\middle|\, M \in \mathbb{N} \right\rangle \subset \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n \end{gathered}$$

che verificano le condizioni *i*, *ii* e *iii* per ogni $l \leq r$. Per la $r$-esima condizione di simultaneità, per ogni $M \in \mathbb{N}$, esiste una progressione aritmetica

$$P_{r+1}(M) = \{s_{r+1}(M) + h \cdot d_{r+1}(M) \mid h < M\}$$

di lunghezza $M$ il cui colore secondo ogni $\chi_i$ è $c_i$, al variare di $i \leq r$. Per ogni $M \in \mathbb{N}$ consideriamo una $n$-upla $x_{r+1}(M) \in \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n$ monocromatica secondo la colorazione

$$F_M(z) = \left(f^{(d_{r+1}(g(M)) \cdot z)}(1), \dots, f^{(d_{r+1}(g(M)) \cdot z)}(M)\right) \in K^M$$

Per ogni $M \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \leq M$ vale

$$\begin{aligned} f^{\left(d_{r+1}(g(M)) \cdot x_{r+1}^{(1)}(M)\right)}(y) &= f^{\left(d_{r+1}(g(M)) \cdot x_{r+1}^{(2)}(M)\right)}(y) \\ &\vdots \\ &= f^{\left(d_{r+1}(g(M)) \cdot x_{r+1}^{(n)}(M)\right)}(y) \end{aligned}$$

La $(r+1)$-esima condizione di regolarità è soddisfatta.

A meno di passare a un'estratta, cosa che non compromette la validità delle condizioni già soddisfatte, la successione di colorazioni

$$\left\langle f^{\left(d_{r+1}(g(M)) \cdot x_{r+1}^{(1)}(M)\right)} \,\middle|\, M \in \mathbb{N} \right\rangle$$

è convergente. Poniamo $\chi_{r+1} = \lim_M f^{\left(d_{r+1}(g(M)) \cdot x_{r+1}^{(1)}(M)\right)}$ il suo limite. La $(r+1)$-esima condizione di convergenza è soddisfatta.

Sia $c_{r+1} \in K$ il colore fornito dal lemma 2.$b$ tale che i colori $c_1, \dots, c_{r+1}$ siano simultaneamente di Van der Waerden per $\langle \chi_1, \dots, \chi_{r+1} \rangle$. Sia

$$\langle s_{r+2}(M), d_{r+2}(M) \mid M \in \mathbb{N} \rangle$$

il profilo di simultaneità. La $(r+1)$-esima condizione di simultaneità è soddisfatta.

□

**Teorema 2.** *Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ una collezione di $n$-uple di naturali regolare per partizioni. Sia $W\colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ una funzione peso. L'esponenziale pesato* $\mathrm{Exp}_W\mathcal{A}$ *è regolare per partizioni.*

*Dimostrazione.* Sia $K$ un insieme finito di colori. Sia $f\colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione dei naturali. Poniamo $r = |K| + 1$. Per ogni $M \in \mathbb{N}$, poniamo

$$g(M) = 2^M \cdot w(M)$$

dove $w(M) = \max\bigl\{W(x) \bigm| x \in \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n\bigr\}$ e $P_{|K|^M} \in \mathbb{N}$ è un intero positivo tale che $\mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n$ è regolare per partizioni. Il lemma 4 fornisce

- le colorazioni $\chi_1, \dots, \chi_r\colon \mathbb{N} \to K$ e i colori $c_1, \dots, c_r \in K$;
- le successioni di interi positivi

$$\begin{array}{cc} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\ \langle s_2(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_2(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\ \vdots & \vdots \\ \langle s_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} & \langle d_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \end{array}$$

- le successioni di $n$-uple di naturali

$$\begin{gathered} \Bigl\langle \bigl(x_1^{(1)}(M), \dots, x_1^{(n)}(M)\bigr) \Bigm| M \in \mathbb{N} \Bigr\rangle \subset \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n \\ \vdots \\ \Bigl\langle \bigl(x_r^{(1)}(M), \dots, x_r^{(n)}(M)\bigr) \Bigm| M \in \mathbb{N} \Bigr\rangle \subset \mathcal{A} \cap [P_{|K|^M}]^n \end{gathered}$$

tali che per ogni $l \leq r$ valgano le condizioni di simultaneità, di convergenza e di regolarità.

Poiché $r > |K|$, per il principio della piccionaia esiste un colore $c \in K$ che compare più volte nella sequenza di colori, diciamo $c = c_i = c_j$ per qualche $i < j \leq r$. Per la $j$-esima condizione di simultaneità, $c$ è un colore di Van der Waerden per $\chi_j$, quindi l'insieme

$$X_j^{(c)} = \{y \in \mathbb{N} \mid \chi_j(y) = c\}$$

è non vuoto. Fissiamo $y_0 \in X_j^{(c)}$, ad esempio il minimo.

Per la $j$-esima condizione di convergenza, vale la relazione

$$\begin{aligned} c = \chi_j(y_0) &= \lim_M f^{\left(d_j(g(M)) \cdot x_j^{(1)}(M)\right)}(y_0) \\ &= f\Bigl(a^{\left(d_j(g(\overline{M})) \cdot x_j^{(1)}(\overline{M})\right)}(y_0)\Bigr) \\ &= f\Bigl(\bigl(a^{(d_j(g(\overline{M})))}(y_0)\bigr)^{x_j^{(1)}(\overline{M})}\Bigr) \end{aligned} \tag{2.7}$$

per $\overline{M} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande.

Senza perdita di generalità possiamo supporre $\overline{M} > y_0$. Per la $j$-esima condizione di regolarità, vale anche

$$
\begin{aligned}
c = f\Big(\big(a^{(d_j(g(\overline{M})))}(y_0)\big)^{x_j^{(1)}(\overline{M})}\Big) &= f\Big(\big(a^{(d_j(g(\overline{M})))}(y_0)\big)^{x_j^{(2)}(\overline{M})}\Big) \\
&\vdots \\
&= f\Big(\big(a^{(d_j(g(\overline{M})))}(y_0)\big)^{x_j^{(n)}(\overline{M})}\Big)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Continuando come nella dimostrazione del teorema 1, si ottiene l'equazione analoga alla (2.2):

$$
\begin{aligned}
c &= \chi_i\big(s_j(g(\overline{M})) + h \cdot d_j(g(\overline{M}))\big) \\
&= \lim_M f^{\left(d_i(g(M))\cdot x_i^{(1)}(M)\right)}\big(s_j(g(\overline{M})) + h \cdot d_j(g(\overline{M}))\big) \\
&= f\Big(a^{\left(d_i(g(\widehat{M}))\cdot x_i^{(1)}(\widehat{M})\right)}\big(s_j(g(\overline{M})) + h \cdot d_j(g(\overline{M}))\big)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

per ogni $h < g(\overline{M})$ e per $\widehat{M} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande.

Posti

$$
A = a^{\left(d_i(g(\widehat{M}))\cdot x_i^{(1)}(\widehat{M})\right)}(s_j(g(\overline{M}))) > 1
$$
$$
B = a^{(d_j(g(\overline{M})))}(y_0) > 1
$$

e

$$
z_1 = x_j^{(1)}(\overline{M}) \qquad \cdots \qquad z_n = x_j^{(n)}(\overline{M})
$$

per la (2.8), si ha

$$
\begin{gathered}
f\left(B^{z_1}\right) = c \\
\vdots \\
f\left(B^{z_n}\right) = c
\end{gathered}
$$

e per ogni $k \leq W(z_1, \ldots, z_n)$, scegliendo $h = 2^{y_0} \cdot k \leq g(\overline{M})$, per la (2.9), si ha

$$
\begin{aligned}
&f\left(A^{B^k}\right) = \\
&\quad = f\left(2 \star \left(d_i(g(\widehat{M})) \cdot x_i^{(1)}(\widehat{M}) \cdot 2^{s_j(g(\overline{M}))} \cdot \left(2 \star \left(d_j(g(\overline{M})) \cdot 2^{y_0}\right)\right)^k\right) = \right. \\
&\qquad\qquad = f\Big(a^{\left(d_i(g(\widehat{M}))\cdot x_i^{(1)}(\widehat{M})\right)}\big(s_j(g(\overline{M})) + h \cdot d_j(g(\overline{M}))\big)\Big) = c
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
A, B^{z_1}, \ldots, B^{z_n}, A^B, A^{B^2}, \ldots, A^{B^{W(z_1,\ldots,z_n)}}
$$

è monocromatico. $\square$

### 2.2.2 Esponenziazione e moltiplicazione

Una tripla esponenziale si può vedere come caso particolare di pattern esponenziali più complessi. Per esempio, nei commenti del teorema 1 viene discussa la regolarità per partizioni del pattern

$$a_{i_1} \star \cdots \star a_{i_n} \mid a_1, \ldots, a_m > 1,\ 1 \le i_1 < \cdots < i_n \le m,\ n \in \mathbb{N}$$

dove l'ambiguità della scrittura va risolta assegnando la massima precedenza all'ultimo operatore $\star$ che vi compare.

Per $a, m, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathrm{FE}_a(\emptyset) = \{a\}$$
$$\mathrm{FE}_a(y_1, \ldots, y_m) = \big\{a \star (e_1 \cdot \cdots \cdot e_m) \,\big|\, e_i \in \mathrm{FE}_{y_i}(y_{i+1}, \ldots, y_m) \cup \{1\}\big\}$$

Per $m, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathrm{FE}(a_1, \ldots, a_m) = \bigcup_{i \le m} \mathrm{FE}_{a_i}(a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

Per esempio, per $a, b, c, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$ si ha:

- $\mathrm{FE}(a) = \{a\}$;
- $\mathrm{FE}(a, b) = \big\{a, a^b, b\big\}$;
- $\mathrm{FE}(a, b, c) = \big\{a, a^b, a^{b^c}, a^{bc}, a^{b^c c}, b, b^c, c\big\} \supset \big\{a, b, c, a^b, a^c, a^{b^c}\big\}$;

e, in generale,

$$\mathrm{FE}(a_1, \ldots, a_m) \supset \{a_{i_1} \star \cdots \star a_{i_n} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le m,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Con questa definizione, l'insieme $\mathrm{FE}(a_1, \ldots, a_m)$ contiene i risultati di tutte le esponenziazioni possibili anche al variare dell'ordine di precedenza.

Fissato $m \in \mathbb{N}$, la collezione

$$\mathbf{FE}(m) = \big\{\mathrm{FE}(a_1, \ldots, a_m) \,\big|\, a_1, \ldots, a_m > 1\big\}$$

degli insiemi esponenziali *allargati* è regolare per partizioni. Si noti l'analogia con il teorema di Arnautov-Folkman-Sanders (sezione 1.4). Infatti, il teorema 3 stabilisce la regolarità della collezione

$$\mathbf{FEP}(m) = \big\{\mathrm{FE}(a_1, \ldots, a_m) \cup \mathrm{FP}(a_1, \ldots, a_m) \,\big|\, a_1, \ldots, a_m > 1\big\}$$

che estende la prima, in quanto i suoi elementi sono insiemi formati da tutte le possibili esponenziazioni e da tutti i possibili prodotti dei loro generatori.

Per quanto riguarda la dimostrazione del teorema 3, aggiungere la struttura moltiplicativa a quella esponenziale complica le cose. La maggiore quantità di informazioni di cui tenere traccia suggerisce di inserire il problema in un contesto *multidimensionale*. Il teorema di Gallai, che sostituisce quello di Van der Waerden, viene applicato per mezzo del lemma di *sincronizzazione*, una generalizzazione del lemma di simultaneità. Per quanto riguarda la struttura moltiplicativa, la dimostrazione poggia su un secondo risultato di base, elemento assente nella dimostrazione del teorema 1: si tratta del teorema delle unioni finite, riformulato in enunciato *ad hoc*, più forte di quello originale. Anche in questo caso è presente un lemma chiave che agisce sulla struttura esponenziale.

Nel seguito riporto gli enunciati dei risultati preliminari e illustro la dimostrazione del teorema 3 (solo per il caso $m = k = 2$, dove $k$ è il numero di colori ammessi). Questa è articolata in due passi: il primo ripercorre — con le complicazioni del caso — la dimostrazione del teorema 1; nel secondo, invece, entra in gioco la struttura moltiplicativa della collezione cercata. Per le dimostrazioni dei risultati preliminari rimando a [JS1, paragrafi 3 e 4].

**Scatole e griglie.** Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Una scatola $n$-dimensionale di spessore $T \geq 0$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}_0^n$ della forma

$$\begin{aligned} B &= \{s + v \mid v \in [0, T]^n\} \\ &= s + [0, L]^n \end{aligned}$$

per qualche $s \in \mathbb{N}_0^n$. Una griglia $n$-dimensionale di lunghezza $L \geq 0$ e passo $d > 0$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}_0^n$ della forma

$$\begin{aligned} G &= \{s + d \cdot v \mid v \in [0, L]^n\} \\ &= s + d \cdot [0, L]^n \end{aligned}$$

per qualche $s \in \mathbb{N}_0^n$. Una griglia $n$-dimensionale di lunghezza $L$ e passo $d = 1$ è una scatola $n$-dimensionale di spessore $L$. Una griglia 1-dimensionale di lunghezza $L$ e passo $d$ è una progressione aritmetica di lunghezza $L + 1$ e ragione $d$.

**Fascio di griglie.** Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Un fascio di spessore $T \geq 0$ di griglie $n$-dimensionali di lunghezza $L \geq 0$ e di passo $d > 0$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}_0^n$ della forma

$$\begin{aligned} F &= \{s + u + d \cdot v \mid u \in [0, T]^n, v \in [0, L]^n\} \\ &= s + [0, T]^n + d \cdot [0, L]^n \end{aligned}$$

per qualche $s \in \mathbb{N}_0^n$. Le griglie del fascio $F$ sono gli insiemi

$$G_u(F) = s + u + d \cdot [0, L]^n$$

al variare di $u \in [0, T]^n$. Ciascuna griglia del fascio ha lunghezza $L$ e passo $d$. Un fascio è l'unione (disgiunta) delle proprie griglie. Un fascio di spessore $T = 0$ è una griglia. Le sezioni del fascio $F$ sono gli insiemi

$$B_v(F) = s + [0, T]^n + d \cdot v$$

al variare di $v \in [0, L]^n$. Ciascuna sezione del fascio è una scatola di spessore $T$. Un fascio è l'unione (disgiunta) delle proprie sezioni. Un fascio di lunghezza $L = 0$ ha una sola sezione. Se $T = L$ il fascio $F$ è equilatero.

**Fascio equilatero consistente con una colorazione.** Siano $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $K$ un insieme finito di colori. Sia $\chi \colon \mathbb{N}_0^n \to K$ una colorazione. Un fascio equilatero di spessore $M \geq 0$ di griglie $n$-dimensionali

$$F = s + [0, M]^n + d \cdot [0, M]^n \subset \mathbb{N}_0^n$$

è consistente con la colorazione $\chi$ se ogni griglia del fascio è monocromatica rispetto a $\chi$. Cioè se

$$\chi(s + u + d \cdot v_1) = \chi(s + u + d \cdot v_2)$$

per ogni $u, v_1, v_2 \in [0, M]^n$.

**Lemma 5** (Teorema di Gallai per fasci equilateri consistenti)**.** *Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Ogni colorazione di $\mathbb{N}_0^n$ ammette un fascio equilatero arbitrariamente spesso di griglie $n$-dimensionali che sia consistente con essa.*

**Derivata di una colorazione.** Siano $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $K$ un insieme finito di colori. Sia $\chi\colon \mathbb{N}_0^n \to K$ una colorazione. Una colorazione

$$\partial\chi\colon \mathbb{N}_0^n \to K$$

è una derivata di $\chi$ se per ogni $M \in \mathbb{N}$ intero positivo esiste un fascio equilatero di spessore $M$

$$F(M) = s(M) + [0, M]^n + d(M) \cdot [0, M]^n$$

che sia consistente con $\chi$ e le cui sezioni siano colorate secondo $\chi$ come la scatola $B(M) = [0, M]^n$ secondo $\partial\chi$. Cioè se per ogni $M$ esiste $F(M)$ tale che

$$\chi\big(s(M) + u + d(M) \cdot v\big) = \partial\chi(u)$$

per ogni $u, v \in [0, M]^n$.

**Colorazioni partizionate sincronizzate.** Siano $n, r \in \mathbb{N}$ due interi positivi, $q \in \mathbb{N}_0$ un intero non negativo, $K$ un insieme finito di colori. Siano $\langle s(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^n$ una successione di vettori di interi non negativi e $\langle d(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}$ una successione di interi positivi. Le colorazioni

$$\left.\begin{matrix} \chi_1 & \partial\chi_1 & \cdots & \partial^q\chi_1 \\ & & \vdots & \\ \chi_r & \partial\chi_r & \cdots & \partial^q\chi_r \end{matrix}\right| \; \partial^j\chi_i\colon \mathbb{N}_0^n \to K$$

sono sincronizzate con profilo $\langle s(M), d(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle$ se per ogni $M \in \mathbb{N}$ intero positivo esiste un fascio equilatero di spessore $M$

$$F(M) = s(M) + [0, M]^n + d(M) \cdot [0, M]^n$$

consistente con le colorazioni $\partial^j\chi_i$ al variare di $i \le r$ e di $j \le q$ e che verifichi la condizione di derivazione per le colorazioni $\partial^j\chi_i$ al variare di $i \le r$ e di $j < q$. Cioè se per ogni $M$ esiste $F(M)$ tale che

$$\partial^q\chi_i\big(s(M) + u + d(M) \cdot v_1\big) = \partial^q\chi_i\big(s(M) + u + d(M) \cdot v_2\big)$$
$$\partial^j\chi_i\big(s(M) + u + d(M) \cdot v\big) = \partial^{j+1}\chi_i(u)$$

per ogni $i \le r$ e per ogni $j < q$, per ogni $u, v, v_1, v_2 \in [0, M]^n$.

*Osservazione* 5. Se le

$$\big(\chi_i \quad \partial\chi_i \quad \cdots \quad \partial^q\chi_i\big)_{i \le r}$$

sono sincronizzate con profilo $\langle s(M), d(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle$, allora sono sincronizzate anche con profilo $\langle s(M(N)), d(M(N)) \mid N \in \mathbb{N}\rangle$, per ogni $\langle M(N) \mid N \in \mathbb{N}\rangle$ successione crescente di interi positivi.

*Osservazione* 6. Se le
$$\left(\chi_i \quad \partial\chi_i \quad \cdots \quad \partial^q\chi_i\right)_{i\le r}$$
sono sincronizzate con profilo $\langle s(M), d(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle$, allora, posto
$$\widetilde{\partial^j\chi_i}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \partial^j\chi_i(x_1,\dots,x_n)$$
al variare di $i \le r$ e di $j \le q$, si ha

- le $\widetilde{\partial^j\chi_i}$ sono derivate di ordine $j$ delle $\widetilde{\chi_i}$ al variare di $i \le r$ e di $j \le q$;
- le
$$\left(\widetilde{\chi_i} \quad \widetilde{\partial\chi_i} \quad \dots \quad \widetilde{\partial^q\chi_i}\right)_{i\le r}$$
sono sincronizzate con profilo $\langle s(M), d(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle$.

**Lemma 6** (Sincronizzazione)**.** *Siano $n, r \in \mathbb{N}$ due interi positivi, $q \in \mathbb{N}_0$ un intero non negativo, $K$ un insieme finito di colori.*

*a) Sia $\chi\colon \mathbb{N}_0^n \to K$ una colorazione. Esistono derivate $\partial\chi,\dots,\partial^q\chi$ tali che*
$$\chi \quad \partial\chi \quad \cdots \quad \partial^q\chi$$
*sono sincronizzate.*

*b) Siano $\partial^j\chi_i\colon \mathbb{N}_0^n \to K$ colorazioni al variare di $i \le r$ e di $j \le q$ tali che $(\chi_i, \partial\chi_i, \dots, \partial^q\chi_i)_{i\le r}$ sono sincronizzate. Sia $\chi_{r+1}\colon \mathbb{N}_0^n \to K$ una colorazione. Esistono derivate $\partial\chi_{r+1},\dots,\partial^q\chi_{r+1}$ tali che*
$$\begin{array}{cccc} \chi_1 & \partial\chi_1 & \cdots & \partial^q\chi_1 \\ & & \vdots & \\ \chi_r & \partial\chi_r & \cdots & \partial^q\chi_r \\ \chi_{r+1} & \partial\chi_{r+1} & \cdots & \partial^q\chi_{r+1} \end{array}$$
*sono sincronizzate.*

**Lemma 7** (Teorema delle unioni finite - versione forte)**.** *Siano $k, m \in \mathbb{N}$ due interi positivi. Esiste un intero positivo $N_k(m) \in \mathbb{N}$ tale che ogni colorazione in $k$ colori di $\mathcal{P}([N_k(m)])$ ammette $m$ insiemi $A_1, A_2, \dots, A_m \subset [N_k(m)]$, con:*

- *$A_1 < A_2 < \cdots < A_m$ sono non vuoti;*
- *$\mathrm{FU}(A_1, A_2, \dots, A_m) \subset \mathcal{P}([N_k(m)])$ è monocromatico.*

**Notazione.** Siano $r \ge 0$ un intero non negativo, $K$ un insieme finito di colori. Sia $f\colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione. Per ogni $l \le r$, per ogni $S \in \mathcal{P}([0,l])$ non vuoto e per ogni $s_1,\dots,s_r \in \mathbb{N}_0^{[0,r]}$ e $d_0, d_1, \dots, d_r \in \mathbb{N}$ sono definiti:

- gli interi positivi $a^{(l,S,s_i,d_i|i\le l)}(x) > 1$ al variare di $x \in \mathbb{N}_0^{[0,r]}$
$$\begin{aligned} a^{(l,S,s_i,d_i|i\le l)}(x) &= \prod_{i\in S} 2\star\left(d_i\cdot 2\star\left(x^{(i)} + \sum_{t\in(i,l]} s_t^{(i)}\right)\right) \\ &= 2\star\left(\sum_{i\in S} d_i\cdot 2\star\left(x^{(i)} + \sum_{t\in(i,l]} s_t^{(i)}\right)\right) > 1 \end{aligned}$$

- la colorazione

$$\begin{aligned} f^{(l,S,s_i,d_i|i\leq l)} \colon \mathbb{N}_0^{[0,r]} &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto f\Big(a^{(l,S,s_i,d_i|i\leq l)}(x)\Big) \end{aligned}$$

**Lemma 8** (Lemma chiave)**.** *Siano $q \geq r \geq 0$ due interi non negativi, $K$ un insieme finito di colori. Sia $f \colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione. Esistono*

- *colorazioni*
$$\chi_S, \partial\chi_S, \dots, \partial^q\chi_S \colon \mathbb{N}_0^{[0,r]} \to K$$
*al variare di $S \in \mathcal{P}([0,r])$ non vuoto;*

- *successioni $\langle d_0(M) = 1 \mid M \in \mathbb{N}\rangle$,*
$$\begin{matrix} \langle s_1(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^{[0,r]} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\ \vdots & \vdots \\ \langle s_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^{[0,r]} & \langle d_{r+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \end{matrix}$$
*rispettivamente di vettori di interi non negativi e di interi positivi;*

- *sottoinsiemi infiniti $C_0, \dots, C_r \subset \mathbb{N}$;*

*tali che*

*i) $l$-esima condizione di sincronia: le colorazioni*
$$\begin{pmatrix}\chi_S & \partial\chi_S & \dots & \partial^q\chi_S\end{pmatrix}_{S\in\mathcal{P}([0,l]), S\neq\emptyset}$$
*sono sincronizzate con profilo $\langle s_{l+1}(M), d_{l+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle$;*

*ii) $l$-esima condizione di convergenza: per ogni $S \in \mathcal{P}([0,l])$ non vuoto esiste il limite*
$$\lim_{M_l\in C_l} \cdots \lim_{M_0\in C_0} f^{(l,S,s_i(M_i),d_i(M_i)|i\leq l)} = \partial^{\,l-\max S}\chi_S$$

*per ogni $l \leq r$.*

**Teorema 3.** *Siano $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $K$ un insieme finito di colori, $f \colon \mathbb{N} \to K$ una colorazione dei naturali. Esistono $a_1, \dots, a_m > 1$ per cui l'insieme*
$$\mathrm{FE}(a_1, \dots, a_m) \cup \mathrm{FP}(a_1, \dots, a_m)$$
*è monocromatico.*

*Dimostrazione.* Illustro solo il caso $m = 2$, $K = \{\texttt{RED}, \texttt{BLUE}\}$, cioè dimostro che il pattern
$$a, b, ab, a^b \mid a, b > 1$$
è regolare per partizioni di $\mathbb{N}$ in due pezzi.

**Passo 1** Poniamo $q = r = 4$. Il lemma 8 fornisce

- le colorazioni

$$\chi_S, \partial\chi_S, \partial^2\chi_S, \partial^3\chi_S, \partial^4\chi_S \colon \mathbb{N}_0^{[0,4]} \to \{\mathtt{RED}, \mathtt{BLUE}\}$$

  al variare di $S \in \mathcal{P}([0,4])$ non vuoto;

- le successioni $\langle d_0(M) = 1 \mid M \in \mathbb{N}\rangle$,

$$\begin{array}{ll}
\langle s_1(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^{[0,4]} & \langle d_1(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\
\langle s_2(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^{[0,4]} & \langle d_2(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\
\langle s_3(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^{[0,4]} & \langle d_3(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\
\langle s_4(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^{[0,4]} & \langle d_4(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N} \\
\langle s_5(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}_0^{[0,4]} & \langle d_5(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle \subset \mathbb{N}
\end{array}$$

  rispettivamente di vettori di interi non negativi e di interi positivi;

- i sottoinsiemi infiniti $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 \subset \mathbb{N}$;

tali che

i) $l$-esima condizione di sincronia: le colorazioni

$$\begin{pmatrix}\chi_S & \partial\chi_S & \partial^2\chi_S & \partial^3\chi_S & \partial^4\chi_S\end{pmatrix}_{S\in\mathcal{P}([0,l]), S\neq\emptyset}$$

sono sincronizzate con profilo $\langle s_{l+1}(M), d_{l+1}(M) \mid M \in \mathbb{N}\rangle$;

ii) $l$-esima condizione di convergenza: per ogni $S \in \mathcal{P}([0,l])$ non vuoto esiste il limite

$$\lim_{M_l\in C_l} \cdots \lim_{M_0\in C_0} f^{(l,S,s_i(M_i),d_i(M_i)|i\leq l)} = \partial^{\,l-\max S}\chi_S$$

per ogni $l \in [0,4]$.

Consideriamo la colorazione $F\colon \mathcal{P}([0,4]) \to \{\mathtt{RED}, \mathtt{BLUE}\}$ definita da

$$\begin{aligned}
F(S) &= \partial^{4-\max S}\chi_S(0) \\
&= \lim_{M_4\in C_4}\lim_{M_3\in C_3}\lim_{M_2\in C_2}\lim_{M_1\in C_1}\lim_{M_0\in C_0} f^{(4,S,s_i(M_i),d_i(M_i)|i\leq 4)}(0) \\
&= f^{(4,S,s_i(\widehat{M}_i),d_i(\widehat{M}_i)|i\leq 4)}(0) \\
&= f\left(\prod_{i\in S} 2^{\,\hat{d}_i\cdot 2\star\hat{s}_i}\right)
\end{aligned}$$

per $\widehat{M}_0 \in C_0$, $\widehat{M}_1 \in C_1$, $\widehat{M}_2 \in C_2$, $\widehat{M}_3 \in C_3$, $\widehat{M}_4 \in C_4$ interi positivi sufficientemente grandi (per $i \in [0,4]$, abbiamo posto $\hat{s}_i = \sum_{t\in(i,4]} s_t^{(i)}(\widehat{M}_t) \in \mathbb{N}$ e $\hat{d}_i = d_i(\widehat{M}_i) \in \mathbb{N}$).

Senza perdita di generalità possiamo supporre che esistano $U_0 \leq \widehat{M}_0$, $U_1 \leq \widehat{M}_1$, $U_2 \leq \widehat{M}_2$, $U_3 \leq \widehat{M}_3$, $U_4 \leq \widehat{M}_4$ interi positivi, tali che

- per ogni $S \in \mathcal{P}([0,4])$ non vuoto e per ogni $l \in [\max S, 4]$ vale

$$\partial^{l-\max S}\chi_S(x) = \\ = \lim_{M_l \in C_l} \cdots \lim_{M_0 \in C_0} f^{(l,S,s_i(M_i),d_i(M_i)|i \leq l)}(x) = \\ = f^{(l,S,s_i(\widehat{M}_i),d_i(\widehat{M}_i)|i \leq l)}(x) \quad (2.10)$$

se $\|x\|_\infty \leq U_l$;

- per ogni $S \in \mathcal{P}([4])$ non vuoto e per ogni $l \in [\max S, 4]$ vale

$$\partial^{l-\max S}\chi_S(x) = \chi_S\left(x + \sum_{t \in (\max S, l]} \left(s_t(\widehat{M}_t) + \hat{d}_t \cdot v_t\right)\right) \quad (2.11)$$

se $\|x\|_\infty \leq U_l$ e $\|v_t\|_\infty \leq U_t$ per ogni $t \in (\max S, l]$.

**Passo 2** Poiché si ha $N = N_2(2) = 5 = |[0,4]|$, per il lemma 7 esistono due insiemi disgiunti non vuoti $A, B \in \mathcal{P}([0,4])$ tali che $\max A < \min B$ e che $\mathrm{FU}(A,B)$ sia monocromatico rispetto alla colorazione $F$. Supponiamo, ad esempio, che $F(A) = F(B) = F(A \cup B) = \texttt{RED}$. Poniamo

$$a = a^{(4,A,s_i(\widehat{M}_i),d_i(\widehat{M}_i)|i \leq 4)}(0) = \prod_{i \in A} 2^{\hat{d}_i \cdot 2 \star \hat{s}_i} > 1$$
$$b = a^{(4,B,s_i(\widehat{M}_i),d_i(\widehat{M}_i)|i \leq 4)}(0) = \prod_{i \in B} 2^{\hat{d}_i \cdot 2 \star \hat{s}_i} > 1$$

Per come sono costruiti gli interi $a$ e $b$ si ha che

$$f(a) = F(A) = \texttt{RED} \quad (2.12)$$
$$f(b) = F(B) = \texttt{RED} \quad (2.13)$$

e che

$$f(ab) = f\left(\prod_{i \in A} 2^{\hat{d}_i \cdot 2 \star \hat{s}_i} \cdot \prod_{i \in B} 2^{\hat{d}_i \cdot 2 \star \hat{s}_i}\right) = \\ = f\left(\prod_{i \in A \cup B} 2^{\hat{d}_i \cdot 2 \star \hat{s}_i}\right) = F(A \cup B) = \texttt{RED} \quad (2.14)$$

Per ogni $i \in A, j \in B$, poniamo

$$w_j^{(i)} = 2 \star \hat{s}_j \in \mathbb{N}$$

e per $i \notin A$ o per $j \notin B$, poniamo $w_j^{(i)} = 0$. Per $j \in [0,4]$, poniamo

$$w_j = (w_j^{(0)}, w_j^{(1)}, w_j^{(2)}, w_j^{(3)}, w_j^{(4)}) = 2^{\hat{s}_j} \cdot \mathrm{I}_A \in \mathbb{N}_0^{[0,4]}$$

dove $\mathrm{I}_A^{(i)} = 1$ se e solo se $i \in A$. Poniamo

$$\varrho = \sum_{j \in B} \hat{d}_j \cdot w_j = \sum_{j \in B} \hat{d}_j \cdot 2^{\hat{s}_j} \cdot \mathrm{I}_A \in \mathbb{N}_0^{[0,4]}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
f(a^b) &= f\left(\left(\prod_{i\in A} 2^{\,\hat{d}_i\cdot 2\star\hat{s}_i}\right)\star\left(\prod_{j\in B} 2^{\,\hat{d}_j\cdot 2\star\hat{s}_j}\right)\right)\\
&= f\left(\prod_{i\in A} 2\star\left(\hat{d}_i\cdot 2\star\left(\hat{s}_i+\sum_{j\in B}\hat{d}_j\cdot 2^{\hat{s}_j}\right)\right)\right)\\
&= f\left(\prod_{i\in A} 2\star\left(d_i(\widehat{M}_i)\cdot 2\star\left(\varrho^{(i)}+\sum_{t\in(\max A,4]} s_t^{(i)}(\widehat{M}_t)+\sum_{t\in(i,\max A]} s_t^{(i)}(\widehat{M}_t)\right)\right)\right)\\
&= f^{(\max A, A, s_i(\widehat{M}_i), d_i(\widehat{M}_i)|i\le\max A)}\left(\varrho+\sum_{t\in(\max A,4]} s_t(\widehat{M}_t)\right)\\
&= \chi_A\left(\varrho+\sum_{t\in(\max A,4]} s_t(\widehat{M}_t)\right)
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dalla (2.10) perché

$$
\left\|\varrho+\sum_{t\in(\max A,4]} s_t(\widehat{M}_t)\right\|_\infty \le U_{\max A}
$$

Ancora, poiché $\max A<\min B$,

$$
\begin{aligned}
f(a^b) &= \chi_A\left(\varrho+\sum_{t\in(\max A,4]} s_t(\widehat{M}_t)\right)\\
&= \chi_A\left(\sum_{t\in(\max B,4]} s_t(\widehat{M}_t)+\sum_{t\in(\max A,\max B]}\left(s_t(\widehat{M}_t)+\hat{d}_t\cdot w_t\right)\right)\\
&= \partial^{\max B-\max A}\chi_A\left(\sum_{t\in(\max B,4]} s_t(\widehat{M}_t)\right)
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dalla (2.11), analogamente a sopra. Infine, di nuovo per la (2.10),

$$
\begin{aligned}
f(a^b) &= \partial^{\max B-\max A}\chi_A\left(\sum_{t\in(\max B,4]} s_t(\widehat{M}_t)\right)\\
&= f^{(\max B, A, s_i(\widehat{M}_i), d_i(\widehat{M}_i)|i\le\max B)}\left(\sum_{t\in(\max B,4]} s_t(\widehat{M}_t)\right)\\
&= f\left(\prod_{i\in A} 2\star\left(\hat{d}_i\cdot 2\star\left(\sum_{t\in(\max B,4]} s_t^{(i)}(\widehat{M}_t)+\sum_{t\in(i,\max B]} s_t^{(i)}(\widehat{M}_t)\right)\right)\right)\\
&= f\left(\prod_{i\in A} 2\star\left(\hat{d}_i\cdot 2\star\hat{s}_i\right)\right)\\
&= F(A)=\mathtt{RED} \qquad\square
\end{aligned}
$$

**Commento 4** In analogia all'osservazione fatta sul teorema 1, ha senso chiedersi se la dimostrazione si possa generalizzare a un caso infinito, per dedurre una versione esponenziale del teorema di Hindman per la collezione

$$\mathbf{FE}(\infty) = \{\mathrm{FE}(a_1, a_2, \dots) \mid a_1, a_2, \dots > 1\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

dove $\mathrm{FE}(a_1, a_2, \dots) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{FE}(a_1, \dots, a_m)$. Anche in questo caso la proposizione 1 (sezione 2.3) implica una risposta negativa.

**Commento 5** La dimostrazione del teorema 3 è riadattata da quella del teorema 4, di cui è un corollario: di seguito introduco la notazione necessaria a enunciare il risultato più generale. Per la dimostrazione rimando a [JS1, paragrafo 4].

Sia $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo, sia $W : \mathbb{N}^{<m} \to \mathbb{N}$ una funzione. Per $S \subset [m]$ e $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathrm{FP}_{S,W}(a_1, \dots, a_m) = \left\{ \prod_{i \in S} a_i^{p_i} \,\middle|\, 0 \leq p_i \leq W(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_m) \right\}$$

Per $B \subset [m]$ non vuoto e $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathrm{FEP}_{B,W}(a_1, \dots, a_m) = \left\{ \prod_{i \in B} a_i^{e_i} \,\middle|\, e_i \in \mathrm{FP}_{S_i,W}(a_1, \dots, a_m) \right\}$$

dove $S_i = (i, m] \setminus B$ al variare di $i \in B$. Infine, per $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\mathrm{FEP}_W(a_1, \dots, a_m) = \bigcup_{B \subset [m]} \mathrm{FEP}_{B,W}(a_1, \dots, a_m)$$

Per esempio, se $m = 2$ e $W(\emptyset) = w \in \mathbb{N}$, per $a, b \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathrm{FEP}_w(a, b) = \left\{ a, b, ab, a^b, a^{b^2}, \dots, a^{b^w} \right\}$$

**Teorema 4.** *Siano $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo, $W : \mathbb{N}^{<m} \to \mathbb{N}$ una funzione. La collezione*

$$\mathbf{FEP}_W(m) = \{\mathrm{FEP}_W(a_1, \dots, a_m) \mid a_1, \dots, a_m > 1\}$$

*è regolare per partizioni.*

Questo risultato è più generale del teorema 3, infatti, fissato $m$, per un'opportuna scelta di $W$ e per ogni $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ vale

$$\mathrm{FEP}_W(a_1, \dots, a_m) \supset \mathrm{FE}(a_1, \dots, a_m) \cup \mathrm{FP}(a_1, \dots, a_m)$$

quindi la regolarità della collezione $\mathbf{FEP}_W(m)$ implica quella di $\mathbf{FEP}(m)$.

## 2.3 Risultati di non regolarità

Consideriamo la funzione $L\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{N}_0$ definita da

$$L(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1, \\ \min\Big\{k \;\Big|\; \log^{(k)}(x) \leq 1\Big\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove $\log^{(k)}$ (risp. $\exp^{(k)}$) è la funzione ottenuta componendo $k$ volte la funzione log (risp. exp). Essa è ben definita e, inoltre:

- è non decrescente;
- per ogni $x \geq 2$, vale $L(x) = L(\log x) + 1$;
- per ogni $x \geq y \geq 1$, vale $L(x + y) \leq L(x) + 1$.

**Proposizione 1.** *Sia $r \in \mathbb{N}$ intero positivo. Esiste una colorazione di $\mathbb{N}$ in $(r+2)$ colori rispetto a cui nessun paio*

$$b, a^b \;\big|\; a, b > 1,\ \ a \leq \exp^{(r)} b$$

*è monocromatico.*

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità, possiamo considerare la colorazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to [r+3] \\ 1 &\mapsto r+3 \\ x &\mapsto L(x) \,\%_{r+2} \quad \text{per } x > 1 \end{aligned}$$

dove $x \,\%_n$ indica l'unico intero positivo non superiore a $n$ e congruo a $x$ (modulo $n$). Siano $a, b \in \mathbb{N}$ due interi positivi tali che $a \leq \exp^{(r)} b$ e $f(b) = f(a^b) = c$ per qualche colore $c \in [r+3]$.

Se, per assurdo, fosse $c \leq r+2$, avremmo che $b, a^b \geq 2$ e dunque anche $a \geq 2$, da cui $a^b \geq 4$ e $\log(a^b) \geq 2$. Quindi

$$\begin{aligned} L(a^b) &= L(\log a^b) + 1 \\ &= L(\log\log a^b) + 2 \\ &= L(\log b + \log\log a) + 2 \\ &\geq L(\log b) + 2 \\ &= L(b) + 1 \end{aligned}$$

avendo usato le prime due osservazioni, ma anche

$$\begin{aligned} L(a^b) &= L(\log b + \log\log a) + 2 \\ &\leq L\big(\max\{\log b, \log\log a\}\big) + 3 \\ &= \max\{L(\log b) + 3, L(\log\log a) + 3\} \\ &= \max\{L(b) + 2, L(a) + 1\} \\ &\leq \max\Big\{L(b) + 2, L(\exp^{(r)} b) + 1\Big\} \\ &= \max\{L(b) + 2, L(b) + r + 1\} \\ &= L(b) + r + 1 \end{aligned}$$

avendole usate tutte e tre. Quindi

$$1 \leq L(a^b) - L(b) \leq r + 1$$

da cui il paio $b, a^b$ non sarebbe monocromatico, perché questo implicherebbe che $r + 2 \mid L(a^b) - L(b)$. Assurdo!

Dunque è $c = r + 3$, che implica $a = b = 1$. $\square$

Una conseguenza della proposizione 1 è che i pattern

$$a, b, a^b, b^a \mid a, b > 1 \qquad\qquad a, a^a \mid a > 1$$

non sono regolari per partizioni. Infatti, se per assurdo lo fossero, per qualche $a, b > 1$, almeno uno tra gli insiemi $\{a, b, a^b, b^a\}$ e $\{a, a^a\}$ sarebbe monocromatico rispetto alla colorazione $f$ in quattro colori definita sopra (per $r = 1$). In particolare, sarebbero monocromatiche le due paia $b, a^b$ e $a, b^a$ oppure il paio $a, a^a$, quindi si avrebbe $a > 2^b$ e $b > 2^a$, da cui

$$a > 2^b > b > 2^a > a$$

oppure si avrebbe comunque $a > 2^a$. Assurdo!

**Pattern di minima altezza – un teorema di caratterizzazione** Un pattern esponenziale *di minima altezza* è un pattern definito da una relazione binaria[2] come nel teorema 5. Esso fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un pattern esponenziale di minima altezza sia regolare per partizioni.

**Teorema 5.** *Sia $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo,* R *una relazione binaria su $[m]$. La collezione*

$$\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \left\{ \left\{ x_1, \ldots, x_m, x_i^{x_j} \,\middle|\, i \,\mathrm{R}\, j \right\} \,\middle|\, x_1, \ldots, x_m > 1 \right\}$$

*è regolare per partizioni se e solo se la relazione binaria* R *è asimmetrica e il suo grafo associato non contiene cicli orientati.*

*Dimostrazione.* Mostriamo separatamente le due implicazioni.

**Se:** a meno di rinominare gli elementi di $[m]$, possiamo supporre che la relazione binaria R sia compatibile con l'ordinamento su $[m]$. Dati $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$, vale

$$\left\{ x_1, \ldots, x_m, x_i^{x_j} \,\middle|\, i \,\mathrm{R}\, j \right\} \subset \mathrm{FE}(x_1, \ldots, x_m)$$

Poiché, per il teorema 3, la collezione $\mathbf{FE}(m)$ è regolare per partizioni, anche la collezione $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ la è.

**Solo se:** la necessità dell'asimmetria di R è mostrata dall'osservazione che segue la proposizione 1. A meno di rinominare gli elementi di $[m]$, possiamo supporre che il grafo associato alla relazione binaria R contenga il ciclo

$$n \,\mathrm{R}\, 1 \,\mathrm{R}\, \ldots \,\mathrm{R}\, (n-1) \,\mathrm{R}\, n$$

[2]Si veda il capitolo 3 per le definizioni.

per qualche $3 \leq n \leq m$. Consideriamo la colorazione $f$ definita nella dimostrazione della proposizione 1 (per $r = 1$). Se, per assurdo, esistessero degli interi $x_1, \dots, x_m > 1$ per cui l'insieme $\left\{x_1, \dots, x_m, x_i^{x_j} \,\middle|\, i \,\mathrm{R}\, j\right\}$ fosse monocromatico, in particolare sarebbero monocromatiche le paia

$$x_1, x_n^{x_1} \quad \cdots \quad x_n, x_{n-1}^{x_n}$$

e quindi, per la proposizione 1, si avrebbe

$$x_n > 2^{x_1} \quad \cdots \quad x_{n-1} > 2^{x_n}$$

da cui

$$x_n > 2^{x_1} > x_1 > \cdots > x_{n-1} > 2^{x_n} > x_n$$

Assurdo! □

Per lo stesso ragionamento, la collezione

$$\mathcal{A}(\mathrm{R}_\infty) = \left\{ \left\{x_1, x_2, \dots, x_i^{x_{i+1}} \,\middle|\, i \in \mathbb{N}\right\} \,\middle|\, x_1, x_2, \dots > 1 \right\}$$

definita dalla relazione binaria $i \,\mathrm{R}_\infty\, (i+1)$ al variare di $i \in \mathbb{N}$, non è regolare per partizioni: se, per assurdo, lo fosse, esisterebbe una successione decrescente

$$x_1 > 2^{x_2} > x_2 > 2^{x_3} > x_3 > \cdots$$

di interi positivi. Assurdo!

Questa osservazione risponde negativamente alle questioni poste nei commenti 3 e 4 delle sezioni precedenti, e anche, in parte, all'interrogativo posto da Sisto in [Sis] sugli insiemi IP esponenziali di prima specie. Si veda la sezione sulle domande aperte alla fine del capitolo per i dettagli.

Allo stesso tempo, sorge una nuova domanda, cioè se considerando pattern infiniti più *poveri* se ne possa recuperare la regolarità. È interessante chiedersi, per esempio, quali condizioni sulla relazione binaria $\mathrm{R}'$ caratterizzano la regolarità della collezione

$$\mathcal{A}(\mathrm{R}') = \left\{ \left\{x_1, x_2, \dots, x_i^{x_j} \,\middle|\, i \,\mathrm{R}'\, j\right\} \,\middle|\, x_1, x_2, \dots > 1 \right\}$$

**Una stima sul numero $J_k$.** Per ogni intero positivo $n$, è definito l'intero positivo

$$\mathrm{tow}(n) = \exp^{(n)} 1$$

La proposizione 1 fornisce una stima inferiore sul minimo intero $J_k$ — la cui esistenza è assicurata dal teorema di compattezza — entro il quale ogni colorazione in $k$ colori ammette una tripla esponenziale monocromatica.

**Proposizione 2.** *Sia $k \geq 3$ un intero positivo. Allora $J_k \geq \Big(\mathrm{tow}(k-1)\Big)^2$.*

*Dimostrazione.* Sia $J_k \in \mathbb{N}$ il minimo intero per cui il pattern

$$a, b, a^b \mid a, b > 1$$

è regolare per partizioni di $[J_k]$ in $k$ pezzi.

Fissato $r = k - 2$, sia $f$ la colorazione in $k$ colori fornita dalla proposizione 1. Sia $a, b, a^b$ una tripla esponenziale monocromatica, con $a^b \leq J_k$. In particolare, il paio $b, a^b$ è monocromatico. Per la proposizione 1, vale $a > \exp^{(r)} b$. Quindi

$$J_k \geq a^b > \left(\exp^{(r)} b\right)^b \geq \left(\exp^{(r)} 2\right)^2 = \Big(\mathrm{tow}(k-1)\Big)^2$$ □

Per esempio, $J_3 > 16$, $J_4 > 256$,

$$J_5 > 4\,294\,967\,296$$

**Incompatibilità tra triple esponenziali e triple di Schur** Una tripla di Schur è una tripla della forma $x, y, x+y \mid x, y \in \mathbb{N}$. L'ultimo teorema di Fermat implica l'incompatibilità tra la struttura additiva e quella esponenziale. Infatti, non solo il pattern $a, b, a+b, a^b \mid a, b > 1$ non è regolare, ma la proposizione 3 mostra che ci sono colorazioni per cui l'esistenza di triple di Schur monocromatiche esclude l'esistenza di triple esponenziali monocromatiche, e viceversa.

> ***Ultimo teorema di Fermat.*** *Sia $m \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Se $m \geq 3$, l'equazione*
>
> $$x^m + y^m = z^m$$
>
> *nelle indeterminate $x, y, z \in \mathbb{N}$ non ammette soluzioni.*

**Proposizione 3.** *Esiste una colorazione di $\mathbb{N}$ in nove colori rispetto a cui nessun insieme*

$$\left\{x, y, x+y, a, b, a^b\right\}$$

*al variare di $x, y \in \mathbb{N}$, $a, b > 1$, è monocromatico.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione $l \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ definita da

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1, \\ \max\left\{b \,\middle|\, x = a^b \text{ per qualche } a \in \mathbb{N}\right\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, vale $l(x^y) = y \cdot l(x)$. Consideriamo le colorazioni

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{F}_3 \\ x &\to x \pmod 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_2 \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{F}_3 \\ x &\to l(x) \pmod 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

Siano, per assurdo, $a, b, x, y \in \mathbb{N}$ interi positivi tali che $x, y, x+y, a, b, a^b$ siano dello stesso colore. In particolare

$$\begin{aligned} y \equiv x + y \pmod 3 &\implies x \equiv 0 \pmod 3 \\ &\implies b \equiv 0 \pmod 3 \\ &\implies l(a^b) = b \cdot l(a) \equiv 0 \pmod 3 \\ &\implies l(x) \equiv l(y) \equiv l(x+y) \equiv 0 \pmod 3 \\ &\implies x = u^3,\ y = v^3,\ x + y = w^3 \quad \text{per qualche } u, v, w \in \mathbb{N} \\ &\implies u^3 + v^3 = w^3 \end{aligned}$$

Assurdo! □

**Altri pattern non regolari** Con l'ausilio di proposizioni analoghe alla 1, si può mostrare che i pattern

$$A, B, A^B, A^{B^B} \,\Big|\, A = 2^a, B = 2^b,\ a, b \in \mathbb{N}$$

e

$$A, B, A^{B^{B^B}} \,\Big|\, A, B > 1$$

non sono regolari. È interessante chiedersi se esistano pattern esponenziali regolari che non rientrano nella casistica descritta dal teorema 4, come quelli in cui compaiono più volte gli stessi esponenti in una configurazione *a torre*. Per un approfondimento rimando a [JS1, paragrafo 7].

# Domande aperte

Di seguito sono riportati gli interrogativi emersi dai commenti dei risultati presentati nel capitolo.

**Questione 1** (Sezione 2.1)**.** Fissata una colorazione dei naturali, in quali altri modi, oltre a quelli conosciuti, si possono esibire triple esponenziali monocromatiche?

**Questione 2** (Sezione 2.1 – RISOLTA)**.** Il pattern esponenziale infinito

$\mathbf{FE}_0(\infty)$ :

$$A_1, A_2, \ldots,\ A_{i_1}^{A_{i_2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{A_{i_n}}}}}} \,\Bigg|\, A_1, A_2, \ldots > 1, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

è regolare per partizioni?

La risposta è *"No"*. Infatti, il pattern $\mathbf{FE}_0(\infty)$ estende la collezione $\mathcal{A}(\mathrm{R}_\infty)$ definita nella sezione 2.3, che, come osservato, non è regolare in conseguenza della proposizione 1. □

**Questione 3** (Sezione 2.2.2 – RISOLTA)**.** La collezione

$$\mathbf{FE}(\infty) = \big\{\mathrm{FE}(a_1, a_2, \ldots) \,\big|\, a_1, a_2, \ldots > 1\big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

dove $\mathrm{FE}(a_1, a_2, \ldots) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{FE}(a_1, \ldots, a_m)$, è regolare per partizioni di $\mathbb{N}$?

Anche in questo caso la risposta è *"No"*. Infatti, la collezione $\mathbf{FE}(\infty)$ estende il pattern $\mathbf{FE}_0(\infty)$, come osservato nella sezione 2.2.2. □

La prossima questione è stata posta da A. Sisto in [Sis]. Dati un intero positivo $n \in \mathbb{N}$ e un insieme $X = \{x_1 < x_2 < \ldots\} \subset \mathbb{N}$, Sisto definisce gli insiemi

$$\mathrm{FE}^{\mathrm{I}}_1(X) = \{x_1\}$$
$$\mathrm{FE}^{\mathrm{I}}_{n+1}(X) = \Big\{y, y^{x_{n+1}} \,\Big|\, y \in \mathrm{FE}^{\mathrm{I}}_n(X)\Big\} \cup \{x_{n+1}\}$$

e quindi

$$\mathrm{FE}^{\mathrm{I}}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{FE}^{\mathrm{I}}_n(X)$$

**Questione 4** ([Sis, sezione 2.3] – parzialmente risolta)**.** Per quali naturali $k \geq 2$, la collezione

$$\mathbf{FE}^{\mathrm{I}} = \left\{ \mathrm{FE}^{\mathrm{I}}(X) \,\middle|\, X \subset \mathbb{N},\ X \text{ infinito} \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

è regolare per ogni partizione di $\mathbb{N}$ in $k$ colori?

Una risposta parziale è *"Al più, $k = 2$"*. Infatti: fissati $k \geq 3$ e $r = k - 2 \in \mathbb{N}$, possiamo considerare la colorazione in $k$ colori fornita dalla proposizione 1. Se, per assurdo, la collezione $\mathbf{FE}^{\mathrm{I}}$ fosse regolare per tale colorazione, esisterebbe un insieme $X \subset \mathbb{N}$ infinito e monocromatico. In particolare, sarebbe monocromatico il paio $x_2, x_1^{x_2}$, per qualche $x_1 < x_2$ (a meno di considerare il paio $x_3, x_2^{x_3}$, possiamo supporre $x_1 > 1$). Per la proposizione 1 si avrebbe

$$x_1 > \exp^{(r)} x_2 > x_2$$

Assurdo!

Si osservi che, per $r = 0$, la dimostrazione della proposizione 1 fallisce in corrispondenza dell'ultima uguaglianza, in quanto

$$\max\{L(b) + 2, L(b) + r + 1\} \neq L(b) + r + 1$$

Dunque la questione resta effettivamente aperta per $k = 2$.

Dati l'intero positivo $n$ e l'insieme $X = \{x_1 < x_2 < \ldots\} \subset \mathbb{N}$, Sisto definisce anche degli insiemi $\mathrm{FE}^{\mathrm{II}}_n(X)$ e $\mathrm{FE}^{\mathrm{II}}(X)$: l'unica modifica è nella formula di ricorsione

$$\mathrm{FE}^{\mathrm{II}}_{n+1}(X) = \left\{ y, x_{n+1}^{y} \,\middle|\, y \in \mathrm{FE}^{\mathrm{II}}_n(X) \right\} \cup \{x_{n+1}\}$$

In questo caso, ripetendo il ragionamento esposto sopra, per ogni insieme $X$ infinito e monocromatico si ottiene la condizione

$$x_{i+1} > \exp^{(r)} x_i$$

che, pur non essendo contraddittoria, stabilisce un vincolo piuttosto stretto sulla struttura degli eventuali elementi monocromatici della collezione

$$\mathbf{FE}^{\mathrm{II}} = \left\{ \mathrm{FE}^{\mathrm{II}}(X) \,\middle|\, X \subset \mathbb{N},\ X \text{ infinito} \right\}$$

L'ultima questione di questo capitolo riguarda i pattern esponenziali infiniti di minima altezza. Dal teorema 5 e dall'osservazione che lo segue si deduce che, affinché la collezione

$$\mathcal{A}(\mathrm{R}') = \left\{ \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_i^{x_j} \,\middle|\, i \,\mathrm{R}'\, j \right\} \,\middle|\, x_1, x_2, \cdots > 1 \right\}$$

sia regolare, la relazione binaria $\mathrm{R}'$ deve essere:

- asimmetrica;
- tale che il suo grafo associato non contiene cicli orientati;
- tale che il suo grafo associato non contiene catene infinite;

**Questione 5.** Queste tre condizioni sono anche sufficienti? Se no, quali sono le altre che caratterizzano la regolarità per partizioni dei pattern esponenziali infiniti di minima altezza?

# Capitolo 3

# Equazioni

Questo capitolo è dedicato allo studio della regolarità per partizioni di collezioni definite in modo implicito, cioè come luogo delle soluzioni di certi sistemi di equazioni.

Nella prima sezione viene introdotta e commentata la definizione di *sistema esponenziale*. La seconda sezione contiene il risultato centrale del capitolo: il teorema di caratterizzazione dei sistemi esponenziali regolari.

**Teorema 6.** *Un sistema esponenziale è regolare per partizioni se e solo se il sistema lineare ad esso associato è regolare per partizioni.*

La dimostrazione dell'implicazione *solo se* fa uso del lemma 1, dimostrato nel capitolo 1. L'implicazione *se*, invece, segue dal teorema 2 (capitolo 2), per cui l'esponenziale pesato della collezione delle soluzioni del sistema lineare è regolare: esso, infatti, contiene una soluzione monocromatica del sistema esponenziale.

Nella terza sezione, infine, sono raccolti diversi esempi di applicazione del teorema 6, alcuni dei quali offrono gli spunti per le questioni esposte alla fine del capitolo.

## Richiami e notazione

**Relazioni binarie e grafi.** Sia $X$ un insieme. Una *relazione binaria* (o *grafo orientato*) su $X$ è una coppia ordinata

$$\mathrm{R} = (X, R)$$

dove $R \subset X \times X$ è un insieme di coppie ordinate di elementi di $X$. Scriviamo

$$x \,\mathrm{R}\, z$$

se l'elemento $x \in X$ è messo in relazione da R con l'elemento $z \in X$, cioè se $(x, z) \in R$. Una relazione binaria R si dice:

- *riflessiva* se $\Delta_X \subset R$, cioè se vale $x \,\mathrm{R}\, x$ per ogni $x \in X$;
- *irriflessiva* se $\Delta_X \cap R = \emptyset$, cioè se non vale $x \,\mathrm{R}\, x$ per alcun $x \in X$;
- *simmetrica* se vale $x \,\mathrm{R}\, z \implies z \,\mathrm{R}\, z$ per ogni $x, z \in X$;

- *asimmetrica* se non vale $x \,\mathrm{R}\, z \,\mathrm{R}\, x$ per alcun $x, z \in X$;

dove abbiamo posto $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$. La relazione binaria *speculare* Я di una relazione binaria R è definita da

$$x \,Я\, z \iff z \,\mathrm{R}\, x$$

Sia $V$ un insieme, i cui elementi sono detti nodi o vertici. Un *grafo (non orientato)* su $V$ è una coppia ordinata

$$\mathcal{G} = (V, E)$$

dove $E \subset \mathcal{P}^{(\leq 2)}(V)$ è un insieme di paia di nodi, dette archi del grafo, e di singoletti di nodi, detti cappi del grafo. Scriviamo

$$p \overset{\mathcal{G}}{-} q$$

se i due nodi $p, q \in V$ sono collegati in $\mathcal{G}$, cioè se $\{p, q\} \in E$. Il grafo $\mathcal{G}$ si dice privo di cappi se tutti gli elementi di $E$ sono archi, cioè se non esiste alcun nodo $p \in V$ tale che $p - p$. Sia $l \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Un *cammino di lunghezza $l$ da $p$ a $q$* è un grafo $\mathcal{H} = (V, H)$ definito da

$$p \overset{\mathcal{H}}{-} p_1 \overset{\mathcal{H}}{-} \cdots \overset{\mathcal{H}}{-} p_{l-1} \overset{\mathcal{H}}{-} q$$

Un cammino $\mathcal{H}$ da $p$ a $q$ si dice:

- *chiuso* se $p = q$;
- *diretto* se $p, p_1, \ldots, p_{l-1}, q$ sono distinti, tranne al più $p = q$.

Un *cappio* in $p \in V$ è cammino chiuso di lunghezza $l = 1$. Un *ciclo* è un cammino chiuso e diretto di lunghezza $l \geq 3$. Un'*orientazione* per un ciclo di lunghezza $l$ da $p$ a $q$ è una delle due relazioni binarie speculari definite da

$$\begin{gathered} p \,\mathrm{R}^+\, p_1 \,\mathrm{R}^+\, \cdots \,\mathrm{R}^+\, p_{l-1} \,\mathrm{R}^+\, q \\ p \,\mathrm{R}^-\, p_{l-1} \,\mathrm{R}^-\, \cdots \,\mathrm{R}^-\, p_1 \,\mathrm{R}^-\, q \end{gathered}$$

Si noti che vale $\mathrm{R}^+ = {}^-Я$. Una catena infinita è un grafo $\mathcal{H}'$ definito da

$$p_1 \overset{\mathcal{H}'}{-} p_2 \overset{\mathcal{H}'}{-} \cdots \overset{\mathcal{H}'}{-} p_n \overset{\mathcal{H}'}{-} \cdots$$

A una relazione binaria $\mathrm{R} = (X, R)$ corrisponde il *grafo associato* $\mathcal{G}(\mathrm{R}) = (V(\mathrm{R}), E(\mathrm{R}))$, dove

$$\begin{cases} V(\mathrm{R}) = X \\ E(\mathrm{R}) = \big\{\{x, z\} \in \mathcal{P}^{(\leq 2)}(X) \,\big|\, x \,\mathrm{R}\, z \text{ oppure } z \,\mathrm{R}\, x\big\} \end{cases}$$

Una relazione binaria è irriflessiva se e solo se il suo grafo associato è privo di cappi. Un ciclo del grafo $\mathcal{G}(\mathrm{R})$ è *orientato* (da R) se R induce una delle sue orientazioni.

**Un abuso di notazione.** Per semplicità di esposizione, in questo capitolo consideriamo insiemi di *variabili* e relazioni binarie su di essi. Formalmente, una relazione binaria su $\{X_1, \ldots, X_m\}$ è una relazione binaria su $\{1, \ldots, m\}$. Non crea ambiguità il fatto che la coppia ordinata $(X_i, X_j)$ sia identificata con la coppia ordinata $(i, j)$.

## 3.1 Sistemi esponenziali

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ due interi positivi, R una relazione binaria sull'insieme di variabili $\{X_1, \ldots, X_m\}$. Dati $c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \in \mathbb{Z}$ interi al variare di $X_i \,\mathrm{R}\, X_j$, è definito il sistema *esponenziale*

$$\mathcal{E}\Big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \;\Big|\; X_i \,\mathrm{R}\, X_j\Big) :$$
$$\Big\{ X_i \star (Y_1^{c_1^{(i,j)}} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n^{(i,j)}}) = X_j \;\Big|\; X_i \,\mathrm{R}\, X_j$$

nelle $(m+n)$ indeterminate intere positive $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n \in \mathbb{N}$. Un sistema esponenziale si dice regolare per partizioni se se ne può trovarne una soluzione monocromatica non banale in ogni colorazione dei naturali. Cioè se per ogni colorazione esistono interi $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n > 1$ che risolvono il sistema.

Vediamo un esempio: fissiamo $m = 2$, $n = 1$ e poniamo $x = X_1$, $z = X_2$ e $y = Y_1$. Consideriamo la relazione binaria definita da $x \,\mathrm{R}\, z$ e fissiamo $c_1^{(x,z)} = 1$ per ottenere l'equazione esponenziale

$$\mathcal{E} : \quad x^y = z$$

La regolarità per partizioni di questa equazione corrisponde a quella del pattern

$$a, b, a^b \mid a, b > 1$$

dimostrata dal teorema 1.

**Alcuni commenti sulla notazione.** Osserviamo che ognuna delle variabili $Y_1, \ldots, Y_n$ si può spostare al secondo membro di un'equazione in cui compare, a patto di cambiare il segno del suo esponente $c \in \mathbb{Z}$. Ciò corrisponde ad elevare a $Y^{-c}$ entrambi i membri dell'equazione. Si noti che, in particolare, il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}\Big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \;\Big|\; X_i \,\mathrm{R}\, X_j\Big)$$

è equivalente al sistema esponenziale

$$\mathcal{E}\Big(\text{Я};\, -c_1^{(i,j)}, \ldots, -c_n^{(i,j)} \;\Big|\; X_j \,\text{Я}\, X_i\Big)$$

Un altra operazione che non altera la collezione delle soluzioni di un sistema, né, quindi, la sua regolarità, è quella di *duplicare* una variabile. Dato un sistema esponenziale $\mathcal{E}\Big(\mathrm{R}; c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \;\Big|\; X_i \,\mathrm{R}\, X_j\Big)$, fissiamo una variabile $z = X_j$ da duplicare e una relazione in cui compare tale variabile, poniamo sia $x \,\mathrm{R}\, z$, per qualche $x = X_i$ (il caso simmetrico è analogo). Il processo di duplicazione consiste in tre fasi:

1. Aggiungiamo una nuova variabile $\hat{z}$ all'insieme $\{X_1, \ldots, X_m\}$.
2. Scriviamo una nuova equazione che prescriva l'uguaglianza tra la variabile $z$ e il suo duplicato $\hat{z}$. Per fare ciò allarghiamo l'insieme delle relazioni tra le variabili ponendo $\hat{R}_0 = R \cup \{(z, \hat{z})\}$ e fissiamo $c_1^{(z,\hat{z})} = \cdots = c_n^{(z,\hat{z})} = 0$.
3. Sostituiamo la variabile $z$ con il suo duplicato $\hat{z}$ nell'equazione prescelta. Per fare ciò modifichiamo l'insieme $\hat{R}_0$ in $\hat{R} = \hat{R}_0 \setminus \{(x, z)\} \cup \{(x, \hat{z})\}$ e rinominiamo gli esponenti fissando

$$c_1^{(x,\hat{z})} = c_1^{(x,z)} \quad \cdots \quad c_n^{(x,\hat{z})} = c_n^{(x,z)}$$

Di fatto, abbiamo sostituito l'equazione

$$x \star (Y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n}) = z$$

con il sistema

$$\begin{cases} z = \hat{z} \\ x \star (Y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n}) = \hat{z} \end{cases}$$

La costruzione descritta ci consente di assumere, senza perdita di generalità, che la relazione R sia asimmetrica. Infatti, qualora un sistema contenga due equazioni che coinvolgono le variabili $x$ e $z$, è sufficiente duplicare una delle due variabili in una delle due equazioni. In sostanza, il sistema

$$\begin{cases} x \star (Y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n}) = z \\ z \star (Y_1^{\hat{c}_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{\hat{c}_n}) = x \end{cases}$$

viene sostituito dal sistema

$$\begin{cases} x \star (Y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n}) = z \\ z = \hat{z} \\ \hat{z} \star (Y_1^{\hat{c}_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{\hat{c}_n}) = x \end{cases}$$

Anche un sistema di più equazioni esponenziali che legano le stesse variabili si può riscrivere nella notazione scelta: se le equazioni sono solo due, l'espediente di spostare le $Y_i$ al secondo membro è sufficiente, altrimenti si può applicare il processo di duplicazione a ogni equazione da riscrivere.

Un'ultima osservazione: è possibile assumere, senza perdita di generalità, che $m = n$. Ad esempio, se $m < n$ basta aggiungere delle variabili *fittizie* che non compaiono in alcuna relazione, mentre nel caso simmetrico è sufficiente fissare a 0 tutti i coefficienti mancanti. Al contrario di Sahasrabudhe in [JS2, p. 549], qui non viene fatta questa assunzione perché, di fatto, non semplifica i ragionamenti che seguono.

**Esempi.** Solo alcuni sistemi esponenziali corrispondono a pattern descritti nel capitolo 2. Fissiamo $m = n = 2$ e poniamo $x = X_1$ e $z = X_2$, $y = Y_1$ e $\eta = Y_2$. Consideriamo la relazione binaria definita da $x \,\mathrm{R}\, z$.

*Esempio* 1. Poniamo $c_1^{(x,z)} = 3$, $c_2^{(x,z)} = 5$ per scrivere l'equazione esponenziale

$$\mathcal{E}_1 : \quad x^{y^3 \cdot \eta^5} = z$$

La collezione delle soluzioni non banali di $\mathcal{E}_1$ è descritta dal pattern esponenziale

$$\mathfrak{E}_1 : \quad a, b, c, a^{b^3 c^5} \;\Big|\; a, b, c > 1$$

la cui regolarità segue dai teoremi del capitolo 2.

*Esempio* 2. Poniamo $c_1^{(x,z)} = 1$, $c_2^{(x,z)} = -2$ per scrivere l'equazione esponenziale

$$\mathcal{E}_2 : \quad x^y = z^{\eta^2}$$

La collezione delle soluzioni non banali di $\mathcal{E}_2$ è descritta dal pattern

$$\mathfrak{E}_2 : \quad a_x, a_z, b, c > 1 \;\Big|\; a_x^b = a_z^{c^2}$$

che, al contrario di $\mathfrak{E}_1$, non rientra tra i pattern descritti nel capitolo 2.

Fissiamo $m = 3$ e $n = 2$ e poniamo $x = X_1$, $z = X_2$ e $w = X_3$, $y = Y_1$ e $\eta = Y_2$. Consideriamo la relazione definita da $x \,\mathrm{R}\, z \,\mathrm{R}\, w$.

*Esempio* 3. Posti $c_1^{(x,z)} = c_2^{(z,w)} = 1$ e $c_2^{(x,z)} = c_1^{(z,w)} = 0$, si ha il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}_3 : \quad \begin{cases} x^y = z \\ z^\eta = w \end{cases}$$

Un pattern esponenziale che definisce la collezione delle soluzioni non banali di $\mathcal{E}_3$ è

$$\mathfrak{E}_3 : \quad a, b, c, a^b, a^{bc} \;\big|\; a, b, c > 1$$

*Esempio* 4. Posti $c_1^{(x,z)} = 3$, $c_2^{(z,w)} = -1$ e $c_2^{(x,z)} = c_1^{(z,w)} = 0$, si ha il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}_4 : \quad \begin{cases} x^{y^3} = z \\ z = w^\eta \end{cases}$$

Anche in questo caso, non si trova un pattern esponenziale che definisce la collezione delle soluzioni non banali di $\mathcal{E}_4$.

Fissiamo $m = 1$ e $n = 3$ e poniamo $x = X_1$, $y = Y_1$, $\eta = Y_2$ e $\vartheta = Y_3$. Consideriamo la relazione definita da $x \,\mathrm{R}\, x$.

*Esempio* 5. Posti $c_1^{(x,x)} = 1$, $c_2^{(x,x)} = -1$ e $c_3^{(x,x)} = -4$ si ha l'equazione esponenziale

$$\mathcal{E}_5 : \quad x^y = x^{\eta \vartheta^4}$$

In questo caso, le soluzioni non banali di $\mathcal{E}_5$ corrispondono a quelle dell'equazione

$$y = \eta \cdot \vartheta^4$$

Fissiamo $m = 3$ e $n = 2$ e poniamo $x = X_1$, $z = X_2$ e $w = X_3$, $y = Y_1$, $\eta = Y_2$. Consideriamo la relazione definita da $x \,\mathrm{R}\, z \,\mathrm{R}\, w \,\mathrm{R}\, x$.

*Esempio* 6. Posti $c_1^{(x,z)} = c_1^{(z,w)} = c_1^{(w,x)} = c_2^{(w,x)} = 1$ e $c_2^{(x,z)} = c_2^{(z,w)} = 0$, si ha il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}_6 : \quad \begin{cases} x^y = z \\ z^y = w \\ w^{y\eta} = x \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione, si ottiene un'equazione analoga a quella dell'esempio 5:

$$x^{y^3 \eta} = x$$

**Una condizione necessaria.** Consideriamo un caso generale simile agli esempi 5 e 6. Fissiamo $m, n \in \mathbb{N}$ e poniamo $x = X_m$. Consideriamo la relazione definita da $x \,\mathrm{R}\, X_1 \,\mathrm{R}\, X_2 \,\mathrm{R} \cdots \mathrm{R}\, X_{m-1} \,\mathrm{R}\, x$. Essa genera il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}\Big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \,\Big|\, X_i \,\mathrm{R}\, X_j\Big) : \quad \begin{cases} x \star (Y_1^{c_1^{(m,1)}} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n^{(m,1)}}) = X_1 \\ X_1 \star (Y_1^{c_1^{(1,2)}} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n^{(1,2)}}) = X_2 \\ \vdots \\ X_{m-1} \star (Y_1^{c_1^{(m-1,m)}} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n^{(m-1,m)}}) = x \end{cases}$$

Come nell'esempio 6 sostituiamo *a cascata* nella prima equazione: otteniamo

$$x \star (Y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n}) = x \tag{3.1}$$

dove $c_1 = c_1^{(m,1)} + \sum_{1 \le i < m} c_1^{(i,i+1)}$, ..., $c_n = c_n^{(m,1)} + \sum_{1 \le i < m} c_n^{(i,i+1)}$. Come nell'esempio 5, le soluzioni non banali della (3.1) corrispondono a quelle dell'equazione

$$Y_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot Y_n^{c_n} = 1$$

Questa, per il lemma 1 (capitolo 1), è regolare per partizioni di $\mathbb{N}$ se e solo se la è l'equazione lineare

$$c_1 \cdot Z_1 + \cdots + c_n \cdot Z_n = 0$$

## 3.2 Il teorema di caratterizzazione

In generale, fissati $m, n \in \mathbb{N}$ due interi positivi e R una relazione binaria asimmetrica su $\{1, \ldots, m\}$, consideriamo il grafo associato $\mathcal{G}(\mathrm{R})$ e per ogni suo ciclo $\mathcal{H}$ fissiamo arbitrariamente un'orientazione positiva $\mathrm{R}^+_{\mathcal{H}}$. Per ogni $i, j \in [m]$ tali che $i \,\mathrm{R}\, j$ definiamo

$$\sigma_{\mathcal{H}}^{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \,\mathrm{R}^+_{\mathcal{H}}\, j \\ -1 & \text{se } i \,\mathrm{R}^-_{\mathcal{H}}\, j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La definizione è ben posta in virtù della asimmetria della relazione binaria R. Dati $c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \in \mathbb{Z}$ interi al variare di $i \,\mathrm{R}\, j$, è definito il sistema lineare

$$\mathcal{L}\Big(\mathrm{R}; c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \,\Big|\, i \,\mathrm{R}\, j\Big) :$$

$$\left\{ \sum_{i \,\mathrm{R}\, j} \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,j)} \cdot (c_1^{(i,j)} \cdot Z_1 + \cdots + c_n^{(i,j)} \cdot Z_n) = 0 \;\middle|\; \mathcal{H} \text{ ciclo di } \mathcal{G}(\mathrm{R}) \right.$$

nelle $n$ indeterminate intere positive $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathbb{N}$.

**Teorema 6** (caratterizzazione dei sistemi esponenziali regolari)**.** *Siano $m, n \in \mathbb{N}$ due interi positivi,* R *una relazione binaria asimmetrica sull'insieme di variabili* $\{X_1, \ldots, X_m\}$*. Siano $c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \in \mathbb{Z}$ interi al variare di $X_i \,\mathrm{R}\, X_j$. Il sistema esponenziale*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}\Big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, \ldots, c_n^{(i,j)} \,\Big|\, X_i \,\mathrm{R}\, X_j\Big)$$

*è regolare per partizioni se e solo se lo è il sistema lineare*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\Big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, \dots, c_n^{(i,j)} \,\Big|\, i\,\mathrm{R}\,j\Big)$$

*Dimostrazione.* Mostriamo separatamente le due implicazioni.

**Solo se:** Sia $\mathcal{G}(\mathrm{R})$ il grafo associato alla relazione binaria asimmetrica R. Sia $\mathcal{H}$ un suo ciclo. Consideriamo la relazione binaria $\mathrm{R}|_{\mathcal{H}}$ definita da

$$X_i\,\mathrm{R}|_{\mathcal{H}}\,X_j \iff X_i \overset{\mathcal{H}}{-} X_j \text{ e } X_i\,\mathrm{R}\,X_j$$

Essa genera il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{H}} = \mathcal{E}\Big(\mathrm{R}|_{\mathcal{H}};\, c_1^{(i,j)}, \dots, c_n^{(i,j)} \,\Big|\, X_i\,\mathrm{R}|_{\mathcal{H}}\,X_j\Big)$$

che è regolare perché le sue equazioni compaiono in $\mathcal{E}$. Fissiamo arbitrariamente un'orientazione positiva $\mathrm{R}^+_{\mathcal{H}}$ del ciclo $\mathcal{H}$. Per l'osservazione sul segno degli esponenti di un'equazione esponenziale, il sistema $\mathcal{E}|_{\mathcal{H}}$ è equivalente a

$$\sigma_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}\Big(\mathrm{R}^+_{\mathcal{H}};\, \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,j)} \cdot c_1^{(i,j)}, \dots, \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,j)} \cdot c_n^{(i,j)} \,\Big|\, X_i\,\mathrm{R}^+_{\mathcal{H}}\,X_j\Big)$$

Similmente all'esempio generale della sezione 3.1, poniamo

$$c_1 = \sum_{X_i\,\mathrm{R}^+_{\mathcal{H}}\,X_j} \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,j)} \cdot c_1^{(i,j)}$$
$$\vdots$$
$$c_n = \sum_{X_i\,\mathrm{R}^+_{\mathcal{H}}\,X_j} \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,j)} \cdot c_n^{(i,j)}$$

La regolarità di $\sigma_{\mathcal{H}}(\mathcal{E})$ implica quella dell'equazione

$$Y_1^{c_1} \cdot \dots \cdot Y_n^{c_n} = 1$$

Questa, per il lemma 1 (capitolo 1), è regolare per partizioni di $\mathbb{N}$ se e solo se la è l'equazione lineare

$$c_1 \cdot Z_1 + \dots + c_n \cdot Z_n = 0$$

che coincide, espandendo le scritture di $c_1, \dots, c_n$, con

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{H}} = \mathcal{L}\Big(\mathrm{R}|_{\mathcal{H}};\, c_1^{(i,j)}, \dots, c_n^{(i,j)} \,\Big|\, X_i\,\mathrm{R}|_{\mathcal{H}}\,X_j\Big)$$

Poiché, per definizione,

$$\mathcal{L} : \Big\{\, \mathcal{L}|_{\mathcal{H}} \,\Big|\, \mathcal{H} \text{ ciclo di } \mathcal{G}(\mathrm{R})$$

il sistema lineare $\mathcal{L}$ è regolare per partizioni.

**Se:** Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ la collezione delle soluzioni intere positive dell'equazione lineare $\mathcal{L}$. Sia $W\colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da

$$W(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i \, \mathrm{R} \, j} \left( \left|c_1^{(i,j)}\right| + \cdots + \left|c_n^{(i,j)}\right| \right) \cdot (z_1 + \cdots + z_n)$$

Mostriamo che per ogni $a, b > 1,\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$, l'elemento

$$a, b^{z_1}, \ldots, b^{z_n}, a^b, \ldots, a^{b^{W(z_1, \ldots, z_n)}}$$

della collezione $\mathrm{Exp}_W(\mathcal{A})$ contiene una soluzione non banale del sistema esponenziale $\mathcal{E}$.

Nei passaggi che seguono, assumiamo che il grafo associato alla relazione binaria R sia un ciclo $\mathcal{G}(\mathrm{R}) = \mathcal{H}$. Il caso generale è simile. A meno di rinominare le variabili, possiamo supporre che un'orientazione positiva del ciclo $\mathcal{H}$ sia definita da

$$X_m \, \mathrm{R}_{\mathcal{H}}^{+} \, X_1 \, \mathrm{R}_{\mathcal{H}}^{+} \, X_2 \, \mathrm{R}_{\mathcal{H}}^{+} \cdots \mathrm{R}_{\mathcal{H}}^{+} \, X_{m-1} \, \mathrm{R}_{\mathcal{H}}^{+} \, X_m$$

Per $i, j \leq m$ definiamo gli interi

$$\omega(i,j) = \tilde{c}_1^{(i,j)} \cdot z_1 + \cdots + \tilde{c}_n^{(i,j)} \cdot z_n \in \mathbb{Z}$$

dove

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1^{(i,j)} &= \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)} \cdot c_1^{(i,i+1)} + \cdots + \sigma_{\mathcal{H}}^{(j-1,j)} \cdot c_1^{(j-1,j)} \\
&\vdots \\
\tilde{c}_n^{(i,j)} &= \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)} \cdot c_n^{(i,i+1)} + \cdots + \sigma_{\mathcal{H}}^{(j-1,j)} \cdot c_n^{(j-1,j)}
\end{aligned}$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\omega(m,i) \geq 0$ per ogni $i \leq m$. Per $i \leq m$ definiamo gli interi non negativi

$$\begin{aligned}
k_i = \omega(m,i) &= \tilde{c}_1^{(m,i)} \cdot z_1 + \cdots + \tilde{c}_n^{(m,i)} \cdot z_n \\
&\leq |\tilde{c}_1^{(m,i)}| \cdot z_1 + \cdots + |\tilde{c}_n^{(m,i)}| \cdot z_n \\
&\leq \left( |\tilde{c}_1^{(m,i)}| + \cdots + |\tilde{c}_n^{(m,i)}| \right) \cdot (z_1 + \cdots + z_n) \\
&\leq W(z_1, \ldots, z_n)
\end{aligned}$$

Poniamo

$$x_1 = a^{b^{k_1}} > 1 \quad \cdots \quad x_m = a^{b^{k_m}} > 1$$

e

$$y_1 = b^{z_1} > 1 \quad \cdots \quad y_n = b^{z_n} > 1$$

e osserviamo che per ogni $i \leq m$ vale

$$\begin{aligned}
\left( y_1^{c_1^{(i,i+1)}} \cdot \cdots \cdot y_n^{c_n^{(i,i+1)}} \right)^{\sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)}} &= \left( b^{\,c_1^{(i,i+1)} \cdot z_1} \cdot \cdots \cdot b^{\,c_n^{(i,i+1)} \cdot z_n} \right)^{\sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)}} \\
&= b \star \left( \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)} \cdot \left( c_1^{(i,i+1)} \cdot z_1 + \cdots + c_n^{(i,i+1)} \cdot z_n \right) \right)
\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
x_i \star \left( y_1^{c_1^{(i,i+1)}} \cdot \dots \cdot y_n^{c_n^{(i,i+1)}} \right)^{\sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)}} &= \\
&= a^{b^{k_i}} \star \left( b \star \left( \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)} \cdot \left( c_1^{(i,i+1)} \cdot z_1 + \dots + c_n^{(i,i+1)} \cdot z_n \right) \right) \right) = \\
&= a \star \left( b \star \left( k_i + \sigma_{\mathcal{H}}^{(i,i+1)} \cdot \left( c_1^{(i,i+1)} \cdot z_1 + \dots + c_n^{(i,i+1)} \cdot z_n \right) \right) \right) = \\
&= a \star \left( b^{k_{i+1}} \right) = x_{i+1}
\end{aligned}
$$

Cioè, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ è una soluzione non banale di $\sigma_{\mathcal{H}}(\mathcal{E})$, e quindi di $\mathcal{E}$.

Poiché la collezione $\mathcal{A}$ è regolare per partizioni, per il teorema 2 anche il suo esponenziale pesato $\mathrm{Exp}_W(\mathcal{A})$ è regolare per partizioni. Poiché ogni elemento di $\mathrm{Exp}_W(\mathcal{A})$ contiene una soluzione non banale del sistema esponenziale $\mathcal{E}$, quest'ultimo è regolare per partizioni. □

## 3.3 Applicazioni

L'utilità del teorema 6 risiede nel fatto che, come per gli esempi 2 e 4, non sempre è possibile scrivere la collezione delle soluzioni non banali di un sistema esponenziale nella forma di pattern esponenziale. Per i sistemi di cui il teorema stabilisce la regolarità, scopriamo che le soluzioni sono sottoinsiemi degli elementi dell'esponenziale pesato $\mathrm{Exp}_W \mathcal{A}$ (per qualche collezione $\mathcal{A}$ e funzione peso $W$).

**Una variante *esponenziale* del teorema di Van der Waerden.** Le relazioni binarie che definiscono i sistemi esponenziali visti nei primi quattro esempi sono accomunate dal fatto che i rispettivi grafi associati non contengono cicli. Chiamiamo *semplici* le relazioni binarie che presentano la stessa caratteristica. Si osservi che una relazione binaria semplice genera un sistema lineare vuoto, che, in particolare, è regolare per partizioni. Infatti, la collezione delle soluzioni di un sistema vuoto (in $n \in \mathbb{N}$ incognite) è semplicemente $\mathcal{A} = \mathbb{N}^n$. E non è difficile convincersi che la collezione di $n$-uple di interi positivi $\mathbb{N}^n$ sia regolare per partizioni di $\mathbb{N}$. Dunque, per il teorema 6, tutti i sistemi esponenziali generati da una relazione binaria semplice sono regolari per partizioni.

La regolarità del pattern

$$
a, d, a^d, a^{d^2}, \dots, a^{d^{l-1}} \;\Big|\; a, d > 1 \tag{3.2}
$$

è già stata osservata nei commenti del teorema 1, e anche come caso particolare dei teoremi 2 e 3. Aggiungo, qui, una quarta osservazione in merito. Anche per le *progressioni esponenziali*[1] si può formulare un enunciato che ricorda il teorema di Van der Waerden:

> *Ogni colorazione dei naturali ammette progressioni quadratiche, cubiche oppure esponenziali della d-esima potenza (per qualche $d > 1$) arbitrariamente lunghe e monocromatiche.*

[1]Successioni di ragione logaritmica costante. Definizione a pagina 61.

Sia $l \in \mathbb{N}$ un intero positivo. Si fissi $m = l, n = 1$ e si consideri la relazione binaria R definita da $X_1 \,\mathrm{R}\, X_2 \,\mathrm{R} \cdots \mathrm{R}\, X_l$. La collezione delle soluzioni non banali del sistema esponenziale

$$\mathcal{E}(\mathrm{R};\, 1 \,|\, i < l) : \begin{cases} X_1^y = X_2 \\ X_2^y = X_3 \\ \vdots \\ X_{l-1}^y = X_l \end{cases}$$

dove abbiamo posto $y = Y_1$, è esattamente quella definita dal pattern (3.2), cioè la collezione delle progressioni esponenziali di lunghezza $l$. Quindi, poiché R è una relazione binaria semplice, sistema, pattern e collezione sono banalmente regolari per partizioni.

Questo ulteriore punto di vista suggerisce un modo di ottenere la regolarità di alcune *varianti* del pattern appena considerato. Preciso che i risultati che seguono possono essere dedotti direttamente dalla teoria del capitolo 2. Sono presentati in questo punto della trattazione perché il teorema 6, a mio avviso, ne permette un'esposizione più chiara.

Scegliendo opportunamente l'intero $n$ e i coefficienti $c_1^{(i,i+1)}, \dots, c_n^{(i,i+1)}$ è possibile imporre alcuni vincoli sulla *ragione* $d$ della progressione esponenziale.

*Esempio* 7. Fissiamo $n = 1$ e $c_1^{(i,i+1)} = 2$ al variare di $i < l$. La regolarità per partizioni del sistema esponenziale

$$\mathcal{E}(\mathrm{R};\, 2 \,|\, i < l) : \begin{cases} X_1 \star y^2 = X_2 \\ X_2 \star y^2 = X_3 \\ \vdots \\ X_{l-1} \star y^2 = X_l \end{cases}$$

implica quella del pattern

$$a, a^d, a^{d^2}, \dots, a^{d^{l-1}} \;\Big|\; a, d > 1,\ d \text{ quadrato perfetto}$$

*Esempio* 8. Fissiamo $n = 10$ e $c_1^{(i,i+1)} = 3, c_2^{(i,i+1)} = 2, c_3^{(i,i+1)} = \cdots = c_{10}^{(i,i+1)} = 1$ al variare di $i < l$. La regolarità per partizioni del sistema esponenziale

$$\mathcal{E}(\mathrm{R};\, 3, 2, 1, \dots, 1 \,|\, i < l) : \begin{cases} X_1 \star (Y_1^3 \cdot Y_2^2 \cdot Y_3 \cdot \dots \cdot Y_{10}) = X_2 \\ X_2 \star (Y_1^3 \cdot Y_2^2 \cdot Y_3 \cdot \dots \cdot Y_{10}) = X_3 \\ \vdots \\ X_{l-1} \star (Y_1^3 \cdot Y_2^2 \cdot Y_3 \cdot \dots \cdot Y_{10}) = X_l \end{cases}$$

implica quella del pattern

$$a, a^d, a^{d^2}, \dots, a^{d^{l-1}} \;\Bigg|\; a, d > 1,\ \begin{array}{l} d \text{ composto, con almeno} \\ \text{dieci fattori, di cui almeno} \\ \text{un cubo e un quadrato} \end{array}$$

*Esempio* 9. Fissiamo $n = 2$ e $c_1^{(i,i+1)} = 1, c_2^{(i,i+1)} = -1$ al variare di $i < l$. La regolarità per partizioni del sistema esponenziale

$$\mathcal{E}(\mathrm{R};\, 1, -1 \,|\, i < l) : \begin{cases} X_1 \star (y/\eta) = X_2 \\ X_2 \star (y/\eta) = X_3 \\ \vdots \\ X_{l-1} \star (y/\eta) = X_l \end{cases}$$

dove abbiamo posto $\eta = Y_2$, implica quella del pattern

$$a, a^d, a^{d^2}, \ldots, a^{d^{l-1}} \;\Big|\; a, d > 1,\ d \text{ frazione}$$

Si noti che, affinché gli ultimi due esempi producano un risultato significativo, è necessario richiedere che le $Y_1, \ldots, Y_n$ siano coprime. La dimostrazione del teorema 6 illustrata sopra non garantisce questa condizione, al contrario, fornisce soluzioni della forma $y_1 = b^{z_1}, \ldots, y_n = b^{z_n}$ per qualche $b, z_1, \ldots, z_n$. La domanda sorge naturalmente:

> *Il teorema 6 continua a valere anche se è prescritta la coprimalità delle $Y_1, \ldots, Y_n$?*

Un altro aspetto da richiamare è che la dimostrazione del teorema 6 poggia su quella del teorema 2, la quale produce $t$-uple monocromatiche

$$a, b^{z_1}, \ldots, b^{z_n}, a^b, a^{b^2}, \ldots, a^{b^W}$$

dove $a, b > 1$ sono potenze di due. Anche in questo caso può essere desiderabile avere un risultato diverso sulla forma degli interi $a, b$.

Ancora alcuni esempi.

*Esempio* 10. Fissiamo $n = 1$ e $c_1^{(i,i+1)} = i$ al variare di $i < l$. La regolarità per partizioni del sistema esponenziale

$$\mathcal{E}(\mathrm{R};\, i \,|\, i < l) : \begin{cases} X_1 \star y = X_2 \\ X_2 \star y^2 = X_3 \\ \vdots \\ X_{l-1} \star y^{l-1} = X_l \end{cases}$$

implica quella del pattern

$$a, d, a^d, \left(a^d\right)^{d^2}, \ldots, \left(a^{d \cdot d^2 \cdots d^{l-2}}\right)^{d^{l-1}} \;\Bigg|\; a, d > 1$$

*Esempio* 11. Fissiamo $n = 1$ e $c_1^{(i,i+1)} = 2^{i-1}$ al variare di $i < l$. La regolarità per partizioni del sistema esponenziale

$$\mathcal{E}\big(\mathrm{R};\, 2^{i-1} \,\big|\, i < l\big) : \begin{cases} X_1 \star y = X_2 \\ X_2 \star y^2 = X_3 \\ X_2 \star y^4 = X_3 \\ \vdots \\ X_{l-1} \star y^{2^{l-2}} = X_l \end{cases}$$

implica quella del pattern

$$a, d, a^d, \left(a^d\right)^{d^2}, \left(a^{d \cdot d^2}\right)^{d^4}, \ldots, \left(a^{d \cdot d^2 \cdot d^4 \cdot \cdots \cdot d^{2^{l-3}}}\right)^{d^{2^{l-2}}} \;\Bigg|\; a, d > 1$$

Data una sequenza di interi positivi $\langle a_1, a_2, \ldots, a_l \rangle \subset \mathbb{N}$, definiamo la sequenza delle *ragioni logaritmiche* $\langle d_1, d_2, \ldots, d_{l-1} \rangle \subset \mathbb{R}$, dove

$$d_i = \begin{cases} \frac{\log a_{i+1}}{\log a_i} & \text{se } a_i > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La sequenza delle ragioni logaritmiche del pattern nel primo esempio è la progressione geometrica

$$d, d^2, \ldots, d^{l-1}$$

La sequenza delle ragioni logaritmiche del pattern nel secondo esempio è la progressione quadratica

$$d, d^2, d^4, \ldots, d^{2^{l-2}}$$

Si noti che ragionando in modo analogo agli ultimi due esempi, non sembra possibile dedurre la regolarità di un pattern la cui sequenza delle ragioni logaritmiche formi una progressione aritmetica. Una possibilità è che questo fatto sia collegato all'incompatibilità tra esponenziazione e addizione dimostrata nella proposizione 3 (sezione 2.3). Ciononostante, ha senso chiedersi se il pattern

$$a, d, a^d, \left(a^d\right)^{2d}, \left(a^{2d^2}\right)^{3d}, \ldots, \left(a^{(l-2)!\cdot d^{l-2}}\right)^{(l-1)\cdot d} \;\middle|\; a, d > 1$$

la cui sequenza delle ragioni logaritmiche è la progressione aritmetica

$$d, 2d, 3d, \ldots, (l-1)\cdot d$$

sia regolare per partizioni.

**Relazioni cicliche.** Chiamiamo *ciclica* una relazione binaria il cui grafo associato è un ciclo, un cappio, o un cammino chiuso e diretto di lunghezza 2. Le relazioni binarie cicliche generano sistemi esponenziali come quelli degli esempi 5 e 6, il cui sistema lineare associato è composto da un'unica equazione lineare. La sua regolarità, decidibile grazie al teorema di Rado, equivale, per il teorema 6 a quella del sistema esponenziale.

Fissiamo $m = 1$ e consideriamo la relazione binaria R definita da $x \,\mathrm{R}\, x$, dove $x = X_1$.

*Esempio* 12. Fissiamo $n = 2$ e $c_1^{(x,x)} = 2, c_2^{(x,x)} = -1$. Poiché l'equazione lineare

$$\mathcal{L}(\mathrm{R}; 2, -1): \quad 2 \cdot Z_1 = Z_2$$

non soddisfa la condizione di Rado, l'equazione esponenziale

$$\mathcal{E}(\mathrm{R}; 2, -1): \quad x \star Y_1^2 = x \star Y_2$$

non è regolare per partizioni.

*Esempio* 13. Fissiamo $n = 3$ e $c_1^{(x,x)} = 1, c_2^{(x,x)} = -1, c_3^{(x,x)} = -4$. Poiché l'equazione lineare

$$\mathcal{L}(\mathrm{R}; 1, -1, -4): \quad Z_1 = Z_2 + 4 \cdot Z_3$$

soddisfa la condizione di Rado (i primi due coefficienti sommano a zero), l'equazione esponenziale

$$\mathcal{E}(\mathrm{R}; 1, -1, -4): \quad x \star Y_1 = x \star (Y_2 \cdot Y_3^4)$$

è regolare per partizioni.

Consideriamo la relazione binaria R definita da $X_m \mathrel{\mathrm{R}} X_1 \mathrel{\mathrm{R}} \cdots \mathrel{\mathrm{R}} X_{m-1} \mathrel{\mathrm{R}} X_m$.

*Esempio* 14 ([JS2]). Fissiamo $m = n = 3$ e $c_1^{(i,j)}, c_2^{(i,j)}, c_3^{(i,j)}$ al variare di $X_i \mathrel{\mathrm{R}} X_j$ tali da ottenere il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}\Big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, c_2^{(i,j)}, c_3^{(i,j)} \,\Big|\, X_i \mathrel{\mathrm{R}} X_j\Big): \quad \begin{cases} X_1^{Y_1} = X_2 \\ X_2^{Y_2} = X_3 \\ X_3^{Y_3} = X_1^{Y_2^2} \end{cases}$$

Poiché l'equazione lineare

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, c_2^{(i,j)}, c_3^{(i,j)} \,\big|\, X_i \mathrel{\mathrm{R}} X_j\big): \quad Z_1 + Z_3 = Z_2$$

è regolare per il teorema di Schur, il sistema esponenziale $\mathcal{E}$ è regolare per partizioni.

*Esempio* 15 ([JS2]). Fissiamo $m = 4, n = 3$ e $c_1^{(i,j)}, c_2^{(i,j)}, c_3^{(i,j)}$ al variare di $X_i \mathrel{\mathrm{R}} X_j$ tali da ottenere il sistema esponenziale

$$\mathcal{E}\Big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, c_2^{(i,j)}, c_3^{(i,j)} \,\Big|\, X_i \mathrel{\mathrm{R}} X_j\Big): \quad \begin{cases} X_1^{Y_1} = X_2 \\ X_2^{Y_1} = X_3 \\ X_3^{Y_1} = X_4 \\ X_4 = X_1^{Y_2 \cdot Y_3} \end{cases}$$

Poiché l'equazione lineare

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{R};\, c_1^{(i,j)}, c_2^{(i,j)}, c_3^{(i,j)} \,\big|\, X_i \mathrel{\mathrm{R}} X_j\big): \quad 3 \cdot Z_1 = Z_2 + Z_3$$

non soddisfa la condizione di Rado, il sistema esponenziale $\mathcal{E}$ non è regolare per partizioni.

# Domande aperte

Di seguito richiamo gli interrogativi emersi nella sezione 3.3 a proposito delle progressioni esponenziali. Mentre il primo non sembra facilmente avvicinabile, una strada per rispondere al secondo potrebbe essere quella di considerare sistemi esponenziali più complessi, in cui sono ammessi anche i prodotti tra le variabili $X_1, \ldots, X_m$. A tal fine potrebbe essere utile un risultato che estenda entrambi i teoremi 2 e 3.

**Questione 6** (Sezione 3.3)**.** Il teorema 6 continua a valere anche se è prescritta la coprimalità delle $Y_1, \ldots, Y_n$?

**Questione 7** (Sezione 3.3)**.** Fissato $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo, il pattern

$$a, d, a^d, a^{2d^2}, \ldots, a^{n! \cdot d^n} \;\Big|\; a, d > 1$$

è regolare?

Chiudo con un ultimo interrogativo sulle progressioni che si potrebbero chiamare *a torre*, la cui risposta non sembra essere contenuta nei risultati illustrati in questa tesi.

**Questione 8.** Fissato $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo, il pattern

$$d, a, d^a, d^{d^a}, d^{d^{d^a}}, \ldots, \exp_d^{(n)}(a) \;\Big|\; a, d > 1$$

è regolare?

# Bibliografia


[Arn] Vladimir I. Arnautov, Nondiscrete topologizability of countable rings, *Soviet Mathematics Doklady 11* (1970), pp. 423-426; tradotto dall'originale in russo, in: *Doklady Akademii Nauk USSR 191* (1970), pp. 747-750

[Bro] Tom Brown, Monochromatic Solutions of Exponential Equations, *Integers 15* (2015), paper A2, 9 pp.

[BE] Nicolaas G. de Bruijn, Pál Erdős, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A. Indagationes Mathematicae 54* (1951), pp. 371-373

[Dic] Leonard E. Dickson, On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod p$, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 135* (1909), pp. 134-141

[DNLB] Mauro Di Nasso, Lorenzo Luperi Baglini, Ramsey properties of nonlinear Diophantine equations, *Advances in Mathematics 324* (2018), pp. 84–117

[ER1] Pál Erdős, Richard Rado, A problem on ordered sets, *Journal of the London Mathematical Society 28* (1953), pp. 426-438

[GRS] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, Joel H. Spencer, *Ramsey Theory (second edition)*, Wiley, New York, 1990

[Hil] David Hilbert, Ueber die Irreducibilitat ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 110* (1892), pp. 104-129

[Hin] Neil Hindman, Finite Sums from Sequences Within Cells of a Partition of N, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 17 (1974), pp. 1-11

[Mor] Joel Moreira, Monochromatic sums and products in $\mathbb{N}$, *Annals of Mathematics 185* (2017), pp. 1069-1090

[Rado] Richard Rado, Studien zur Kombinatorik, *Mathematische Zeitschrift 36* (1933), pp. 424-480

[Radz] Stanisław P. Radziszowski, Small Ramsey Numbers, *The Electronic Journal of Combinatorics*, https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS1

[Ram] Frank P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Second Series 30 (1930), pp. 264-286

[JS1] Julian Sahasrabudhe, Exponential patterns in arithmetic Ramsey theory, *Acta Arithmetica 182.1* (2018), pp. 13-41

[JS2] Julian Sahasrabudhe, Monochromatic solutions to systems of exponential equations, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 158 (2018), pp. 548–559

[San] Jon H. Sanders, *A Generalization of Schur's Theorem*, Thesis (Ph.D.) - Yale University, 1968, 41 pp.

[Sch] Issai Schur, Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker*, Vereinigung 25 (1916), pp. 114-117

[Sis] Alessandro Sisto, Exponential triples, *The Electronic Journal of Combinatorics v18* (2011), #P147, 7 pp.

[Soi] Alexander Soifer, Ramsey Theory Before Ramsey, Prehistory and Early History: An Essay in 13 Parts, in: *Ramsey Theory: Yesterday, Today and Tomorrow*, Soifer (ed.), Springer, New York, 2011, pp. 1-26

[Wae] Bartel L. van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Tweede Serie 15 (1927), pp. 212-216