

# Teorema di Milnor-Whitehead

SIMONE CAPPELLINI

<http://poisson.phc.dm.unipi.it/~cappellini>

21 aprile 2020

## Introduzione

Il seminario qui proposto ha come obiettivo la dimostrazione del teorema di Milnor-Whitehead riguardante le 4-varietà semplicemente connesse e chiuse. Presenteremo due diverse dimostrazioni, una dal punto di vista algebrico e l'altra molto più geometrica. Questo risultato permette di capire se due 4-varietà sono omotopicamente equivalenti oppure no in modo piuttosto semplice; non permette però di capire quali tipi di omotopia sono possibili per una 4-varietà, lavoro che è stato svolto per il caso topologico da Freedman nel 1981 arrivando ad una classificazione completa delle 4-varietà topologiche. Nel caso liscio, limitazioni sulle possibili forme di intersezione sono state date ad esempio da Rohlin e Donaldson.

## 1 Teorema di Milnor-Whitehead

Passiamo immediatamente all'enunciato, che permette di creare un collegamento diretto tra la nozione puramente geometrica dell'equivalenza omotopica e quella più algebrica delle forme di intersezione.

**Teorema 1.1** (Milnor, Whitehead). *Due 4-varietà chiuse, semplicemente connesse e orientate sono omotopicamente equivalenti se e solo se le loro forme di intersezione sono isomorfe.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  una 4-varietà chiusa, semplicemente connessa e orientata: poiché vale l'isomorfismo  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \pi_1^{ab}(M)$ , la dualità di Poincaré e il Teorema dei Coefficienti Universali, la sua omologia è non banale soltanto nei gradi 0, 2 e 4. Di conseguenza, per il Teorema di Hurewicz, si ha l'isomorfismo

$$\pi_2(M) \cong H_2(M; \mathbb{Z}).$$

Inoltre  $H_2(M; \mathbb{Z})$  non ha parte di torsione grazie al Teorema dei Coefficienti Universali. Di conseguenza si ha  $H_2(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$  per un certo  $m \in \mathbb{N}$ . Possiamo allora costruire una

applicazione

$$f: S^2 \vee \dots \vee S^2 \longrightarrow M$$

che induca un isomorfismo sull'omologia di grado 2 (basta scegliere dei rappresentanti per i generatori del  $\pi_2$  e considerarne il wedge). Banalmente  $f$  induce isomorfismo in tutti i gradi di omologia ad eccezione del quarto.

Per far sì che induca isomorfismi in tutti i gradi, e dunque poter applicare il teorema di Whitehead, consideriamo una palla in  $M$  e la tagliamo via, ottenendo quindi una nuova varietà  $M^\circ = M \setminus D^4$  con  $H_4(M^\circ; \mathbb{Z}) = 0$ . Isotopando  $f$  affinché abbia immagine contenuta in  $M^\circ$  possiamo utilizzare il Teorema di Whitehead per concludere che

$$M^\circ \sim S^2 \vee \dots \vee S^2.$$

Giunti a questo punto, per riottenere la varietà  $M$  di partenza dobbiamo rincollare il  $D^4$  al wedge di sfere  $\bigvee_m S^2$  passando dall'equivalenza omotopica  $f$ . Quindi abbiamo mostrato che il tipo di omotopia di  $M$  è completamente determinato dalla mappa di incollamento  $\varphi: \partial D^4 \longrightarrow \bigvee_m S^2$ , o più precisamente dalla sua classe di omotopia.

Ciò significa che possiamo vedere la classe di  $\varphi$  come un elemento di  $\pi_3(\bigvee_m S^2)$ .

La dimostrazione è conclusa una volta dimostrato che la classe di omotopia di  $\varphi$  è univocamente determinata dalla forma di intersezione di  $M$ . Questo può essere fatto in due modi: il primo più diretto, ma utilizzando argomentazioni algebriche; l'altro un po' più oscuro (utilizzeremo fatti non dimostrati) attraverso considerazioni geometriche.

Vediamoli entrambi:

## 1.1 Dimostrazione algebrica

Osserviamo innanzitutto che, tramite l'equivalenza omotopica  $M \sim \bigvee_m S^2 \cup_\varphi D^4$ , la classe fondamentale  $[M] \in H_4(M; \mathbb{Z})$  corrisponde alla classe della palla 4-dimensionale incollata: infatti, poiché essa ha bordo interamente contenuto nel 2-scheletro del CW-complesso  $\bigvee_m S^2 \cup_\varphi D^4$  (che è dato dal wedge delle  $m$  sfere), esso rappresenta un 4-ciclo che genera  $H_4(\bigvee_m S^2 \cup_\varphi D^4; \mathbb{Z})$  e nel caso  $\varphi$  sia *orientation-reversing* coincide con  $[M]$ .

Pensiamo alle sfere  $S^2$  come dei  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  dentro  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ . A questo punto consideriamo l'inclusione

$$S^2 \vee \dots \vee S^2 \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \times \dots \times \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$$

e la successione esatta lunga in omotopia della coppia:

$$\dots \longrightarrow \pi_4\left(\prod_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty\right) \longrightarrow \pi_4\left(\prod_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2\right) \longrightarrow \pi_3\left(\bigvee_1^m S^2\right) \longrightarrow \pi_3\left(\prod_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty\right) \longrightarrow \dots \quad .$$

Sapendo che  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  è uno spazio di Eilenberg-MacLane  $K(\mathbb{Z}, 2)$ , l'unico gruppo di omotopia non nullo di  $\prod_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  è il  $\pi_2$ , e dunque dalla successione esatta precedente otteniamo

l'isomorfismo

$$\pi_3\left(\bigvee_1^m S^2\right) \cong \pi_4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2\right).$$

Interpretiamo il  $\pi_4$  relativo come l'insieme delle mappe a meno di omotopia  $(D^4, \partial D^4) \rightarrow (\bigtimes_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_m S^2)$ . L'isomorfismo associa dunque alla classe di  $\varphi: \partial D^4 \rightarrow \bigvee_m S^2$  nel  $\pi_3$  la classe di una qualunque sua estensione

$$\tilde{\varphi}: D^4 \rightarrow \bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty.$$

Utilizzando ancora una volta la successione esatta lunga in omotopia per la coppia e sapendo che l'inclusione  $\bigvee_m S^2 \subseteq \bigtimes_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  induce un isomorfismo a livello dei  $\pi_2$  otteniamo che

$$\pi_2\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2\right) = \pi_3\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2\right) = 0.$$

Di conseguenza (anche il  $\pi_1$  relativo è nullo essendo  $\bigtimes_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  semplicemente connesso e  $\bigvee_m S^2$  connesso) il Teorema di Hurewicz ci fornisce una ulteriore identificazione

$$\pi_4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2\right) \cong H_4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2; \mathbb{Z}\right).$$

Tramite questo isomorfismo la classe di  $\tilde{\varphi}$  è mandata per definizione nella classe

$$\tilde{\varphi}_*[D^4] \in H_4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2; \mathbb{Z}\right),$$

dove  $\tilde{\varphi}_*$  è l'applicazione indotta in omologia da  $\tilde{\varphi}$ .

Inoltre il wedge di sfere è un CW-complesso di dimensione 2, da cui la sua omologia è nulla nei gradi superiori al secondo; considerando la successione esatta lunga in omologia per la coppia otteniamo allora l'isomorfismo

$$H_4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \bigvee_1^m S^2; \mathbb{Z}\right) \cong H_4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}\right).$$

Detto a parole, si ha questo isomorfismo poiché il generatore  $\tilde{\varphi}_*[D^4]$  ha bordo contenuto nel 2-scheletro di  $\bigtimes_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ , da cui può essere visto direttamente come 4-ciclo in  $H_4(\bigtimes_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$ .

Grazie alla mancanza di torsione nell'omologia di  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  (e per Künneth anche nel prodotto cartesiano di  $m$  copie di  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ ), per il Teorema dei Coefficienti Universali vale in modo naturale

$$H^4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}\right) = \text{Hom}\left(H_4\left(\bigtimes_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}\right), \mathbb{Z}\right).$$

Poiché il rango di  $H_4(\times_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$  è finito, vale anche che  $\text{Hom}(H^4(\times_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong H_4(\times_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$ , da cui concludiamo che per determinare  $\tilde{\varphi}_*[D^4]$  è sufficiente valutare tutte le classi di  $H^4$  su di esso. In altre parole, la classe di omotopia di  $\varphi \in \pi_3(\bigvee_m S^2)$  (e cioè il tipo di omotopia di  $M$ ) è completamente determinato dai valori  $\alpha_k(\tilde{\varphi}_*[D^4])$  per una base  $\{\alpha_k\}_k$  di  $H^4(\times_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$ .

Una base facilmente calcolabile è data dai prodotti cup delle classi duali ad ogni  $S^2$ , da cui  $H^4(\times_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_i \smile \omega_j \mid i, j \leq m]$ , dove  $\omega_k$  denota la 2-classe duale al  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  nel  $k$ -esimo fattore  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ .

Inoltre, dato che

$$H^2(\times_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) \cong H^2(\bigvee_1^m S^2; \mathbb{Z}) \cong H^2(M^\circ; \mathbb{Z}) \cong H^2(M; \mathbb{Z}),$$

osserviamo come ogni classe  $\omega_k$  può essere in realtà vista come una 2-classe direttamente della varietà  $M$ .

Se  $i: \bigvee_m S^2 \rightarrow \times_m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  è l'inclusione, la base  $\{\omega_k\}_k$  di  $H^2(M; \mathbb{Z})$  che consideriamo è  $w_k := (i \cup \tilde{\varphi})^* \omega_k$  dove

$$i \cup \tilde{\varphi}: M \sim \bigvee_1^m S^2 \cup_\varphi D^4 \rightarrow \times_1^m \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty.$$

Per concludere la dimostrazione non resta che valutare la classe  $\tilde{\varphi}_*[D^4]$  sui generatori  $\omega_i \smile \omega_j$ . Fare ciò equivale però per functorialità a valutare la classe  $[D^4]$  (ovvero la classe fondamentale  $[M]$  per quanto osservato all'inizio) sui generatori  $w_i \smile w_j$ :

$$\begin{aligned} (\omega_k \smile \omega_j)(\tilde{\varphi}_*[D^4]) &= (\omega_k \smile \omega_j)((i \cup \tilde{\varphi})_*[D^4]) \\ &= ((i \cup \tilde{\varphi})^*(\omega_k \smile \omega_j))[D^4] \\ &= (((i \cup \tilde{\varphi})^* \omega_k) \smile ((i \cup \tilde{\varphi})^* \omega_j))[D^4] \\ &= (w_k \smile w_j)[D^4] \\ &= (w_k \smile w_j)[M] \\ &= Q_M(w_k, w_j). \end{aligned}$$

Poiché  $\{\omega_k\}_k$  formano una base di  $H^2(M; \mathbb{Z})$ , abbiamo dimostrato che per determinare la classe di omotopia di  $\varphi$  (e poi il tipo di omotopia di  $M$ ) è sufficiente conoscere la forma di intersezione di  $M$ .  $\square$

## 1.2 Dimostrazione geometrica - Costruzione di Thom-Pontryagin

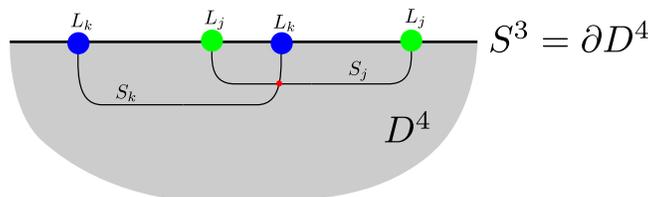
Riprendiamo la dimostrazione dall'inizio e rappresentiamo  $M$  come un bouquet di sfere a cui viene attaccata una 4-palla tramite la funzione di incollamento  $\varphi$ . Il tipo di omotopia di  $M$  dunque dipende unicamente dalla classe di omotopia di  $\varphi$ . L'argomentazione che segue

imita la cosiddetta *costruzione di Thom-Pontryagin*, ed in particolare nella conclusione accenneremo alcuni dei risultati che ci servono senza però dimostrarli.

Scegliamo dei punti  $p_1, \dots, p_m$ , uno da ciascuna sfera del bouquet diversi dal punto base. Tramite omotopia rendiamo  $\varphi$  trasversa a questi punti e modifichiamola ancora fino ad avere che ogni fibra  $\varphi^{-1}(p_k)$  sia connessa. Osserviamo che senza perdita di generalità  $\varphi^{-1}(p_k) \neq \emptyset$ . Abbiamo allora costruito un link  $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$  dove  $L_k = \varphi^{-1}(p_k)$  è un nodo (è un  $S^1$  embedded in  $S^3 = \partial D^4$ ). Questa costruzione permette inoltre di scegliere un *framing* per  $L$  nel modo seguente: poiché  $\varphi$  è trasversa ad ogni punto  $p_k$ , assumendo che sia liscia intorno ad  $L_k$ , segue che  $d\varphi: T_{S^3}|_{L_k} \rightarrow T_{S^2}|_{p_k}$  si restringe ad una applicazione  $N_{L_k} \rightarrow T_{S^2}|_{p_k}$  che è un isomorfismo sulle fibre. Di conseguenza  $\varphi$  induce in modo naturale una trivializzazione del fibrato normale su  $L_k$ . Infine osserviamo che ogni componente di  $L$  ha una orientazione naturale data dalla decomposizione  $T_{S^3}|_{L_k} = T_{L_k} \oplus N_{L_k}$ .

Consideriamo adesso la matrice di allacciamento del link  $L$ . Da qui ci dobbiamo muovere in due opposte direzioni per concludere la dimostrazione: per prima cosa mostriamo che la matrice di allacciamento è proprio la forma di intersezione di  $M$ ; poi dovremo dimostrare che la classe di omotopia di  $\varphi$  è interamente determinata da questa matrice di allacciamento. Quest'ultimo fatto non sarà dimostrato per intero.

Per ognuno dei nodi  $L_k$  consideriamo una superficie di Seifert in  $S^3$  e "spingiamola" all'interno di  $D^4$  nel modo seguente:



In questo modo otteniamo che il *linking number*  $\text{lk}(L_k, L_j)$  è in effetti proprio l'intersezione algebrica  $S_k \cdot S_j$  dentro  $D^4$ .

Di conseguenza, nel ricostruire il tipo di omotopia di  $M$  attraverso l'incollamento di  $D^4$  sul wedge  $\bigvee_m S^2$  tramite  $\varphi$  il bordo  $L_k$  di ogni superficie  $S_k$  viene collassato ad un punto  $p_k$  creando perciò una superficie chiusa  $S_k^*$ .

Poiché le intersezioni algebriche  $S_k^* \cdot S_j^*$  (viste dentro  $S^2 \vee \dots \vee S^2 \cup_\varphi D^4$ , cioè in  $M$ ) sono esattamente  $\text{lk}(L_k, L_j)$ , concludiamo che la matrice di allacciamento cattura (almeno) una parte della forma di intersezione di  $M$ .

In effetti vale che le intersezioni delle superfici  $S_k^*$  esauriscono completamente la forma di intersezione di  $M$ , cioè l'insieme  $\{S_k^*\}_k$  è una base di  $H_2(M; \mathbb{Z})$ : sappiamo già che le classi delle sfere del wedge  $\bigvee_m S^2$  generano  $H_2(M; \mathbb{Z})$ , ed è immediato constatare che ogni  $S_k^*$

interseca una ed una sola sfera in esattamente un punto. Essendo la forma di intersezione di  $M$  unimodulare ( $M$  è chiusa, connessa e orientata) si ha che le  $S_k^*$  sono la base duale alle sfere del wedge.

Abbiamo perciò dimostrato che la matrice di allacciamento del link con frame è la forma di intersezione di  $M$ .

Resta da dimostrare la correlazione tra la classe di omotopia di  $\varphi$  e la matrice di allacciamento. Con la costruzione precedente abbiamo associato ad una  $\varphi: S^3 \rightarrow S^2 \vee \dots \vee S^2$  un link con framing e da questo una matrice  $m \times m$  simmetrica; viceversa, da una matrice  $m \times m$  simmetrica è semplice costruire un link con framing avente essa come matrice di allacciamento, e dal link si riesce a costruire una applicazione  $S^3 \rightarrow S^2 \vee \dots \vee S^2$  che collassi le componenti del link sui punti e rispetti il framing (si parte dalla trivializzazione dell'intorno tubolare e si estende a tutto  $S^3$  mandando il complementare di un intorno tubolare più grande nel punto base di  $S^2$ ).

Senza addentrarci più di tanto nella teoria dei cobordismi e nella costruzione di Thom-Pontryagin in generale, diamo soltanto la seguente definizione:

**Definizione 1.2.** Siano  $L_0 = K_1 \cup \dots \cup K_m$  e  $L_1 = K'_0 \cup \dots \cup K'_m$  due link orientati con  $m$  componenti ciascuno in  $S^3$  dotati entrambi di framing  $f_0, f_1$ . Si dice che essi sono *framed-cobordanti* se esistono  $m$  superfici orientate  $W_i$  disgiunte e propriamente embedded in  $S^3 \times I$  tali che  $W_i \cap (M \times \{0\}) = -K_i$  e  $W_i \cap (M \times \{1\}) = K'_i$  e inoltre per ogni superficie è specificata una sezione del fibrato normale  $f_{W_i}$  che estende i campi normali dei framing  $f_0$  e  $f_1$  sulle relative componenti.

Denotiamo con  $\Omega_{1,m}^{\mathcal{F}}(S^3)$  l'insieme delle classi a meno di framed-cobordismo di link con  $m$  componenti.

La corrispondenza 1:1 tra classi di omotopia e matrici si ha grazie ai seguenti fatti che non dimostreremo:

**Lemma 1.3** (Thom-Pontryagin). *Vale la seguente biezione:*

$$\pi_3\left(\bigvee_1^m S^2\right) \longleftrightarrow \Omega_{1,m}^{\mathcal{F}}(S^3).$$

**Lemma 1.4.** *Due link con framing framed-cobordanti hanno la stessa matrice di allacciamento.*

**Lemma 1.5.** *Due link con framing aventi la stessa matrice di allacciamento sono framed-cobordanti.*

Questi risultati permettono di costruire una applicazione iniettiva

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{1,m}^{\mathcal{F}}(S^3) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(m, \mathbb{Z}) \\ [L] & \mapsto & \text{lk}(L) \end{array}$$

dall'insieme dei cobordismi (o equivalentemente dal  $\pi_3(\bigvee_m S^2)$  per il Lemma 1.3) alle matrici simmetriche  $m \times m$ . La surgettività è ovvia per quanto detto in precedenza, essendo sempre possibile costruire un link con framing (e quindi una classe di cobordismo) avente come matrice di allacciamento una data matrice simmetrica.

Abbiamo provato allora che

$$\pi_3\left(\bigvee_1^m S^2\right) \longleftrightarrow \Omega_{1,m}^{\mathcal{F}}(S^3) \longleftrightarrow \mathcal{S}(m, \mathbb{Z})$$

che conclude la dimostrazione alternativa. □

## Riferimenti bibliografici

- [GS99] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus*. Graduate Studies in Mathematics 20. American Mathematical Society, 1999.
- [Kai97] U. Kaiser. *Link Theory in Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics 1669. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1997.
- [Kir89] R. C. Kirby. *The Topology of 4-Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics / Nankai Institute of Mathematics, Tianjin, P.R. China. Springer, 1989.
- [Mil58] J. Milnor. *On Simply Connected 4-Manifolds*. Symposium Internacional de topologia algebraica, 1958.
- [San87] B. J. Sanderson. *Bordism of Links in Codimension 2*. J. London Math. Soc., 1987.
- [Sco05] A. Scorpan. *The Wild World of 4-Manifolds*. American Mathematical Society, 2005.