

A.A. 2014/2015
Corso di Analisi Matematica 1
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001: Logica elementare (a livello intuitivo): proposizioni, predicati, and e vel, quantificatori. Negazione di una proposizione.	6
Lezione 002: Tavole di verità. Implicazione e sua negazione. Insiemi e notazioni insiemistiche. Insieme delle parti.	10
Lezione 003: Funzioni tra insiemi: definizione operativa e formale. Grafico, composizione, iniettività, surgettività, funzione inversa. Immagine e controimmagine.	14
Lezione 004: Principio di induzione. Dimostrazione di uguaglianze e disuguaglianze mediante il principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli.	18
Lezione 005: Interpretazioni grafiche di iniettività, surgettività, immagine e controimmagine per funzioni reali. Operazioni sui grafici. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni monotone.	23
Lezione 006: Definizione assiomatica dei numeri reali. Enunciato della loro esistenza ed unicità. Insiemi limitati superiormente/inferiormente, maggioranti/minoranti, massimo/minimo.	27
Lezione 007: Estremo inferiore e superiore. Dimostrazione della loro esistenza. Caratterizzazione di inf e sup. Dimostrazione che l'insieme dei naturali non è superiormente limitato.	31
Lezione 008: Funzioni elementari: potenze e radici, esponenziali e logaritmi. Discussione di cosa bisognerebbe dimostrare per avere una definizione rigorosa.	35
Lezione 009: Funzioni elementari: funzioni trigonometriche e relative inverse. Iniettività ed equazioni. Monotonia e disequazioni.	39
Lezione 010: Significato dei termini 'definitivamente' e 'frequentemente'. Definizione di successione e sue rappresentazioni. Definizioni di limite per successioni. Limitatezza delle successioni convergenti.	44
Lezione 011: Primi esempi e risultati sui limiti di successione: permanenza del segno, unicità del limite, teorema di confronto a 2, teorema di confronto a 3 (teorema dei carabinieri).	48
Lezione 012: Teorema delle successioni monotone. In numero e (monotonia e limitatezza della successione che lo definisce).	52
Lezione 013: Retta reale estesa. Enunciato del teorema algebrico sui limiti di successione. Primi esempi di limiti calcolati usando teoremi algebrici e di confronto.	57
Lezione 014: Criterio della radice, del rapporto e rapporto $-j$ radice per limiti di successione: enunciati e dimostrazioni. Dimostrazione di un caso del limite della somma.	63
Lezione 015: Applicazione dei criteri della radice, rapporto e rapporto $-j$ radice al confronto di ordini di infinito. Dimostrazione di un caso del limite del prodotto.	68

Lezione 016: Limiti di funzioni: definizioni. Definizione di funzione continua in un punto ed in un insieme.	73
Lezione 017: Enunciato dei limiti notevoli. Enunciato della continuità delle funzioni ottenute a partire da quelle elementari. Esempi di cambi di variabile nei limiti.	77
Lezione 018: Criterio successioni - j funzioni. Dimostrazione dei limiti notevoli classici.	82
Lezione 019: Criterio funzioni - j successioni. Trucco del passaggio all'esponenziale. Esempi di limiti calcolati sfruttando i limiti notevoli.	87
Lezione 020: Sottosuccessioni e loro limiti. Utilizzo di successioni e sottosuccessioni per mostrare la non esistenza di limiti di funzioni e successioni.	92
Lezione 021: Razionalizzazioni di radici. Esercizi sui limiti che sfruttano le tecniche viste finora.	97
Lezione 022: Definizione di o piccolo e di equivalenza asintotica. Principali proprietà di o piccolo.	101
Lezione 023: Sviluppi delle funzioni elementari. Utilizzo degli sviluppi per il calcolo di limiti.	106
Lezione 024: Rapporto incrementale, derivata e differenziale. Retta tangente ad un grafico. Equivalenza tra le definizioni e interpretazione geometrica. Limiti notevoli vs sviluppi vs derivate delle funzioni elementari.	111
Lezione 025: Derivata delle funzioni elementari e delle relative inverse. Teoremi algebrici sulle derivate. Derivata della composizione e dell'inversa (enunciati e dimostrazioni abusive).	116
Lezione 026: Enunciato del teorema di De L'Hôpital. Esempi in cui si può e non si può applicare. Pericoli del fare i limiti metà per volta o mediante equivalenza asintotica.	121
Lezione 027: Enunciato della formula di Taylor con resto di Peano e centro in 0. Dimostrazione degli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari.	125
Lezione 028: Enunciato della formula di Taylor con resto di Peano e centro in un punto qualunque. Polinomio di Taylor della somma, prodotto e composizione di due funzioni.	130
Lezione 029: Funzioni iperboliche.	134
Lezione 030: Definizione di ordine di infinitesimo e parte principale. Esercizi misti sui limiti.	139
Lezione 031: Esercizi misti sui limiti.	144
Lezione 032: Serie numeriche: definizione come limite delle somme parziali. Serie telescopiche e geometriche. Proprietà algebriche.	149
Lezione 033: Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica. Serie a termini di segno costante. Criteri di convergenza: confronto, radice, rapporto.	154
Lezione 034: Criterio del confronto asintotico (casi standard e casi limite) per la convergenza di una serie numerica. Serie armonica generalizzata. Criterio di condensazione di Cauchy.	158
Lezione 035: Esercizi sulla convergenza di serie numeriche a termini di segno costante.	163
Lezione 036: Criterio di Leibnitz per le serie a segno alterno. Assoluta convergenza. Teorema dei carabinieri per le serie. Esempi di serie convergenti ma non assolutamente convergenti.	167
Lezione 037: Esercizi sulle serie. Il numero e (e la funzione esponenziale) come somma di una serie.	172

Lezione 038: Teoremi che legano la monotonia al segno della derivata per funzioni di una variabile.	176
Lezione 039: Studio locale di una funzione nell'intorno di un punto stazionario: criterio delle derivate successive e sua interpretazione in termini di polinomi di Taylor. Esempi di comportamenti patologici che sfatano luoghi comuni.	180
Lezione 040: Teorema di esistenza degli zeri: enunciato e tre possibili dimostrazioni. Teorema dei valori intermedi.	185
Lezione 041: Esercizi sulle funzioni che sfruttano il teorema di esistenza degli zeri e lo studio locale. Esempio classico di funzione non nulla con tutte le derivate nulle in uno stesso punto.	190
Lezione 042: Definizioni di max/min e di punti di max/min. Enunciato del teorema di Weierstrass in un intervallo. Ricerca dei candidati punti di max/min: punti stazionari interni, singolari interni, bordo. Teorema di Weierstrass per funzioni periodiche continue.	195
Lezione 043: Varianti del teorema di Weierstrass su insiemi non limitati. Esempi ed esercizi sulle funzioni che sfruttano gli strumenti visti finora.	200
Lezione 044: Schema classico per lo studio di funzioni: simmetrie, continuità, limiti agli estremi, zeri e segno, monotonia, classi di regolarità, punti di massimo/minimo locale/globale, asintoti.	204
Lezione 045: Esempi e controesempi relativi agli asintoti obliqui. Definizione geometrica di convessità/concavità. Legami tra convessità e derivata seconda. Punti di flesso.	209
Lezione 046: Esempi di equazioni e disequazioni risolte mediante studi di funzione. Rischi legati al confronto di due grafici. Disuguaglianze classiche (confronti tra funzioni elementari e loro polinomi di Taylor) che si dimostrano con studi di funzione.	214
Lezione 047: Ulteriori esempi di problemi che si affrontano con studi di funzione.	218
Lezione 048: Funzioni lipschitziane. Legami tra lipschitzianità e limitatezza della derivata prima.	222
Lezione 049: Esempi ed esercizi che utilizzano in vario modo gli studi di funzione.	227
Lezione 050: Formula di Taylor con resto di Lagrange: enunciato ed applicazioni classiche: approssimazione di funzioni, dimostrazione di disuguaglianze, convergenza di serie di Taylor. Accenno alle funzioni analitiche.	232
Lezione 051: Esempi ed esercizi con visione globale su limiti e funzioni.	236

ANALISI 1 - LEZIONE 001

Titolo nota

25/09/2014

- ① Preliminari
- ② Limiti e questioni collegate
- ③ Calcolo differenziale (derivate, studi di funzione)
- ④ Calcolo integrale

4 rami diversi

- ↗ insiemi e funzioni
- insiemi
- ↘ numeri reali
- ↘ funzioni elementari

Logica elementare

Proposizione = frase che può essere vera / falsa

Esempi : 1 - Il numero di uodecde in questa stanza è pari
 2 - $2014 \geq 2000$ *Vero*

Predicato : frase con dei parametri che a seconda del valore dei parametri può essere V/F

Esempi

$$x^2 \geq 2014$$

↑
parametro

$$a > b$$

↑ ↑
parametri

Quantificatori : \forall per ogni
 \exists esiste almeno un
 $\exists!$ esiste un unico

Quando quantifico tutti i parametri un predicato diventa una proposizione

<u>Esempi</u>	$\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014$ prop. falsa	$\exists x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014$ prop. vera
	$\forall a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad a < b$	Falsa
	$\exists a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad a < b$	Vera
	$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad a < b$	Vera
<p>B = insieme di ragazzi (boys) G = " " ragazze (girls)</p> <p>$P(b,g)$ = al boy b piace la girl g</p>		
	$\forall b \in B \quad \forall g \in G \quad P(b,g)$	a tutti piacciono tutte
	$\exists b \in B \quad \exists g \in G \quad P(b,g)$	c'è almeno 1 a cui piace almeno una
	$\forall b \in B \quad \exists g \in G \quad P(b,g)$	A tutti i B piace almeno una G
	$\exists b \in B \quad \forall g \in G \quad P(b,g)$	C'è un B a cui piacciono tutte
	$\forall g \in G \quad \exists b \in B \quad P(b,g)$	Ogni G piace ad almeno un B
	$\exists g \in G \quad \forall b \in B \quad P(b,g)$	Esiste una G che piace a tutti
<u>Operazioni tra proposizioni</u>		
AND	<div style="border: 1px solid green; padding: 5px; display: inline-block;"> $3 > 2$ AND $3 < 27$ prop </div>	AND E \wedge
	Nuova Prop (vera se sono vere tutte e 2)	
VEL	<div style="border: 1px solid green; padding: 5px; display: inline-block;"> $3 > 2$ VEL $3 > 7$ $3 > 2$ VEL $3 > 0$ </div>	VEL O \vee
	Entrambe le prop. globali sono vere	
<p>Il VEL è falso se e solo se sono false tutte e 2.</p>		

NEGAZIONE Proposizione che dice l' esatto contrario

P: oggi è giovedì

NOT P: oggi non è giovedì

Come si negano AND e VEL ?

$$\text{NOT} (P \wedge Q) = (\text{NOT} P) \vee (\text{NOT} Q)$$

Se non è vero che P e Q sono vere, vuol dire che almeno una delle 2 è falsa

$$\text{NOT} (P \vee Q) = (\text{NOT} P) \wedge (\text{NOT} Q)$$

Se non è vero che o P o Q è vera, allora vuol dire che sono false tutte e 2.

Come si nega una prop. ottenuta quantificando un predicato ?

Prop: $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014$

Neg. $\exists x \in \mathbb{N} \quad x^2 < 2014$

$$\text{NOT} (\forall x \in \dots P(x))$$

$$\exists x \in \dots \text{NOT } P(x)$$

P: tutti i cavalli sono bianchi

$\forall c \in \text{cavalli} \quad c \text{ è bianco}$

NOT P: esiste un cavallo che non è bianco

$\exists c \in \text{cavalli} \quad c \text{ è non bianco}$

$$\exists x \in \mathbb{N} \quad x^3 \geq 7$$

Neg. $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^3 < 7$

$$\text{NOT} (\exists x \in \dots P(x))$$

$$\forall x \in \dots \text{NOT } P(x)$$

Esercizio

Negare

$\exists b \in B \quad \forall g \in G \quad P(b, g)$

$\forall b \in B \quad \exists g \in G \quad \text{NOT } P(b, g)$

Esercizio Ogni anno c'è almeno uno studente che passa tutti gli esami

Traduzione: $\forall a \text{ anno } \exists s \text{ studente } \forall e \text{ esame}$
 $\text{Passa}(a, s, e)$

Negazione: $\exists a \text{ anno } \forall s \text{ studente } \exists e \text{ esame}$
 $\text{NOT Passa}(a, s, e)$

In almeno un anno tutti gli studenti hanno superato almeno un esame

Altro esempio $\exists a \text{ anno } \forall s \text{ studente } \forall e \text{ esame}$
 $\text{Passa}(a, s, e)$

Negazione: $\forall a \text{ anno } \exists s \text{ studente } \exists e \text{ esame}$
 $\text{NOT Passa}(a, s, e)$

In ogni anno c'è almeno uno studente che supera almeno un esame.

Esercizio Quantificare in tutti i modi possibili
 $\text{Passa}(a, e, s)$
 e negare

ANALISI 1 - LEZIONE 002

Titolo nota

25/09/2014

Tavole di verità Siano P e Q due proposizioni

$P \wedge Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	F
	F	F	F

$P \vee Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	V
	F	V	F

$P \Leftrightarrow Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	F
	F	F	V

$P \Rightarrow Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	V
	F	F	V

↑
se P è falsa non
mi aspetto nulla da Q

Esempio

$$3 > 0 \Leftrightarrow 7 > 0 \quad \text{Vera}$$

$$3 < 0 \Leftrightarrow 7 < 0 \quad \text{Vera}$$

$$3 > 0 \Rightarrow 7 > 0 \quad \text{Vera}$$

$$3 < 0 \Rightarrow 7 > 0 \quad \text{Vera}$$

$$\text{Itali ha vinto mondiale 2014} \Rightarrow 7 < 0 \quad \text{Vera}$$

$$\neg \Rightarrow 7 > 0 \quad \text{Vera}$$

$$\forall x \in \dots \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Quando P è vera, allora anche $Q(x)$ è vera

Quando P è falsa, allora non posso dedurre nulla

Tutte le volte che esco senza ombrello piove

Se esco senza piove, se esco con dipende

Quando è falsa una implicazione vuol dire che la premessa è VERA, ma la conclusione falsa
(sx del \Rightarrow)
(dx del \Rightarrow)

$$\forall x \in \dots \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Negazione: $\exists x \in \dots \quad \text{NOT} (P(x) \Rightarrow Q(x))$
 $\exists x \in \dots, \quad P(x) \text{ AND NOT } Q(x)$

Dimostrazione per assurdo: nego la $Q(x)$ e dimostro che non vale la $P(x)$

<u>Esempi</u>	$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$	Vera
	$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 > 9 \Rightarrow x > 2$	vera
	$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 < -9 \Rightarrow x > 3$	Vera
	$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 < -9 \Rightarrow x^2 < -2014$	Vera

— 0 — 0 —

INSIEMI Cos'è un insieme? BOH!

Come si presenta un insieme?

- per elenco $A = \{ 2, 7, \square, \text{☺} \}$

Oss: 1 - non conta l'ordine

2 - elementi ripetuti contano una volta sola

$A = \{ 2, 7, \square, 2, 2, \text{☺}, \square \}$ è lo stesso di prima

- per proprietà

$B = \{ \text{studenti in quest'aula} \}$

$= \{ s \in \text{Studenti} : \underbrace{s \text{ sta nell'aula}}_{P(s)} \}$

Esempio $Q = \{ m^2 : m \in \mathbb{N} \}$

- Fai la lista degli elementi di \mathbb{N}
- Fanne il quadrato
- Ottieni l'elenco degli elementi di Q

$Q = \{ m^2 : m \in \mathbb{Z} \}$ è lo stesso perché gli el. ripetuti non contano

$$Q = \{ m \in \mathbb{N} : \exists a \in \mathbb{N} \ m = a^2 \}$$

$$A = \{ x \in \dots : P(x) \text{ è vera} \}$$

$$B = \{ x \in \dots : Q(x) \text{ è vera} \}$$

$$\{ x \in \dots : P(x) \vee Q(x) \text{ è vera} \} = A \cup B$$

$$\{ x \in \dots : P(x) \wedge Q(x) \text{ è vera} \} = A \cap B$$

Notazioni insiemistiche

$$A \cap B, A \cup B, A \setminus B$$

$$a \in A \quad A \ni a$$

↑ elemento ↑ insieme

$$a \notin A \quad A \not\ni a$$

$$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$A \subset B$$

$$A \subset B \quad \text{DA NON USARE}$$

$$A \subsetneq B$$

$$\emptyset = \text{insieme vuoto}$$

$$\forall x \in \emptyset \quad x^2 < -10 \quad \text{VERA}$$

$$\forall x \quad x \in \emptyset \Rightarrow x^2 < -10$$

Prodotto cartesiano $A \times B = \{ (a,b) : a \in A, b \in B \}$

Insieme delle parti

$$\mathcal{P}(A) = \{ \text{sottoinsiemi di } A \} = \{ B : B \subseteq A \}$$

Esempi $A = \{ 2, 3, \square, z \}$

$2 \in A$	\checkmark	$2 \subseteq A$	F	$\{2\} \subseteq A$	\checkmark
$\emptyset \in A$	F	$\emptyset \subseteq A$	\checkmark	$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	

Quanti elementi ha $\mathcal{P}(A)$? 2^4 (per ogni elemento scelgo se metterlo o no)

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$	$\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$	\checkmark
	$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$	\checkmark
	$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	\checkmark
	$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$	\checkmark

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$$

↑
ha 1 el.

mi aspetto 2 elementi

In generale: se $A = \{ a \}$, allora
 $\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{ a \} \}$

Esercizio di burocrazia Scrivere gli elementi di

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))).$$

ANALISI 1

-

LEZIONE 003

Titolo nota

29/09/2014

FUNZIONI TRA INSIEMI

Cos'è una funzione?

Operativamente sono 3 cose:

- un insieme di partenza A
- un insieme di arrivo B
- una "legge" che ad ogni elemento $a \in A$ assegna un unico elemento $b \in B$. Questo b si indica con $f(a)$

La funzione si indica come

$$f: A \rightarrow B$$

Grafico di una funzione: è il sottoinsieme di $A \times B$ definito da

$$\text{Grafico}(f) := \{ (a,b) \in A \times B : b = f(a) \}$$

Definizione formale di funzione Dati due insiemi A e B , una funzione $f: A \rightarrow B$ è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ t.c.

$$\forall a \in A \exists ! b \in B \text{ [tale che]} (a,b) \in G$$

↑
fluidifica il discorso

Detto in altri termini, "una funzione è il suo grafico".

In questo setting, $f(a)$ è l'unico $b \in B$ t.c. $(a,b) \in G$.

- o - o -

Composizione di funzioni Data una $f: A \rightarrow B$ e data $g: B \rightarrow C$ si definisce la funzione composta $g \circ f: A \rightarrow C$ definita come

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

formalmente devono essere uguali

La funzione più interna è quella che si fa prima.

Esercizio di burocrazia Definire la composizione a partire dalla definizione formale

$$\begin{array}{ll} f: A \rightarrow B & G_f \subseteq A \times B \\ g: B \rightarrow C & G_g \subseteq B \times C \\ g \circ f: A \rightarrow C & G_{g \circ f} \subseteq A \times C \end{array}$$

$$G_{g \circ f} = \{(a, c) \in A \times C; \exists b \in B \text{ tale che } (a, b) \in G_f \wedge (b, c) \in G_g\}$$

Bisognerebbe ora dimostrare che $\forall a \in A \exists ! c \in C$ t.c. $(a, c) \in G_{g \circ f}$...

— o — o —

Si possono comporre anche più di 2 funzioni perché...

— o — o —

INIETTIVITÀ, SURGETTIVITÀ, BIGETTIVITÀ

Def. $f: A \rightarrow B$ si dice

- iniettiva se manda cose diverse in cose diverse, cioè

$$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

↷ equivalenti

$$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- surgettiva se tutto B è raggiunto dalla funzione, cioè

$$\forall b \in B \exists a \in A \quad f(a) = b$$

- bigettiva se è iniettiva + surgettiva.

Funzione inversa Data $f: A \rightarrow B$, si dice inversa di f una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che

$$\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \quad \leftarrow \text{inversa sinistra} \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B \quad \leftarrow \text{inversa destra} \end{array}$$

Teorema Sia data $f: A \rightarrow B$. Allora

• f è invertibile, cioè esiste l'inversa, se e solo se f è bigettiva.

Più precisamente

* esiste l'inversa sinistra se e solo se f è iniettiva

* esiste l'inversa destra se e solo se f è surgettiva.

Premessa: come si comportano iniettività e surg. con la composizione?

① Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva

[Dim.: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$]
 \uparrow \uparrow
 f inj. g inj.

② Se f e g sono surg., allora $g \circ f$ è surg.

[Dim.: $c \in C \Rightarrow \exists b \in B \quad g(b) = c \Rightarrow \exists a \in A \quad f(a) = b$
 \uparrow \uparrow
 g surg. f surg.
 Ma allora $g(f(a)) = g(b) = c$.]

③ Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva (la + inversa),
 ma non nec. g .

[Dim.: suppongo per assurdo f non iniettiva. Allora
 $\exists a_1 \in A \quad \exists a_2 \in A \quad \text{t.c.} \quad a_1 \neq a_2$, ma $f(a_1) = f(a_2)$.
 Ma allora $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, quindi $g \circ f$ non inj.,
 contro l'ipotesi]

④ Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva (la + esterna),
 ma non necessariamente f .

[Dim.: Sia $c \in C$. Allora $\exists a \in A$ t.c. $g(f(a)) = c$ (comp. surg.)
 Posto $b = f(a)$ ho che $b \in B$ e $g(b) = c$.
 Ho così trovato $b \in B$ t.c. $g(b) = c$.]

IMMAGINE e CONTROIMMAGINE Data $f: A \rightarrow B$

- per ogni $D \subseteq A$ si definisce l'immagine di D

$$\begin{aligned} f(D) &= \{ f(a) : a \in D \} \subseteq B \\ &= \{ b \in B : \exists a \in A \ b = f(a) \} \end{aligned}$$

- per ogni $E \subseteq B$ si definisce la controimmagine di E

$$f^{-1}(E) = \{ a \in A : f(a) \in E \}$$

Si definisce immagine di una funzione l'insieme $f(A)$

Achtung! Il simbolo f^{-1} si usa per almeno 3 casi diversi

- la funzione inversa (quando esiste)
- la controimmagine (che esiste sempre)
- la funzione $\frac{1}{f}$ (quando ha senso farlo)

Il contesto aiuta a distinguere.

ANALISI 1 - LEZIONE 004

Titolo nota

29/09/2014

PRINCIPIO DI INDUZIONESia $P(m)$ un predicato con parametro $m \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

(i) $P(0)$ è vera

← passo base

(ii) $\forall m \in \mathbb{N} [P(m) \text{ vera} \Rightarrow P(m+1) \text{ vera}]$

← passo induttivo

Allora $P(m)$ è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$ Variante: se sostituisco (i) con (i') $P(\mathbb{N})$ è vera, la tesi diventa $P(m)$ è vera $\forall m \geq \mathbb{N}$.

Interpretazione brutale: tessere del dominio che cadono in success.



Il passaggio induttivo è il meccanismo di caduta, il passo base la caduta della 0-esima tessera

Esempio 1

$$\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

" $0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + m^2$

Dim. esercizio

Esempio 2

$$\sum_{k=0}^m a^k \quad \text{con } a \text{ parametro}$$

" $1 + a + a^2 + \dots + a^m$

Formula

$$\sum_{k=0}^m a^k = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} \quad \text{se } a \neq 1$$

$$= m+1 \quad \text{se } a = 1$$

Dim. (nel caso $a \neq 1$)

Passo base $n=0$ diventa $1 = \frac{a-1}{a-1}$ ok.

Passo induttivo $n \Rightarrow n+1$

Ipotesi: $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ Tesi: $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. si fa una CATENA DI UGUAGLIANZE

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} \quad (\text{def. di sommatoria})$$

$$\begin{aligned} \text{ipotesi} \rightarrow &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1}-1 + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1} \quad (\text{Pecorso}) \end{aligned}$$

Primo = ultimo mi dà la tesi del passaggio induttivo,
— o — o —

Esempio 3 Det. per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $2^n \geq n^2$

↑ Risposta: $\forall n \in \mathbb{N}$
con $n \neq 3$

Esploro il problema:

$n=0$	$1 \geq 0$	ok
$n=1$	$2 \geq 1$	ok
$n=2$	$4 \geq 4$	ok
$n=3$	$8 \geq 9$	☹
$n=4$	$16 \geq 16$	ok
$n=5$	$32 \geq 25$	ok

più vado avanti, più diventa abbondante

Provo a dim. per induzione che $2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4$

Dim. **Passo base** $n=4$ ok

P.I. Ipotesi: $2^n \geq n^2$ Tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Dim. CATENA DI DISUGUAGLIANZE

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$$

\uparrow percorso \uparrow Hp. inductiva
 mult. per 2 \uparrow spero

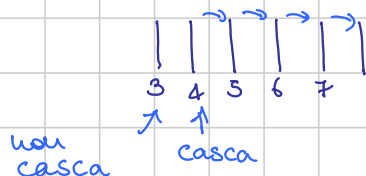
Se la speranza è vera, ho finito il passo induttivo.
 Controllo la speranza:

$$2n^2 \stackrel{?}{\geq} (n+1)^2$$

$$\begin{aligned}
 2n^2 \stackrel{?}{\geq} n^2 + 2n + 1 &\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (n-1)^2 - 2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow n-1 \geq 2 \\
 &\Leftrightarrow n \geq 3
 \end{aligned}$$

Quindi: la speranza è vera per ogni $n \geq 3$, quindi il passo induttivo è ok per ogni $n \geq 3$ e questo basta.

Oss. Il meccanismo di caduta funziona da 3 in poi

Esempio 4 DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim. Passo base $n=0$ OK $(1 \geq 1)$

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. $(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m$

uso Hp
indutt.

$\rightarrow \geq (1+x)(1+mx)$

$= 1+mx+x+mx^2 = 1+(m+1)x + \overset{\geq 0}{mx^2}$
 $\geq 1+(m+1)x$

Ho usato Hp induttiva moltiplicata per (1+x) senza cambiare il verso: questo è ok se (1+x) > 0, cioè se x > -1.

La dim. fatta funziona solo per x > -1

Vera Bernoulli:

$\forall x > -1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (1+x)^m \geq 1+mx$

↑
reale

Esempio 5 Per quali $m \in \mathbb{N}$ si ha che $m! \geq 2^m$

- Esplorazione:
- $0! \geq 2^0$ ok
 - $1! \geq 2^1$ no
 - $2! \geq 2^2$ no
 - $3! \geq 2^3$ no
 - $4! \geq 2^4$ si
 - $5! \geq 2^5$ abbondante

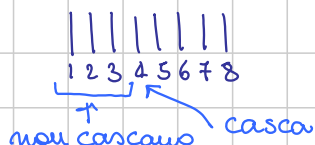
Congettura: vero per ogni $n \geq 4$

Dim. arriviamo al passaggio induttivo ...

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1) \cdot 2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

↑ def. di fatt. ↑ Hp. indutt. moltiplicata per (n+1) che è > 0 ↑ spero ok per n ≥ 1

Che de tessere



il meccanismo è OK $\forall n \geq 1$

Esempio 6 Tutti gli studenti prendono lo stesso voto all' esame.

$P(n)$ = "dato un gruppo di n studenti, i suoi componenti prendono lo stesso voto all' esame"

Dim. Passo base $n=1$ è banale

Passo induttivo Hp: vale per gruppi da n
Th: vale per gruppi da $n+1$

Dim. prendo un gruppo da $n+1$



Per sovrapposizione, tutti sono costretti ad avere lo stesso voto.

Esercizio: cosa non va in questa dimostrazione?

ANALISI 1 - LEZIONE 005

Titolo nota

30/09/2014

Iniettività, surgettività, grafici ed equazioni

Funzione $f: A \rightarrow B$. Dato $b \in B$, voglio risolvere l'equas.

$$f(x) = b \quad \text{cerco gli } x \in A \text{ t.c. } f(x) = b$$

(le sol. sarebbero $f^{-1}(\{b\})$)

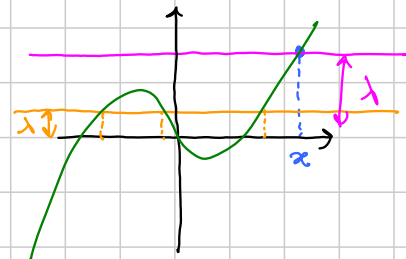
- Fatti**
- ① Se f è *smg.*, allora per ogni $b \in B$ c'è **ALMENO** una sol.
 - ② " f è *iniettiva*, " " " " " **AL MASSIMO** " "

(si dimostra per assurdo)

 - ③ Se f è *bigettiva*, allora $\forall b \in B$ esiste **UNICA** soluzione,
e sarebbe $x = f^{-1}(b)$
- ↑ funzione inversa calcolata in b
(è la definizione di inversa)

Sia ora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Come interpreto *iniett.* e *smg.* sul grafico?

Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire
intersecare il grafico con la retta $y = \lambda$
e prendere le x dei p.ti di intersec.



Quindi

- ① f è *smg.* se il grafico interseca
tutte le rette // all'asse x in almeno un p.to (uno o +)
- ② ... *iniettiva* ... tutte le // in al massimo un p.to (0 o 1)

Se in partenza e/o arrivo ho sottoinsiemi di \mathbb{R} , il discorso va
adattato. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ NO *inj.* NO *smg.*

$$f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

NO *inj.*

SI *smg.*

penso solo alle eq.
 $f(x) = b$ con $b \geq 0$.



Come si interpretano immagine e controimmagine sul grafico?

$f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Calcolare $f([-2, 1])$ e $f^{-1}([-2, 1])$
 $[0, 4]$ $[-1, 1]$
 IMMAGINE CONTROIMMAG.

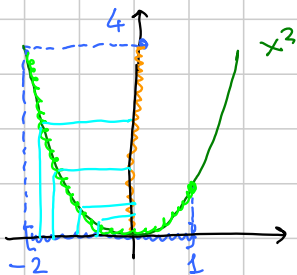
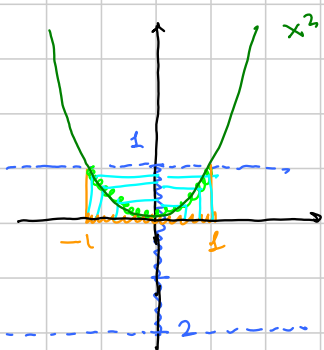


Immagine:
 Punto sull'asse $x \rightsquigarrow$ grafico \rightsquigarrow asse y



Controimmagine
 Punto asse $y \rightsquigarrow$ grafico \rightsquigarrow asse x

— o — o —

E se fosse $f(x) = ||x^2 - 3| - 2|$ le cose in apparenza si complicano...

Operazioni sui grafici

$f(x) \rightsquigarrow f(x) + c$
 Traslazione verticale
 (su se c positivo)

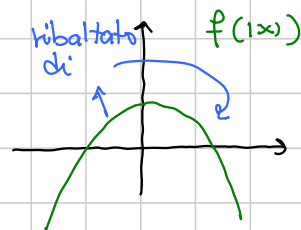
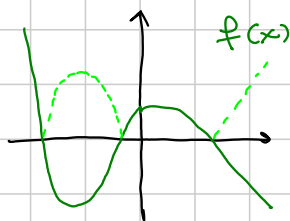
$f(x) \rightsquigarrow f(x+c)$
 Trasl. orizz.
 (sx se c positivo)

$f(x) \rightsquigarrow -f(x)$
 Simm. asse x

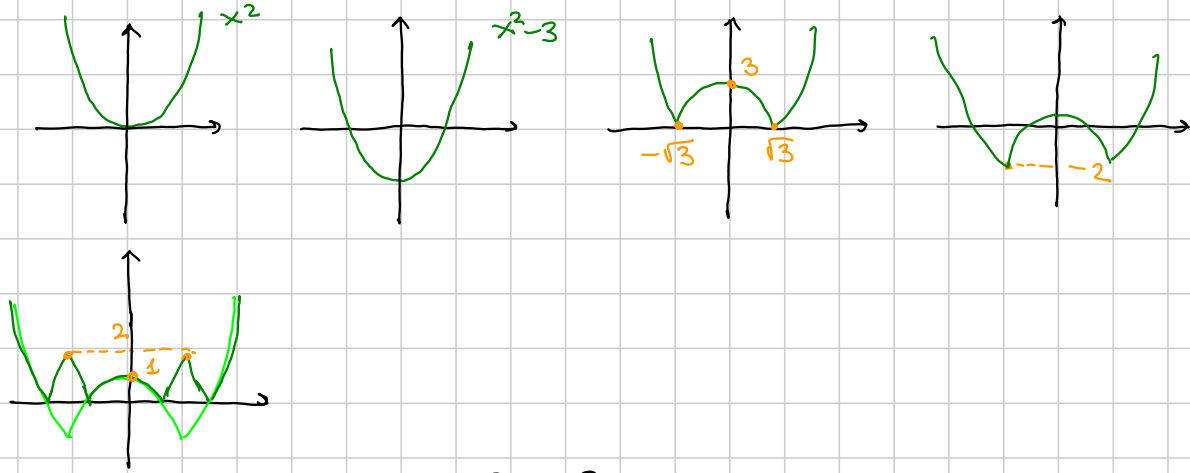
$f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$
 Ribalto in su le
 parti negative

$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$
 per $x \geq 0$ non cambia
 nulla, per $x < 0$
 ribalto gli $x \geq 0$

$f(x) \rightsquigarrow cf(x)$
 Omotetia verticale
 (con ribaltam. se $c < 0$)



$$f(x) = ||x^2 - 3| - 2|$$



Proprietà di simmetria Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice
 o anche un sottosinsieme

- PARI se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (grafico simm. wrt asse x)
- DISPARI se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (grafico simm. wrt
 [teorema: allora $f(0) = 0$] with respect to
origine)
- PERIODICA se $\exists T > 0$ t.c. $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Più form.

$$\exists \underbrace{T}_{\uparrow \text{un periodo di } f} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

Oss. Il periodo NON è unico (almeno tutti i multipli di T sono pure periodi).

Il più piccolo $T > 0$ che va bene (SE ESISTE) si dice minimo periodo.

Esercizio (Hard) È vero che esiste sempre un minimo periodo se f non è costante?

Esercizio (non provate a farlo) È vero che $\exists f$ e g periodiche t.c.
 $f(x) + g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

Proprietà di MONOTONIASia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

↑ anche sottoinsieme.

Allora si dice

- **STRETT. CRESC.** se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$$

- **DEBOLM. CRESCENTE** se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

In maniera analoga si definiscono strett. / deb. decr.

$$y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$$

$$y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

Esercizio f str. decr. g str. decr.

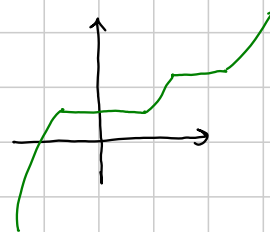
$\Rightarrow f \circ g$ str. cresc.

$$[\text{Dim. } y > x \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ decr.}}}{g(y)} < \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ decr.}}}{f(g(y))} > f(g(x))]$$

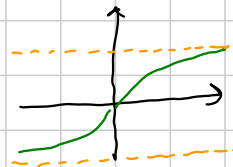
Fare la stessa cosa mettendo cresc. / decr. nei vari modi possibili

Oss. ① Se voglio una debolm. cresc. che non sia strett. cresc. servono dei tratti piatti (costanti)

- ② Le funzioni strett. monotone (str. cresc. o decr.) sono PER FORZA INIETTIVE



- ③ La monotonia c'entra poco con la cong.



ANALISI 1 - LEZIONE 006

Titolo nota

02/10/2014

INSIEMI NUMERICI $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Naturali

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

Interi (relativi) ZAHLEN

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Razionali (quozienti)

 \mathbb{R}

Reali

$$\mathbb{C} = \{a+bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Complessi

- o - o -

Numeri reali : sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che soddisfa tre tipi di assiomi

→ assiomi ALGEBRICI

→ assiomi di ORDINAMENTO

→ assioma di CONTINUITÀ

ASSIOMI ALGEBRICI $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un CAMPO, cioè un insieme su cui sono definite due operazioni $+$ e \cdot con le solite proprietà

ASSIOMI DI ORDINAMENTO \geq è una relazione d'ordine totale su \mathbb{R} , cioè

$$(Ord 1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \vee x \leq y$$

TOTALE

$$(Ord 2) \quad x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

RIFLESSIVA

$$(Ord 3) \quad \text{se } x \leq y \text{ e } y \leq z, \text{ allora } x \leq z$$

TRANSITIVA

$$(Ord 4) \quad \text{se } x \leq y \text{ e } y \leq x, \text{ allora } x = y$$

ANTISIMMETRICA

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ è un campo ordinato nel senso che l'ordine e le proprietà algebriche verificano due assiomi:

$$(O-A-1) \quad \text{se } x \geq y, \text{ allora } x+z \geq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$(O-A-2) \quad \text{se } x \geq y \text{ e } z \geq 0, \text{ allora } x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Oss. Finora nulla distingue \mathbb{R} da \mathbb{Q} .

ASSIOMA DI CONTINUITA'

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti. Si dice che A sta a sinistra di B se

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$



Assioma di cont.

Per ogni coppia di sottoinsiemi A e B con A che sta a sinistra di B , esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b$$

← il c è lo stesso e va bene per ogni a e b

Oss. Il separatore c può essere unico o no a seconda dei casi

Oss. Assioma di continuità in soli simboli

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \forall B \subseteq \mathbb{R} \quad [\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b] \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \\ \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad (\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b)$$

TEOREMA MISTERIOSO

Esiste un'unica quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che verifica gli assiomi algebrici, di ordin. e di continuità.

Oss. Cosa vuol dire unicità? Se c'è un'altra struttura $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes, \geq)$ con le stesse proprietà, allora esiste una funzione INVERTIBILE $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che commuta con la struttura algebrica e d'ordin., cioè

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \quad f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Esercizio (Hard) Dimostrare l'unicità

Tante cose vere non sono scritte negli assiomi...

$$a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1$$

$$1 \geq 0$$

} Anche loro te li dimostreremo
(esercizi!)

Cosa che si usa e non è scritta (ma si deduce):

(O-A-2') Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ Oss. Se risolvo $3x - 5 \geq 2$ uso solo gli assiomi

$$3x - 5 + 5 \geq 2 + 5$$

$$3x \geq 7$$

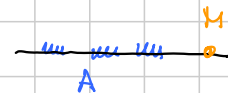
$$x \geq \frac{7}{3}$$

$$\text{---} \quad 0 \quad \text{---} \quad 0 \quad \text{---}$$

(esist. opposto + O-A-1)

Molt. per $\frac{1}{3}$ e uso (O-A-2)↑ siamo sicuri che è ≥ 0 ?Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuotoDef. (Maggioranti e minoranti) Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M$$

Si dice che $k \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \geq k$$

Def. (Insiemi limitati) Si dice che A è

- limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante
- limitato inferiormente " " " " minorante
- limitato se è limitato sup. e inf.

Oss. I maggioranti non sono obbligati ad esistere, e quando esistono non sono mai unici

Def. (Massimo e minimo) Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A , e si scrive

$$M = \max A$$

se

$$(i) M \geq a \quad \forall a \in A \quad (\text{cioè } M \text{ è un maggiorante})$$

$$(ii) M \in A.$$

Analogamente $m = \min A$ se

$$(i) m \leq a \quad \forall a \in A$$

$$(ii) m \in A$$

Oss. Max e min non sono obbligati ad esistere, nemmeno se A è limitato, ma se esistono sono unici.

[Dim. se fosse $M_1 = \max A$, $M_2 = \max A$, allora

$$\left. \begin{array}{l} M_1 \geq M_2 \quad (\text{pensando } M_1 \text{ come max}) \\ M_2 \geq M_1 \quad (\text{pensando } M_2 \text{ come max}) \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = M_2 \quad]$$

Oss. Due definizioni analoghe di insieme limitato

$$\exists k \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad k \leq a \leq M$$

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad |a| \leq M.$$

capire che sono la stessa cosa

ANALISI 1 — LEZIONE 007

Titolo nota

02/10/2014

ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

- Def. • Si dice che $\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiormente.
- Si dice che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se A è limitato superiormente e L è il minimo dei maggioranti di A .
 - Si dice che $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente.
 - Si dice che $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se A è lim. inf. e l è il massimo dei minoranti.

Per poter dare la definizione, serve accertarsi che il min. dei magg. (ed il max. dei minoranti) esistano.

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Supponiamo che A sia limitato superiormente (\exists maggiorante). Allora l'insieme dei maggioranti ammette minimo.

Dim. Sia B l'insieme dei maggioranti.

Per ipotesi $B \neq \emptyset$.

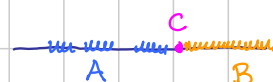
Per def. di maggioranti B sta a dx di A .

Per l'assioma di continuità esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che

(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante, cioè $c \in B$)

(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo di tutti gli el. di B)

Quindi (i) + (ii) $\Rightarrow c = \min B$. \square



Conseguenza Grazie all'assioma di continuità, tutti i sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ hanno inf e sup (eventualmente $\pm \infty$).

- Oss.
- ① Inf e sup esistono per forza
 - ② Sono unici (sono min / max dei magg. / min.)
 - ③ Se $M = \max A$ esiste, allora M è anche sup.
Idem per inf e min.
 - ④ Se $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\sup A \in A$, allora è anche max.

Oss. burocratica (Inf e sup di \emptyset)

Sicuramente tutti i numeri reali sono magg. e minor. di \emptyset
Ci sono 2 possibili politiche

- dire che sup e inf non hanno senso se $A = \emptyset$ (buona idea, ma costringe tutte le volte che scrivo sup / inf a controllare)
- dire che $\sup \emptyset =$ "minimo dei maggioranti" $= -\infty$
 $\inf \emptyset = \dots = +\infty$
(ma così $\sup < \inf$, il che è bruttissimo).

CARATTERIZZAZIONE DI INF E SUP

- ① Si ha che $\sup A = +\infty$ se



$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{tale che} \quad a \geq M$$

↑ D'insieme A sceglie a dopo aver visto M

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leq M$$

A è limitato

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad a > M$$

negazione

- ② Si ha che $\inf A = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \leq M$$

- ③ Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

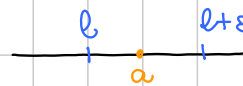
(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (questo dice che L è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad L - \varepsilon \leq a$

(che è come dire che $L - \varepsilon$ non va bene come maggiorante)



- ④ Si ha che $\sup A = l \in \mathbb{R}$ se
 (i) $l \leq a \quad \forall a \in A$
 (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.c. $a \leq l + \varepsilon$.



Oss. Cosa vuol dire $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \ a \geq M$? $\sup A = +\infty$
 " " " $\exists a \in A \ \forall M \in \mathbb{R} \ a \geq M$?

ASSURDITÀ: a dovrebbe essere più grande di ogni M .

Esercizio (teorema) $\sup \mathbb{N} = +\infty$

[Dim.: sappiamo che $\sup \mathbb{N}$ esiste. Se non è $+\infty$, sarà un certo $L \in \mathbb{R}$.

Uso la caratterizzazione con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (o qualunque cosa < 1)
 Allora esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $m_0 \geq L - \frac{1}{2}$



Ma allora $m_0 + 1 \geq L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2} > L$
 ↑
 (uso O-A-1)

Quindi ho trovato un elemento di \mathbb{N} , cioè $m_0 + 1$, che è $> L$, contro l'ipotesi che L sia un maggiorante.]

Oss. Diciamo per buono che $1 > 0$. Allora $2 > 1$ (O-A-1).
 Ma allora $1 > \frac{1}{2}$ (ho moltiplicato per l'inverso di 2).

Esercizio Siano A e B non vuoti e limitati superiormente.

$\sup (A \cup B) = \max \{ \sup A, \sup B \}$ (ma esisterà?)

$\sup (A \cap B) \leq \min \{ \sup A, \sup B \}$

già potrebbe essere il \emptyset ← ma può essere minore stretto.

[Dimostrare!]

Lemma (sotto-esercizio) Se B è un insieme finito, allora
max e min esistono.

[Dim. per induzione sul numero di elementi]

Esercizio \sup (unione qualunque) = \sup dei \sup .
(il max potrebbe
non esistere)

— o — o —

ANALISI 1

-

LEZIONE 008

Titolo nota

06/10/2014

PRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

POTENZE $f(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Il comp. dipende dalla parità dell'esponente.

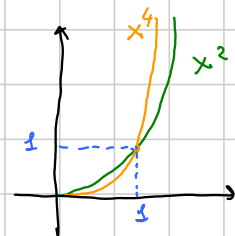
Teorema (poco misterioso) Per n pari la funzione $f(x) = x^n$, vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva.

Di conseguenza, f è invertibile e l'inversa

$$g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

ed è detta radice n -esima

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$



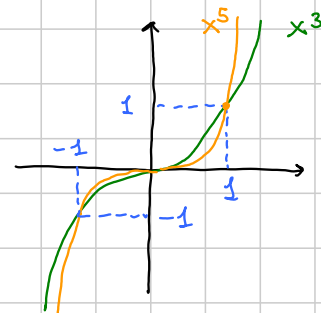
Oss. INPUT: reali ≥ 0 OUTPUT: reali ≥ 0
quindi $\sqrt[4]{16} = 2$ (e non ± 2 o simili)

Teorema (poco misterioso) Per n dispari la funzione $f(x) = x^n$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è strett. cresc., iniettiva, surgettiva, dispari.

Di conseguenza è invertibile e l'inversa

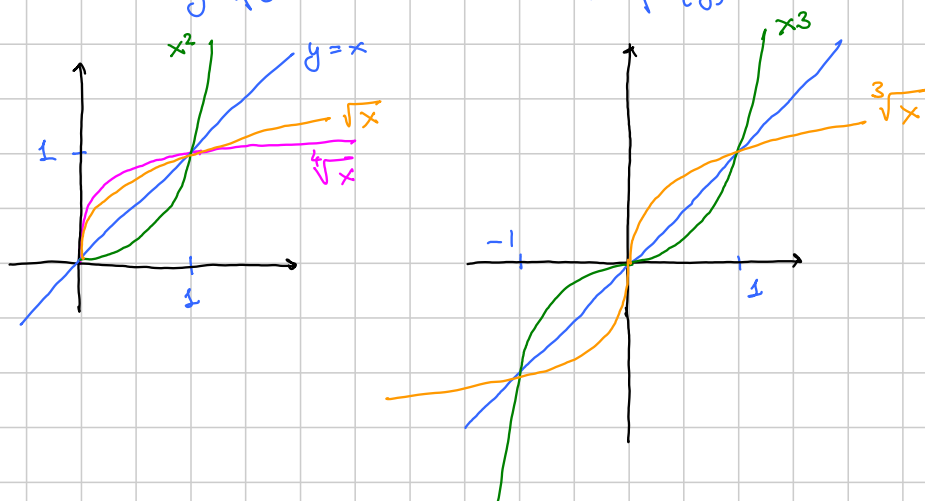
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la radice n -esima

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$



Oss. INPUT: x reale qualunque, OUTPUT: reali qualunque, dello stesso segno di x

FATTO GENERALE Per funzioni reali, il grafico dell'inversa è il simmetrico del grafico della funzione wrt a $y=x$, cioè se $(x,y) \in G_f$, allora $(y,x) \in G_{f^{-1}}$



Oss. sul mistero dei koreani

① La def. di x^n segue per induzione dagli assiomi di \mathbb{R}
 $x^{n+1} = x^n \cdot x$

② La stretta crescita di x^n per $x \geq 0$ si dimostra volendo per induzione. Al passo induttivo, preso $y > x$ ho $y^m > x^m$ per ipotesi induttiva, quindi voglio dedurre $y^{m+1} > x^{m+1}$

$$y^{m+1} = y \cdot y^m > y \cdot x^m \geq x \cdot x^m = x^{m+1}$$

\uparrow Def. \uparrow Hp. y \uparrow y > x vol. per x^m \uparrow Def.

③ L'ineffettività segue dalla stretta crescita.

④ La surgettività è un PROBLEMA. Vuol dire mostrare che l'equazione $x^n = \lambda$ ha soluzione per ogni $\lambda \geq 0$ e ogni $n \geq 1$.

[Idea: bisogna usare l'assioma di continuità. Definisco

$$A = \{x \geq 0 : x^n < \lambda\} \quad B = \{x \geq 0 : x^n > \lambda\}$$

Dimostro che $A \neq \emptyset$, dimostro che $B \neq \emptyset$, dimostro che A è a sx di B, dimostro che un qualunque sep c verifica $c^n = \lambda$]

\uparrow delicato

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

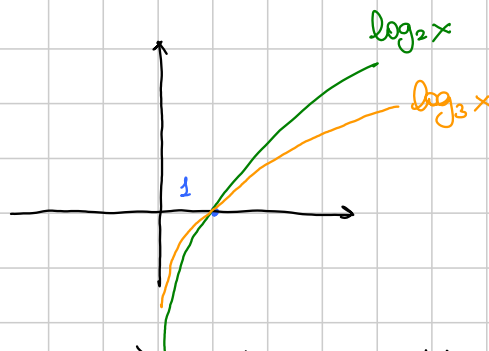
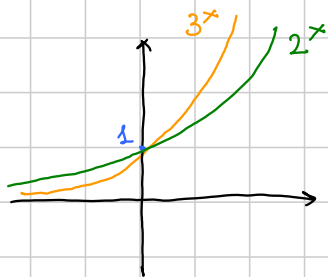


ESPONENZIALI $f(x) = a^x$ con a parametro

Oss. Potenze: x alla base Esponeuziali: x all'esponente

Fatti. Per ogni $a > 1$ la funzione $f(x) = a^x$ vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva, surgettiva.
L'inversa $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta log in base a di x

$g(x) = \log_a x$
è pure strett. cresc.



Per ogni $a \in (0, 1)$ la situazione è analoga scambiando crescente con decrescente.



Proprietà precorsistiche:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$

Teorema misterioso (definizione di esponenziale)

Per ogni $a > 0$ esiste un'unica funzione $f_a: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ che verifica le seguenti proprietà:

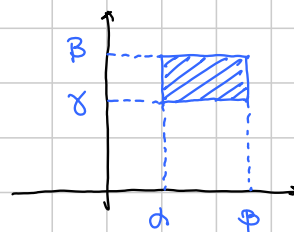
- (i) $f_a(1) = a$
 (ii) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$
 (iii) esiste un rettangolo in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ che non contiene punti del grafico, cioè esistono $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ e $[\gamma, \delta] \subseteq (0, +\infty)$ tale che il grafico di f_a non incontra $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$

basterebbero a definire univocamente $f_a: \mathbb{Q} \rightarrow (0, +\infty)$

Secondo teorema misterioso L'unica

funzione che verifica (i) - (ii) - (iii) è

- nel caso $a = 1$ è la costante 1
- nei casi $a > 1$ e $a \in (0, 1)$ ha le proprietà di monotonia, iniettiva e surgettività enunciate precedentemente. Il problema grosso è sempre la surgettività!



Oss. L'esistenza di una funzione che verifica (i) - (ii) - (iii) si può fare a tappe

- ① si definisce per $x \in \mathbb{N}$
- ② " " " $x \in \mathbb{Z}$
- ③ " " " $x \in \mathbb{Q}$
- ④ Si estende a ogni $x \in \mathbb{R}$ ponendo per $a > 1$

$$f_a(x) = \sup \{ f_a(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q < x \}$$

e questa è già la parte dura.

ANALISI 1

LEZIONE 009

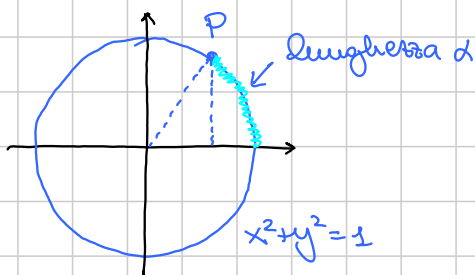
Titolo nota

06/10/2014

Oss. Definite gli esponenziali, sono definite anche le funzioni $f(x) = x^\alpha$ con esponente $\alpha \in \mathbb{R}$. Queste funzioni, tranne casi particolari, sono definite solo per $x > 0$.
 Per α positivo, le proprietà sono le stesse delle x^n precedenti

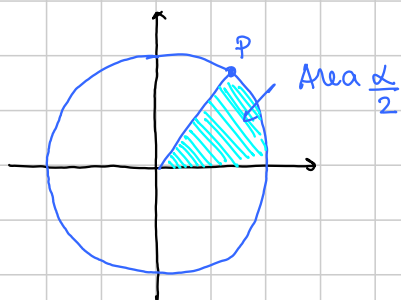


FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



concetto "losco"

Se l'arco ha lunghezza α , allora le coordinate di P sono $(\cos \alpha, \sin \alpha)$



"losco"

Se il settore ha area $\frac{\alpha}{2}$, allora $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

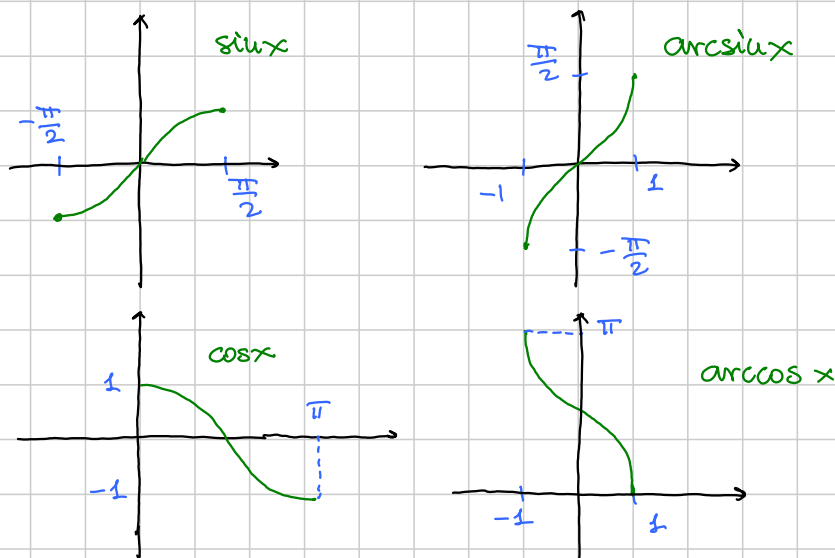
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Fatti $\sin x$ La funzione $f(x) = \sin x$, vista come

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ è strett. cresc. e invertibile. L'inversa è

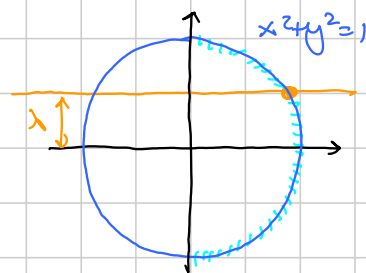
$g: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è detta $g(x) = \arcsin x$

cos x La funzione $f(x) = \cos x$, vista come $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è strett. decrescente e invertibile. L'inversa è
 $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $g(x) = \arccos x$



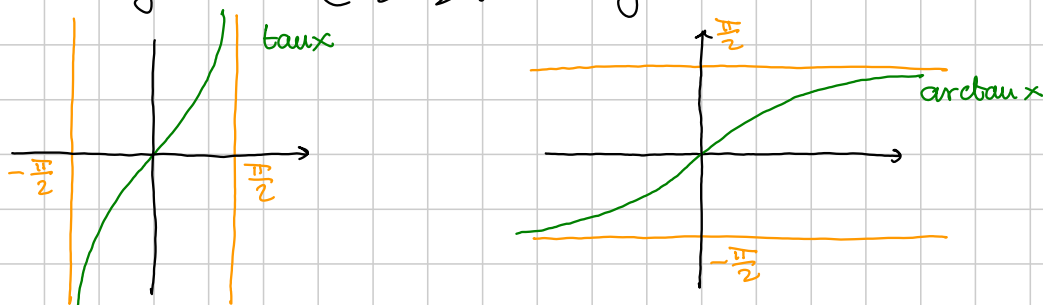
Interpretazione nella circ. trigonometrica.

Se voglio calcolare $\arcsin \lambda$, allora interseco con la retta $y = \lambda$ e prendo l'intersezione in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
 La lungh. dell'arco corrisp. è $\arcsin \lambda$.



Per $\arccos \lambda$, stessa cosa con la retta $x = \lambda$ prendendo l'intersezione "sopra"

tan x Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è strett. cresc. e invertibile. L'inversa è
 $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $g(x) = \arctan x$



Esercizio Mostrane che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

Dim.: Sia $\alpha = \arctan x$, quindi $x = \tan \alpha$. Ma allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}, \text{ quindi } \frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan \frac{1}{x}$$

$$\text{Ma allora } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Analogamente,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$$

Dimostrare \rightarrow sia usando la disparità
 \rightarrow sia usando il percorso

Domanda: dove ho usato sopra che fosse $x > 0$??

Esercizio

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Dim.: $\arcsin x = \alpha$, quindi $x = \sin \alpha$. Ora

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} \sin \alpha = x, \text{ quindi } \frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x$$

$$\text{Sommando: } \arcsin x + \arccos x = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Esercizio

$$\arcsin(\sin 1) = 1$$

$$\arccos(\cos 1) = 1$$

$$\arcsin(\sin 2) =$$

$$\arccos(\cos 2) = 2$$

$$\arcsin(\sin 3) =$$

$$\arccos(\cos 3) = 3$$

$$\arcsin(\sin 4) =$$

$$\arccos(\cos 4) =$$

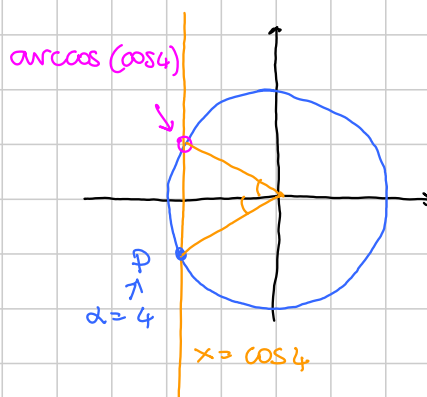
Achtung! Se g è l'inversa di f , allora
 $g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

quindi $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

Quanto fa $\arccos(\cos 4)$?

Quindi $\arccos(\cos 4) = 2\pi - 4$

Allo stesso modo si sistemano
 quelli con $\sin x$ e $\arcsin x$.



Esercizio (equazioni)

$$2^{3x+4} = 2^{4x+3}$$

SI

$$\log_2(3x+4) = \log_2(4x+3)$$

NI

$$\sin(3x+4) = \sin(4x+3)$$

NO

$$\leadsto 3x+4 = 4x+3 \quad \leadsto x = 1$$

Questione di inequazioni: SI nel 1° caso, SI nel 2° caso ma
 devo imporre di essere dove \log_2 è definita, quindi imporre
 $3x+4 > 0$, NO nel terzo.

Diseguazioni

$$2^{x+3} > 2^{3x+1}$$

SI

$$\log_3(x+3) > \log_3(3x+1)$$

NI

$$x+3 > 3x+1$$

$$\sin(x+3) > \sin(3x+1)$$

NO

Il passaggio $f(A) > f(B) \Rightarrow A > B$
è OK se f è crescente (strett. o debolmente?)

$f(A) \geq f(B) \Rightarrow A \geq B$
è OK se f è strett. cresc.

$$f(A) > f(B) \Rightarrow A < B$$

$$f(A) \geq f(B) \Rightarrow A \leq B$$

sono OK con decrescenza opportuna, sempre se siamo
all'interno degli insiemi di definizione.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 010

Titolo nota

07/10/2014

Def. Sia $P(m)$ un predicato che riguarda $m \in \mathbb{N}$. Si dice che

- $P(m)$ vale **DEFINITIVAMENTE**

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad P(m) \text{ è vero } \forall m \geq m_0$$

- $P(m)$ vale **FREQUENTEMENTE** se vale per infiniti indici n , o equivalentemente

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists n \geq m \text{ t.c. } P(m) \text{ è vero}$$

Def. Una successione di numeri reali è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Notazione Di solito una succ. si indica con x_n, a_n, y_n invece di $f(n), a(n)$

Def. elastica di successione Si accettano come succ. anche quelle "funzioni" che non sono def. per ogni $m \in \mathbb{N}$, ma solo definitivamente, cioè sempre tranne un numero finito di casi.

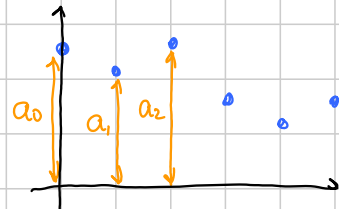
Esempi : $a_n = \frac{1}{n-3}$
 ↳ ok per $n \geq 4$

$b_n = \sqrt{n-2014}$
 ↳ ok per $n \geq 2014$

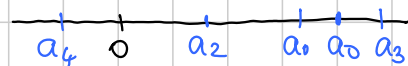
$c_n = \sqrt{2014^{2014} - n}$
 ↳ NON è una successione perché va male frequentemente

Come visualizzare una succ. Sia a_n una succ.

- ① Nel piano cartesiano considero i p.ti di coord. (n, a_n)
 Sostanzialmente è il grafico.



- ② Disegno su una retta i p.ti di ascissa a_n



③ Penso alla retta e penso allo scorrere del tempo e al secondo n si accende una lampadina in a_n e sta accesa un secondo
 — o — o —

Limite di una succ. = comportamento della succ. per n grandi

I possibili tipi di comportamento sono 4.

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ $a_n \rightarrow l$
 " a_n tende ad l "

"il limite per n che va all'infinito di a_n è l "

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ $a_n \rightarrow +\infty$

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ $a_n \rightarrow -\infty$

④ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ NON ESISTE a_n È INDETERMINATA
 a_n NON HA LIMITE

Def. di ④ Nessuno dei precedenti

Def. di ② Si dice che $a_n \rightarrow +\infty$ se
 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grandi)

si ha che $a_n \geq M$ definitivamente

(più M è grande, più il definitivamente inizia dopo)



$$\forall M \in \mathbb{R} \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 \quad a_n \geq M$$

↑ dipende da M

Stessa cosa detta in maniera barocca: $a_n \rightarrow +\infty$ se $\exists g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$
 tale che

$$a_n \geq M \quad \forall n \geq g(M)$$

↑ sarebbe il no corrispond. ad M .

Def. di 3 Si dice che $a_n \rightarrow -\infty$ se



$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq M$$

\uparrow
 molto negativi
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
 $a_n \leq M$ definitivamente

Def. di 4 Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se



$\forall \epsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$$l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon \quad \text{definitivamente}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 anche strette
 sarebbe lo stesso

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \underbrace{l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon}_{|a_n - l| \leq \epsilon \text{ (precorso)}}$$

distanza di a_n da l

Due varianti di 4 $a_n \rightarrow l^+$

... da dx

$a_n \rightarrow l^-$

... da sx

4+ Si dice che $a_n \rightarrow l^+$ se $\forall \epsilon > 0$ $l < a_n \leq l + \epsilon$ defiu.

\uparrow
STRETTO

4- Si dice che $a_n \rightarrow l^-$ se $\forall \epsilon > 0$ $l - \epsilon \leq a_n < l$ defiu.

— o — o —

Oss. Se $a_n \rightarrow l^+$ oppure $a_n \rightarrow l^-$, allora $a_n \neq l$ definitiv.

— o — o —

Esempi intuitivi

① $n^2 \rightarrow +\infty$

② $527 - n^3 \rightarrow -\infty$

③ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ anzi $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$

④ $(-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots$
non ha limite

⑤ $(-1)^n n = 0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$
non ha limite.

Leggende metropolitane

① Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora $a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente

FALSO: 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, ... "Penelope"

② Se $a_n \rightarrow l$, allora $a_n \rightarrow l^+$ oppure $a_n \rightarrow l^-$

FALSO: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ $\frac{(-1)^n}{n}$

③ Se $a_n \rightarrow 0^+$, allora $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

FALSO: $\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ $\frac{1}{\text{Penelope}}$
 — o — o —

Teorema Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora a_n è limitata, cioè esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ tali che $A \leq a_n \leq B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dim.: Idea: definitiv. sta tra $l-\epsilon$ e $l+\epsilon$, i termini precedenti sono un numero finito.

Uso la def. di limite con $\epsilon = 3\epsilon$. Allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
 $l - 3\epsilon \leq a_n \leq l + 3\epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Ora basta porre

$$B = \max \{ a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, \overbrace{l+3\epsilon}^{\text{numero finito}} \}$$

$$A = \min \{ a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, l-3\epsilon \}.$$

Con questi valori si ha la tesi. \square

LM ④ Se una successione è limitata, allora ha limite reale.

FALSO: $(-1)^n$,

ANALISI 1

LEZIONE 011

Titolo nota

07/10/2014

Esempio 1 $n^2 \rightarrow +\infty$

[Dim.: devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n^2 \geq M \quad \forall n \geq n_0$,
cioè devo risolvere $n^2 \geq M$

- Se $M \leq 0$, posso scegliere $n_0 = 0$
- Se $M > 0$ devo avere $n \geq \sqrt{M}$, quindi basta che scelga un intero n_0 t.c. $n_0 \geq \sqrt{M}$.

Questo esiste perché abbiamo dim a suo tempo che $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Esempio 2 $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
 \uparrow
 banale

Devo risolvere $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \dots$ percorso $\dots \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Quindi basta scegliere $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Esempio 3 $(-1)^n$ NON ha limite.

Di certo non tende a $+\infty$ (per farlo dovrebbe superare 2014)

" " " " $-\infty$ (" " " " -25)

Non tende a numeri $\neq \pm 1$ perché definitivamente dovrebbe stare in un intervallo che evita ± 1



Non tende a 1 perché definitivamente dovrebbe stare tra 0 e 2 ($\varepsilon = 1$), ma frequentemente non ci sta

Non tende a -1 per lo stesso motivo.

— o — o —

Teorema (Permanenza del segno) Supponiamo che $a_n \rightarrow +\infty$
oppure $a_n \rightarrow l > 0$.
Allora $a_n > 0$ definitivamente.

Dim.: Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora uso la def. con $M = 14$
Definitiv. $a_n \geq M = 14 > 0$, quindi $a_n > 0$.

Se invece $a_n \rightarrow l > 0$, allora uso la def.
con $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Definitivamente

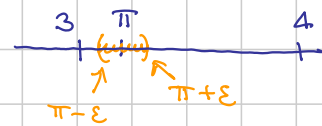


$$a_n \geq l - \varepsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0$$

Esercizio Enunciare e dim. con segno negativo

Variante Se $a_n \rightarrow \pi$, allora $3 < a_n < 4$ definitivamente

Scego $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che



$3 < \pi - \varepsilon < \pi + \varepsilon < 4$. Allora definitiv.

$\pi - \varepsilon \leq a_n \leq \pi + \varepsilon$ e quindi $3 < a_n < 4$.

Ad esempio va bene $\varepsilon = \frac{\pi - 3}{2}$.

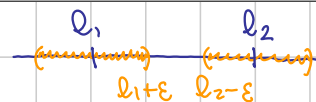
Teorema (Unicità del limite) Una successione ha uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④. Inoltre, se è di tipo ①, allora esiste un unico $l \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \rightarrow l$.

Dim. Ci sarebbero tanti casi da fare. Facciamone uno; escludiamo che possa essere $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e $a_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_1 \neq l_2$.

Supponiamo per assurdo che accada.

wlog (WITHOUT LOSS OF GENERALITY) $l_1 < l_2$.

Sceggo $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{3}$ in modo che



$l_2 - \varepsilon > l_1 + \varepsilon$ (verificare che accade).

Allora per def. di limite si dovrebbe avere che

$l_1 - \varepsilon \leq a_n \leq l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente
 ma allora si avrebbe $a_n < a_n$, il che è assurdo. \square

Teorema (confronto a 2) Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente.

Allora

- se $a_n \rightarrow +\infty$, anche $b_n \rightarrow +\infty$
- se $b_n \rightarrow -\infty$, anche $a_n \rightarrow -\infty$

[Dim. della 1^a: $\forall M$ $a_n \geq M$ definitiv., ma allora pure $b_n \geq M$...]

Achtung! Ogni altra deduzione è ABUSIVA.

Teorema (confronto a 3) (Carabinieri) Supponiamo che

$a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ } stesso l REALE

Allora anche $b_n \rightarrow l$ (stesso l).

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Per def. di lim. su c_n so che

$$c_n \leq l + \varepsilon \quad \forall n \geq n_{0,c}$$

Per def. di lim. su a_n so che

$$l - \varepsilon \leq a_n \quad \forall n \geq n_{0,a}$$

Ma allora definitivamente ($\forall n \geq \max \{n_{0,c}, n_{0,a}, n_0 \text{ dell'ipotesi}\}$)

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon$$

quindi in particolare $l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon$ che è quello che volevo. \square



Oss. Se $a_n = b_n$ definitivamente, allora a_n e b_n hanno (ovviamente) lo stesso comportamento.

Esempio 1 Se $a_n \rightarrow +\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora
 $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

Dim. b_n lim. inf. vuol dire che $\exists B \in \mathbb{R}$ t.c. $b_n \geq B$.
 Ma allora

$$a_n + b_n \geq a_n + B$$

Fisso $M \in \mathbb{R}$. Poiché $a_n \rightarrow +\infty$ avremo che $a_n \geq M - B$ definitivamente, ma allora

$$a_n + b_n \geq a_n + B \geq M - B + B = M \text{ definitivamente.}$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

[Poi si dice $2^n \geq M$ se e solo se $n \geq \log_2 M$ e questo è vero definitivamente.

Preghiera: per definire $\log_2 x$ serve sapere che 2^x assume valori grandi a piacere, quindi in un certo senso bisogna il limite
 PRIMA

Altra via più elementare. Per induzione dimostro che

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{2^n} \geq 1 + n \geq \textcircled{n} & \forall n \in \mathbb{N} \\ \downarrow & \downarrow \\ +\infty & +\infty \end{array}$$

per confronto a 2.

ANALISI 1 - LEZIONE 012

Titolo nota

09/10/2014

SUCCESSIONI MONOTONE

Def. Una succ. a_n di numeri reali si dice

- debolmente crescente se $a_{m+1} \geq a_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
- strett. crescente " $a_{m+1} > a_m$ " "
- debolmente decrescente " $a_{m+1} \leq a_m$ " "
- strett. decrescente " $a_{m+1} < a_m$ " "

Oss. 1 Strett. cresc. \Rightarrow deb. crescente
 " decr. \Rightarrow deb. decr.

Oss. 2 Una maniera analoga di dare le definizioni è di chiedere

$$\begin{array}{ll} a_m \geq a_n & \forall m > n \\ a_m > a_n & \forall m > n \\ a_m \leq a_n & \forall m > n \\ a_m < a_n & \forall m > n \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} & \end{array}$$

Importanza delle succ. monotone: i comportamenti possibili sono solo due

Teorema (delle succ. monotone)

Sia a_n una successione debolmente crescente (se è strett., meglio)

Allora ci sono solo due possibilità

① $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow +\infty$

In entrambi i casi il limite (reale o $+\infty$) è

$$\sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \} \quad (\text{sup dei valori assunti dalla successione})$$

Dim. Sia L il sup. Ci sono 2 casi

Caso 1 Se $L = +\infty$, allora dico che $a_n \rightarrow +\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$ arbitrario. Per def. di sup c'è un elemento della successione $\geq M$, cioè

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_{n_0} \geq M$$

Ma per la debole crescenza $a_n \geq a_{n_0} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$, quindi $a_n \geq M$ definitivamente.

(per def. di sup supera una volta, per monotonia non torna più indietro)

Caso 2 Se $L \in \mathbb{R}$, allora dico che $a_n \rightarrow L$.

Voglio dim.: $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

↑ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché

$$L \text{ è il sup (meglio } a_n \leq L \forall n \in \mathbb{N})$$

Per def. di sup (anzi per la caratterizzazione)

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $L - \varepsilon \leq a_{n_0}$. Ma allora per monotonia

$$L - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \text{ per ogni } n \geq n_0, \text{ cioè definitivamente.}$$



Osservazione Non è detto che $a_n \rightarrow L^-$ perché potrebbe valere sempre L . D'altra se assume almeno una volta il valore L , allora $a_n = L$ da lì in poi.

Oss. Se a_n è stretta cresc., allora nel secondo caso $a_n \rightarrow L^-$.

Corollario Se a_n è debolm. cresc. e limitata superiormente, cioè $\exists A \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per forza $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ e $L \leq A$ [se fosse $L > A$ oppure $L = +\infty$, allora definitivamente dovrebbe superare A per i discorsi tipo permanenza del segno].

IL NUMERO e (NUMERO DI NEPERO)

Teorema La successione

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è debolmente crescente (anzi strettamente) e limitata superiormente (anzi $2 \leq e_n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$), quindi ha un limite reale,

Def. Si dice numero di Nepero e si indica con " e " il limite di e_n . Quindi

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (e = 2,718 \dots)$$

Dim.

Passo 1 (Non serve a niente) $e_n \geq 2$.

Parto dalla Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > -1$

Se metto $x = \frac{1}{n}$ ottengo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

Passo 2 Dimostro la debole crescita, cioè $e_n \geq e_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$,

$$e_n \geq e_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^n (n-1)^{n-1} \geq n^{2n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n+1) (n^2-1)^{n-1} \geq n \cdot n^{2n-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n^2-1)^{n-1}}{(n^2)^{n-1}} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq \frac{n}{n+1}$$

Ora uso la Bernoulli con $x = -\frac{1}{n^2}$ che è > -1 appena $n \geq 2$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n^2} \stackrel{\text{spero}}{\geq} \frac{n}{n+1}$$

$$(1+x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x$$

Vediamo la speranza: $\frac{n^2 - n + 1}{n^2} \stackrel{?}{\geq} \frac{n}{n+1}$

$$n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 \stackrel{?}{\geq} n^3 \quad \text{OK!}$$

Oss. Forse veniva ancora meglio se scrivessi

$$(n+1)^n (n-1)^{n-1} \geq n^{2n-1} \Leftrightarrow \frac{(n^2-1)^n}{n-1} \geq n^{2n-1}$$

e andavo avanti da qua.

Passo 3 Eu ≤ 3 Uso il binomio di Newton

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\leq 2} \leq 2$$

$$\leq 1 + 2 = 3$$

Cosa abbiamo usato ?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \leq 2$$

Questa è $1 + a + a^2 + \dots + a^{m-1} = \frac{a^m - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^m}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a}$

dim. per induzione

$1 - a^m \leq 1$ poi
divido per $1 - a > 0$,
quindi consento
il verso

Mettendo $a = \frac{1}{2}$ si ha quello che voglio.

Al passaggio precedente abbiamo usato che

$$\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \leq \frac{1}{k!} \quad \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k} \frac{1}{k!}$$

≤ 1 perché num. \leq denom.

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$\boxed{\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}} \quad \text{vera per ogni } k = 1, 2, \dots, m$$

Dimostrazione più formale a posteriori

$$e^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{k-1}}$$

↑ Def.
↑ Binomio Newton
↑ Disug. di sopra

$$\xrightarrow{\text{SHIFT indici}} = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k}$$

$$\xrightarrow{\text{suce. geometrica}} \leq 3$$

ANALISI 1

-

LEZIONE 013

Titolo nota

09/10/2014

RETTEA REALE ESTESA

Def. Si pone $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Quando si dice che $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, vuol dire che il limite può essere un $l \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$.

Posso definire in modo ovvio un ordinamento su $\bar{\mathbb{R}}$.

Posso quasi sempre definire le 4 operazioni su $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\forall (+\infty) = +\infty \quad \forall \cdot (+\infty) = +\infty \quad -\forall \cdot +\infty = -\infty$$

Alcune operazioni non si possono fare

$$+\infty + (-\infty) \quad +\infty \cdot 0 \quad \frac{+\infty}{+\infty} \quad \frac{0}{0}$$

ma nemmeno $\frac{\forall}{0}$.

Teoremi algebrici sui limiti Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

$$a_n \rightarrow a_\infty \in \bar{\mathbb{R}} \quad b_n \rightarrow b_\infty \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

- $a_n + b_n \rightarrow a_\infty + b_\infty$
- $a_n \cdot b_n \rightarrow a_\infty \cdot b_\infty$
- $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a_\infty}{b_\infty}$
- se $\lambda \neq 0$, allora $\lambda a_n \rightarrow \lambda a_\infty$

TRANNE \rightarrow il rapporto quando $b_\infty = 0$

\rightarrow tutte le operazioni nelle 4 forme indeterminate

uate

$$+\infty - \infty$$

$$\pm \infty \cdot 0$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

Achtung! Achtung! Cosa vuol dire forma indeterminata?
 NON vuol dire che il limite non esiste, cioè è di tipo ④.
 Vuol dire che non posso dire niente del limite globale
 (della somma, prod., quoziente) sapendo solo il limite dei
 2 termini a_n e b_n .

Esempio classico

$$\textcircled{1} \quad a_n = 2n \rightarrow +\infty$$

$$b_n = -n \rightarrow -\infty$$

$$a_n + b_n = n \rightarrow +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad a_n = n \rightarrow +\infty$$

$$b_n = -2n \rightarrow -\infty$$

$$a_n + b_n = -n \rightarrow -\infty$$

$$\textcircled{3} \quad a_n = n + 15 \rightarrow +\infty$$

$$b_n = -n \rightarrow -\infty$$

$$a_n + b_n = 15 \rightarrow 15$$

$$\textcircled{4} \quad a_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty$$

$$b_n = -n \rightarrow -\infty$$

$$a_n + b_n = (-1)^n \text{ e non ha limite}$$

Esercizio Fare esempi analoghi per le altre 3 forme indetermin.

Esempio 1

$$a_n = n^2 - n$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ +\infty \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ -\infty \end{array}$$

FORMA INDETERMINATA

$$= n(n-1) \rightarrow +\infty$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ +\infty \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ +\infty \end{array}$$

Esempio 2

$$a_n = n^2 - \sin(n^3)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ +\infty \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{BOH} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{a_n} \geq \boxed{n^2 - 1} \\ \uparrow \\ \sin x \leq 1 \\ \downarrow \\ +\infty \text{ per confronto a } 2 \end{array}$$

Cosa posso dire per buono?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 0 \text{ (anzi } 0^+) & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

SI DIM.
USANDO
LA
DEFINIZIONE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } a \in (0, 1) \end{cases}$$

Oss. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$ ($1^n = 1, 1, 1, 1, 1, \dots$, quindi $\rightarrow 1$)

[Dim. $a^n = (1 + \underbrace{a-1}_x)^n \geq 1 + (a-1)n$]

\downarrow
 $+\infty$
 per confronto
 a due

\downarrow
 $+\infty$ se $a > 1$

Se $a \in (0, 1)$, allora lo scrivo come $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$,
 ma allora

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0 \quad]$$

Esempio 3 $\frac{n^2 + 3n + 5}{2n^2 - n} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\frac{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}{\cancel{n^2} \left(2 - \frac{1}{n} \right)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Più in generale: il rapporto tra polinomi dello stesso grado tende
 al rapporto tra i coeff. dei termini di grado
 max

Esempio 4 $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$

Ovviamente $-1 \leq \sin n \leq 1$

Divido per n conservando i versi (posso per $n > 0$)

$$\boxed{\frac{-1}{n}} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 0 0 0
 (Carabinieri)

Fatto generale Supponiamo che

- a_n sia limitata
- $b_n \rightarrow +\infty$

Allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$

Dim. $A \leq a_n \leq B$ per ipotesi

Divido per b_n (e definitivamente posso perché $b_n > 0$ defn.)

$$\boxed{\frac{A}{b_n}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \boxed{\frac{B}{b_n}}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 0 0 0
 (Carabinieri)

Esempio 5 Dim $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(n!)}{\sqrt{n}} = 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(n!) \leq \frac{\pi}{2}$$

Divido per \sqrt{n} e concludo con i carabinieri

Esempio 6 $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$

Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ uso $x = \frac{1}{n}$

$(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$ Faccio $\sqrt[n]{\quad}$ (posso per monotonia di $\sqrt[n]{x}$)

$1+\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$ Quindi

$$\sqrt[n]{1} = 1 \leq \sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

(cambiieri)

Analogamente se avessi $\sqrt[n]{a}$, faccio Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$ e ottengo

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{a-1}{n} \cdot n = a, \text{ quindi } \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$$

Se so che $a \geq 1$ ho $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$

Se invece $a \in (0,1)$, lo scrivo come $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ e ottengo

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

In generale

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \forall a > 0$$

Tabellina

Esempio 7 $\sqrt[n]{n}$

Varianti di Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad \forall x \geq 0$$

Esercizio per involuzione

In particolare

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

Uso $x = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Ottengo

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \geq n$$

Faccio la radice n -esima e ho

$$\underbrace{1}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}_{\downarrow 1}$$

gratis
sopra

Tabellina:

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

ANALISI 1 - LEZIONE 14

Titolo nota

13/10/2014

CRITERI

RADICE

RAPPORTO

RAPPORTO \rightarrow RADICE

Criterio della radice Sia a_n una succ. con $a_n \geq 0$ definita.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad (l \in [0, +\infty) \text{ opp. } l = +\infty)$$

Allora

- se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$
- se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$
- se $l = 1$, allora BOH (non si può dire nulla di a_n)

Criterio del rapporto Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definita.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (\text{come sopra})$$

Allora stesse conclusioni della radice.

Criterio rapporto \rightarrow radice Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definita.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (\text{come sopra})$$

Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (stesso l di sopra)

Oss. Il rapporto \rightarrow radice funziona anche per $l = 1$ e non riguarda il $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Esempi per l'ottimalità degli enunciati

① $a_n = n^2$ $a_n \rightarrow +\infty$

Il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \rightarrow 1$$

Quindi il criterio del rapporto in questo caso non aiuta

Analogamente $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \rightarrow 1$

② $a_n = \frac{1}{n^2}$ Ora $a_n \rightarrow 0$, ma i criteri non aiutano

③ Può succedere che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, ma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non ha limite.

$$a_n = 1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$$

D'altra parte $1 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi

$$1 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}$$

↓ ↓ ↓
1 1 1

Oss. Il rapporto non può avere un limite diverso da quello della radice,

— 0 — 0 —

Dim. Caso $l > 1$ Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$ $\frac{1}{2} \quad \frac{l+1}{2} \quad l$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

Dall'ipotesi segue che

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2} \quad \text{definitivo, quindi}$$

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \quad \text{definitivo.}$$

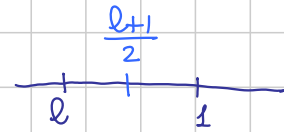
↓ ↓
+∞ (confronto) +∞ (expn. con base > 1)

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow +\infty$, partivo da $\sqrt[n]{a_n} \geq 2014$ definitiv. e procedevo allo stesso modo.

Caso $l < 1$

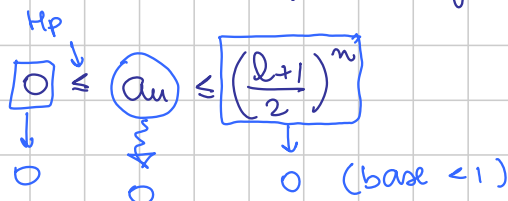
Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$

Tesi: $a_n \rightarrow 0$



Dall'ipotesi

$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitiv., quindi



Oss. Il vero enunciato è il seguente: se $a_n \geq 0$

$\rightarrow \exists M > 1$ b.c. $\sqrt[n]{a_n} \geq M$ definitiv. $\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \exists M < 1$ b.c. $\sqrt[n]{a_n} \leq M$ " $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

Dim. rapporto

Caso 1

Ipotesi: $\exists M > 1$ b.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M$ definitiv.

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

Per ipotesi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ b.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$

$[a_{n_0+1} \geq M a_{n_0}, a_{n_0+2} \geq M a_{n_0+1} \geq M^2 a_{n_0},$
 $a_{n_0+3} \geq M a_{n_0+2} \geq M^3 a_{n_0} \dots]$

Per induzione dimostro che [fase 1]

$$a_{n_0+k} \geq M^k a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè $a_n \geq M^{n-n_0} a_{n_0}$ definitivamente

cioè

$$a_n \geq M^n \frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $+\infty$ $+\infty$ costante positiva

Caso 2 Ipotesi: $\exists M < 1 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M \quad \forall n \geq n_0$

Tesi: $a_n \rightarrow 0$

Dall'ipotesi per inclusione segue che

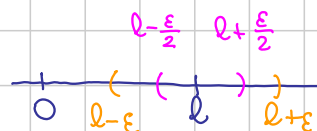
$$0 \leq a_n \leq M^n \frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 0 0 0 costante

Di un rapporto \rightarrow radice Ci sarebbe vari casi. Facciamo solo il caso $l \in (0, +\infty)$ (resterebbero $l=0$ e $l=+\infty$)

Ipotesi: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$ Tesi: $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$

Per ipotesi $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$l - \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1$$

Ragionando come prima per inclusione otteniamo che

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \frac{a_{n_1}}{\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)^{n_1}} \leq a_n \leq \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)^n \frac{a_{n_1}}{\left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)^{n_1}}$$

Faccio la radice n -esima ovunque:

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\dots} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\frac{a_{n_1}}{\left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)^{n_1}}}$$

\downarrow \downarrow
 1 1 $\sqrt[n]{\text{cost.}}$

Abbiamo dimostrato che

$$\text{RHS (right-hand side)} \rightarrow l + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{LHS} \rightarrow l - \frac{\varepsilon}{2}$$

ma questo non basta per garantire il limite del CHS.

Tuttavia avremo che $\text{RHS} \leq l + \varepsilon$ definitivamente e analogamente $\text{LHS} \geq l - \varepsilon$ definitivamente, quindi in conclusione

$$l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq l + \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

che è quello che volevo.

— o — o —

Qualche caso del \lim , algebrico

- Se $a_n \rightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow b_\infty \in \mathbb{R}$, allora $a_n + b_n \rightarrow a_\infty + b_\infty$

[Brutta: $| (a_n + b_n) - (a_\infty + b_\infty) | \leq \varepsilon$

$$| (a_n - a_\infty) + (b_n - b_\infty) | \leq |a_n - a_\infty| + |b_n - b_\infty| \leq \varepsilon]$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dim. vera Desso dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$| (a_n + b_n) - (a_\infty + b_\infty) | \leq \varepsilon.$$

Per def. di lim. su a_n e b_n ho che

$$|a_n - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{definitiv.} \quad |b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{definitiv.}$$

Quindi

$$| (a_n + b_n) - (a_\infty + b_\infty) | \leq |a_n - a_\infty| + |b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

definitiv. ↑ $|x+y| \leq |x| + |y|$ □

ANALISI 1 - LEZIONE 15

Titolo nota

13/10/2014

Confronti di ordini di infinito

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n^3} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \rightarrow 3 > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

Fatto generale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \forall a > 1 \quad \forall b > 0$$

TABELLINA

Esponenziale batte potenza

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1,001)^n}{n^{2014}} = +\infty$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1) n! 3^n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

$\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

Più in generale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1$$

Tabellina

FATTORIALE BATTE ESPONENZIALE

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!}$

"a_n"

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Criterio del rapporto :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n n!}{(n+1) n! n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

Quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}} = 0$ (occhio: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$)

Criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{3^n} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$
↑
potenza vs espon.

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Provo ad usare rapporto \rightarrow radice con $a_n = n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \text{ quindi } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$$

Oss. Non posso calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5}$ con il rapporto \rightarrow radice

perché il limite di $\sqrt[n]{\cos t}$ serve nella dimostrazione del criterio.

Dall'esempio 5 segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$ per ogni $a > 0$
↓
 $(\sqrt[n]{n})^a$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3 + 7n^2 + 5} = 1$

1° modo Faccio rapporto \rightarrow radice con $a_n = n^3 + 7n^2 + 5$

Esempio 9

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{9^n - 7^n + n^{30} + \sin n!} = 9$$

Chi comanda si raccoglie !!!

$$\sqrt[n]{\dots} = \sqrt[n]{9^n} \left(1 - \left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{n^{30}}{9^n} + \frac{\sin n!}{9^n} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 9$$

 $\sqrt[n]{b_n}$ con $b_n \rightarrow 1$, quindi $\rightarrow 1$

Esempio 10 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{4n}{n}} = \frac{256}{27}$

$$\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)! n!}} \quad \text{Applico rapporto} \rightarrow \text{radice con } a_n = \frac{(4n)!}{(3n)! n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(4n+4)!}{(3n+3)! (n+1)!} \cdot \frac{(3n)! n!}{(4n)!}$$

$$(4n+4)! = (4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!$$

$$(3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$$

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)} \rightarrow \frac{4^4}{3^3} = \frac{256}{27}$$

polinomio
polinomio

Quindi $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{256}{27}$ (e ovviamente $a_n \rightarrow +\infty$ per il criterio della radice o del rapporto: $\frac{256}{27} > 1$).

Esempio 11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + n^3 - n! = -\infty$

Qui comanda si raccoglie!

$$\underbrace{(n!)^{\circlearrowleft}}_{+\infty} \left(\underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{\circ} + \underbrace{\frac{n^3}{n!}}_{\circ} - 1 \right) \rightarrow (+\infty) \cdot (-1) = -\infty$$

fattoriale vs
potenza o esponenziale

Teo. alg. prodotto Se $a_n \rightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow b_\infty \in \mathbb{R}$, allora
 $a_n \cdot b_n \rightarrow a_\infty \cdot b_\infty$

[Brutta: $|a_n \cdot b_n - a_\infty \cdot b_\infty| = |a_n b_n - a_n b_\infty + a_n b_\infty - a_\infty b_\infty|$

$$= |a_n (b_n - b_\infty) + b_\infty (a_n - a_\infty)|$$

$$\leq \underbrace{|a_n|}_{\uparrow} \cdot |b_n - b_\infty| + \underbrace{|b_\infty|}_{\text{Definitivamente}} \cdot |a_n - a_\infty|$$

$a_n \leq M$ perché
 a_n è limitata
 e definitivamente

$$|a_n - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b_\infty|}$$

$$|b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{M}$$

Bella: Scelgo il definitiv. in modo che $|b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{M}$

$$|a_n - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b_\infty|}$$

Domanda: ma non ci sono problemi se $b_\infty = 0$?

Come si aggiusta?

ANALISI 1 - LEZIONE 16

Titolo nota

14/10/2014

LIMITI DI FUNZIONI $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

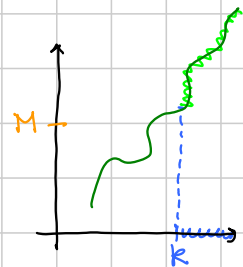
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ come prerequisito ho che D non sia limitato super.

Ci sono le solite 4 possibilità.

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

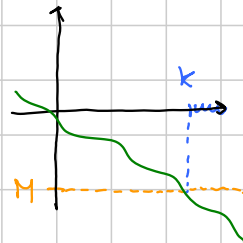
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D, x \geq K$



Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D, x \geq K$

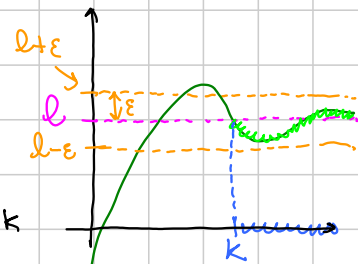


Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in D, x \geq K$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$



Moralmente: più ε diventa piccolo, più K potrebbe diventare grande

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste se ... nessuna delle prec. è vera.

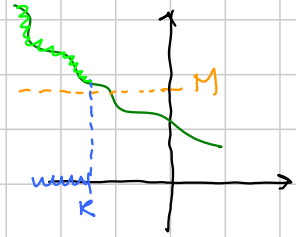
— o — o —

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ha come prerequisito che D non è limitato infer.

Def. si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D, x \leq k$

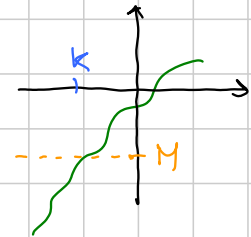


Teoricamente: + M è grande, + k sarà molto negativo.

Def. si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

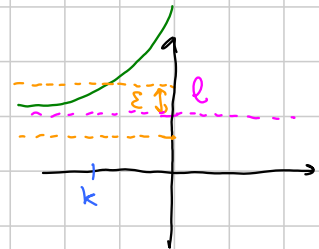
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D, x \leq k$



Def. si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$

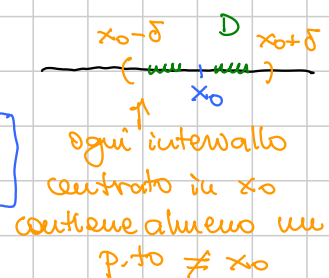
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in D, x \leq k$



Def. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ non esiste ... NDP.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ha come prerequisito che

$$\forall \delta > 0 \quad ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$



In questi casi si dice che x_0 è un p.to di accumulazione per D

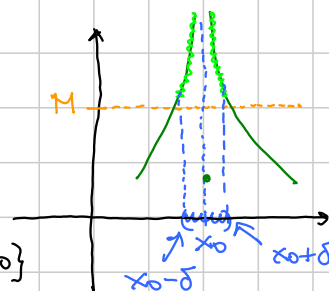
Oss. $x_0 \in D$ può non essere di accumulaz. (basta che sia isolato)
 $x_0 \notin D$ può essere di accumul. (ad es. 0 è p.to di acc. per $(0, 1)$)

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$

$\forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$



Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

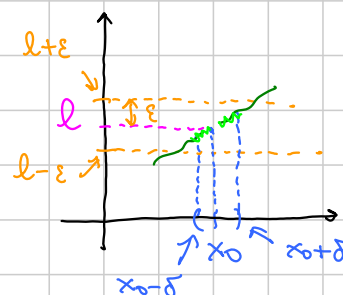
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$

Def. Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$

$\forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$



Tendenzialmente: + pseudo ε piccolo, + potrebbe servire δ piccolo.

Def. ... non esiste ... nessuno dei precedenti
— o — o —

Limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ Pre requisito: $\forall \delta > 0 \quad (x_0, x_0 + \delta] \cap D \neq \emptyset$
 \uparrow esclude autom. x_0

le definizioni sono analoghe solo concludendo con
" $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta] \cap D$ "
— o — o —

Esempi $\lim_{x \rightarrow \tau^+} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta] \cap D$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \tau^+$

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$\tau < f(x) \leq \tau + \varepsilon \quad \forall x \in D, x \leq k.$

— o — o —

Def. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$. Si dice che f è continua in x_0 se vale uno dei seguenti due fatti!

→ x_0 è isolato in D (cioè $\exists \delta > 0$ t.c. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D = \{x_0\}$)

(nei pti isolati la continuità è GRATIS)

→ x_0 è di accumulazione per D e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(in particolare il limite è reale)

Def. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in D se è continua in tutti i pti di D ,
Volendo smontare la definizione, se

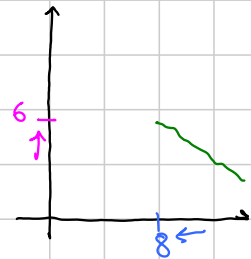
$$\forall x_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D$$

↑
 δ dipende da x_0
e da ε

se x_0 è un pto isolato
questo insieme è $\{x_0\}$,
quindi $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
è banale

Esempi $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 6^-$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 6 - \varepsilon \leq f(x) < 6 \quad \forall x \in (8, 8 + \delta] \cap D$$



$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 8^+$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 8 < f(x) \leq 8 + \varepsilon \quad \forall x \in [6 - \varepsilon, 6) \cap D$$

Domanda: sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]?$$

ANALISI 1 - LEZIONE 017

Titolo nota

14/10/2014

Strumenti per il calcolo di limiti di funzione

- teoremi algebrici (esattamente come per le successioni)
- teoremi di confronto a 2 e a 3 (come per le successioni)
- continuità (se f è cont. in x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)
- limiti notevoli
- cambi di variabile.

Come stabilisco se una funzione è continua?

METATEOREMA (molto misterioso) Qualunque funzione ottenuta a partire da quelle elementari mediante oper. algebriche e/o composizioni è continua dove è definita (quindi dove non ci sono problemi di denum. = 0, log (roba ≤ 0), ...)

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \log_7 (7 + \arctan(2^x + 4 \sin x)) = \log_7 (7 + \frac{\pi}{4})$
 funzione continua su tutto \mathbb{R}
 (l'unica verifica da fare è che l'argomento del log sia > 0)

Ingrediente 1 Tutte le funzioni elementari sono continue dove sono definite.
 (Richiede dim. separate per le varie funzioni)

Ingrediente 2 Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue è ancora una funzione continua dove definite (denum. $\neq 0$)
 (segue banalmente dai teoremi algebrici)

Ingrediente 3 La composizione di funzioni continue è ancora continua (dove tutto è ben definito)
(Richiede i cambi di variabile)
— o — o —

Esempio di cambio di variabile

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$

e che $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = z_0$.

Allora verrebbe da dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = z_0$

Detto brutalmente: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ Pongo $y = g(x)$ ^{Cambio di variabile}
Quando $x \rightarrow x_0$, ho $y \rightarrow y_0$
e allora il limite iniziale diventa

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = z_0$$

Tutto ciò di solito si può fare.

Caso semplice (senza problemi burocratici)

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su tutto \mathbb{R}

Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su tutto \mathbb{R}

Allora $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su tutto \mathbb{R} .

Dim. Devo dimostrare che $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

So per ipotesi che f è continua in $g(x_0)$

Idea: se x è vicino a x_0 , allora $g(x)$ è vicino a $g(x_0)$ per la continuità di g , ma allora $f(g(x))$ è vicino a $f(g(x_0))$ per la continuità di f in $g(x_0)$

Poiché f è continua in $g(x_0)$ so che $\exists \delta_1 > 0$ t.c.

$$|f(y) - f(g(x_0))| \leq \varepsilon \quad \forall y \in [g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1]$$

Ora uso la continuità di g con δ_1 al posto di ε :

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ t.c. } |g(x) - g(x_0)| \leq \delta_1 \quad \forall x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2].$$

Il δ_2 è il δ che volevo, perché

• se $x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$, allora $g(x) \in [g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1]$,
 ma allora $f(g(x)) \in [f(g(x_0)) - \varepsilon, f(g(x_0)) + \varepsilon]$.

LIMITI NOTEVOLI

PADRI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ [$\pm\infty$]

FIGLI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

NIPOTI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad (\text{se } a > 0)$$

LIMITE DIMENTICATO: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ [$0 \cdot (-\infty)$]

Gli altri sono tutti $\frac{0}{0}$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Pongo $y = x^2$
Quando $x \rightarrow 0$ ho $y \rightarrow 0$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = 1$

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x}$$

$$\frac{\arctan x}{x}$$

$$\rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

(tabellina)

1

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$, quindi diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \sin 1$ da subito per il metateo.

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho $y \rightarrow 1$, quindi diventa

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sin y}{y} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1 \quad (\text{funzione continua})$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(7x)}{x^2} = 49$

$$\frac{\sin^2(7x)}{x^2} = \left[\frac{\sin(7x)}{x} \right]^2 = \left[\frac{\sin(7x)}{7x} \right]^2 \cdot 49 = 49$$

$y = 7x$
1

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \text{N.E.}$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \rightsquigarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

↓ 0
↓ 0
↓ 0

Ok per $x \rightarrow +\infty$
perché sto dividendo per x

a $-\infty$ (cioè per x negativo) devo capovolgere

$$\overset{\text{pos}}{-\frac{1}{x}} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x} \text{ neg.}$$

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

Per successioni: $x_n \rightarrow 0 \iff |x_n| \rightarrow 0$
(con la def. è ovvio)

Per funzioni: $\lim_{x \rightarrow q.c.} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \text{stessa cosa}} |f(x)| = 0$

Semplifica molti esempi...

— 0 — 0 —

ANALISI 1 — LEZIONE 018

Titolo nota

16/10/2014

LIMITI NOTEVOLI

Criterio successivi \rightarrow funzioni (come dedurre limiti di funzioni da limiti di successivi)

Idea: so che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ (lim. succ.) . Vorrei che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$ (con. lim. funz.)

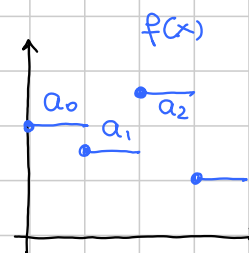
Lemma Sia $f(x)$ una funzione costante su tutti gli intervalli del tipo $[n, n+1)$.

Poniamo $a_n =$ valore di $f(x)$ in $[n, n+1)$.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

qualunque cosa faccia a_n (1), (2), (3), (4)
la stessa cosa fa $f(x)$.



Dim. Ovvio (quello che a_n soddisfa $\forall n \geq n_0$, lo stesso lo verifica $f(x)$ $\forall x \geq n_0$)

Lemma + confronto sistematico multi casi

Esempio 1

$$\frac{2^x}{x} \geq \frac{2^n}{n+1} \quad \forall x \in [n, n+1)$$

\swarrow \nearrow \nwarrow \nearrow
 $+\infty$ per confronto
 den. + piccolo / num. + grande
 pensata come funzione a gradienti $\rightarrow +\infty$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ voglio dedurlo da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \quad \forall x \in [n, n+1)$$

\downarrow e \downarrow e \downarrow e

Vediamo per bene i laterali:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow e$$

\downarrow e \downarrow 1

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \rightarrow e \quad (\text{se } a_n \rightarrow e, \text{ allora anche } a_{n+1} \rightarrow e)$$

\downarrow 1

Questo sistema

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Dim. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, quindi basta dim. che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Facciamo finta di sapere che $\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Quando $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ho $\sin x > 0$, quindi posso dividere per $\sin x$

Otengo

$$\boxed{1} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

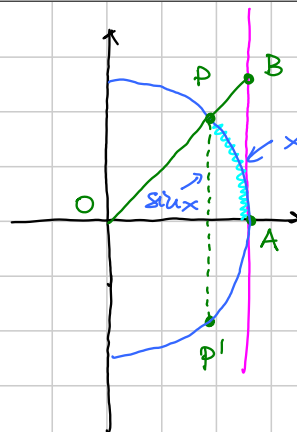
\downarrow 1 \downarrow 1 \downarrow 1

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ per te. alg. anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Dimostro la disug. usando la figura

$$\overline{PP'} = 2 \sin x \quad \widehat{PP'} = 2x$$

\uparrow \uparrow
 segm. arco
 segmento \leq arco $\leadsto \cancel{2} \sin x \leq \cancel{2} x$



$$\text{Area triangolo OAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{\tan x}{2}$$

Area settore OAP : Area cerchio = $x : 2\pi$

$$\text{Area settore OAP} = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

Se Area sett. \leq Area triang., allora $\frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x$

Limiti che discendono da $\frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Oss. $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

\uparrow
 Pongo $y = \arctan x$
 Quando $x \rightarrow 0$ ho $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \text{con la sostituzione } y = \arcsin x$$

Limiti che discendono da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{Pongo } y = -x. \text{ Quando } x \rightarrow -\infty \text{ ho } y \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_e \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)}_1 = e$$

Quindi abbiamo dim. che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Osserviamo che $\log x$ è una funzione continua.

Quindi facendo il log a RHS e LHS sopra otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$. Nel primo caso ho $y \rightarrow 0^-$. Nel secondo caso $y \rightarrow 0^+$

Quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \log(1+y) = 1 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y)$$

Ho così dim.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Ora pongo $z = \log(1+y)$. Quando $y \rightarrow 0$ ho $z \rightarrow \log 1 = 0$

Ricavo y : $e^z = 1+y$, $y = e^z - 1$. Quindi il limite sopra diventa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

LIMITE DIMENTICATO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0^-$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$. Diventa $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\log y}{y}$

Pongo $\log y = z$ e diventa $\lim_{z \rightarrow +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0$ (anzi 0^-)

Oss. Anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\log x|^b = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$

Esercizio: fare cambi di variabili e vedere che viene,

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 019

Titolo nota

16/10/2014

Criterio funzioni \rightarrow successioni (come dedurre limiti di successioni da limiti di funzioni)

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$, quindi div.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Teorema Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia a_n una succ.
Supponiamo che

- (1) $a_n \rightarrow x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$
- (3) $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ definitivamente

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$ (stesso l di sopra)

Dim. in un caso $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \quad |f(a_n) - l| \leq \varepsilon$ definitivamente.
Per ipotesi (2) dato $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Per ipotesi (1) e (3) abbiamo che $a_n \in \overbrace{(D \setminus \{x_0\})}^{(3)} \cap \overbrace{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]}^{(1)}$ definitivamente.

Quindi definitivamente $|f(a_n) - l| \leq \varepsilon$.

— o — o —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Base ed esponente strano? e^{ALLA} !!!

Scrivo $f(x)^{g(x)}$ come $e^{g(x) \log f(x)}$

In questo caso $a^x = e^{x \log a}$, quindi

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a \rightarrow \log a$$

$\downarrow y = x \log a$
1

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{7} - 1)$ $[+\infty \cdot 0]$

$$n(\sqrt[n]{7} - 1) = \frac{7^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Quindi per funzioni \rightarrow succ.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{7} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x} = \log 7$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)$

$$n(\sqrt[n]{n} - 1) = \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \log n$$

\downarrow
1

\downarrow
 $+\infty$

Ho posto $x = \frac{\log n}{n}$ e osservo che quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$

perché il logaritmo perde dalle potenze. Detto meglio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

\uparrow
 $y = \log x$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 3x}{\arcsin(7x)} = \frac{0}{0} = \frac{2}{7}$

$\frac{e^{2x} - \cos(3x)}{\arcsin(7x)} = \frac{e^{2x} - 1 + 1 - \cos(3x)}{\arcsin(7x)}$ *Raccordo x sopra e sotto*

$\frac{\frac{e^{2x}-1}{x} + \frac{1-\cos(3x)}{x}}{\frac{\arcsin(7x)}{x}} \rightarrow \frac{2}{7} \quad \frac{1-\cos(3x)}{x} = \frac{1-\cos(3x)}{3x^2} \cdot 3x$

(Annotations: 2 above e^{2x}-1, 0 above 1-cos(3x), 7 below arcsin(7x)/x, 1/2 below 1-cos(3x)/3x^2, 0 below 3x)

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}} = e^2$

$(1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log(1 + \sin(2x))}$

Faccio solo il limite dell'esponente

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(2x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(2x))}{\sin(2x)} \cdot \frac{\sin(2x)}{x} = 2$

(Annotations: 1 below log(1+sin(2x)), 2 below sin(2x)/x, y=sin(2x) with arrows pointing to 1 and 2)

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\tan^2 x} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$

$\frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\tan^2 x} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\tan^2 x} \rightarrow -\frac{1}{2}$

(Annotations: y=cos x-1, y to 0, 1 below cos x-1, -1/2 below cos x-1/x^2, 1 below x^2/tan^2 x)

Teo. algebrico per l'esponenziale $\lim_{x \rightarrow q.c.} f(x)^{g(x)}$

Se $f(x) \rightarrow l_1$ e $g(x) \rightarrow l_2$, allora $f(x)^{g(x)} \rightarrow l_1^{l_2}$ tranne nei casi

$$1^{\pm\infty}$$

$$0^0$$

$$+\infty^0$$

Dim. Passando all'esponenziale mi riduco a fare il lim. di $g(x) \cdot \log f(x)$ quindi al limite del prodotto. Le 3 forme indeterminate si riducono a $0 \cdot \pm\infty$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+3^x)}{x}$

$$\frac{\log(1+3^x)}{x} = \frac{\log(1+3^x)}{3^x} \cdot \frac{3^x}{x} \rightarrow +\infty \quad \text{NO!!!}$$

Se pongo $y = 3^x$ lo che $y \rightarrow +\infty$, quindi non è il limite notevole

Bruttalmente: $\log(1+3^x) \sim \log(3^x) = x \log 3$
per x enorme

Rigorosamente: raccolgo 3^x dentro la parentesi

$$\frac{\log\left(3^x \frac{1+3^x}{3^x}\right)}{x} = \frac{x \log 3 + \log\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)}{x} = \log 3 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)}{x}$$

\downarrow $\log 3$ \downarrow $\frac{0}{+\infty} = 0$

Quindi il limite è $\log 3$.

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2+2)}{\log(x^3+3)} = \frac{2}{3}$ È come fosse $\frac{\log x^2}{\log x^3}$

Esempio 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^3+1)}{\log(x^2+1)} = 0$

$$\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)} = \frac{\log(1+x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)} \cdot x \rightarrow 0$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 1 1 0

Esempio 9 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Passando all'esponenziale mi riduco a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \log(\cos x)$

e questo tende a $-\frac{1}{2}$ come in un esempio precedente

ANALISI 1 - LEZIONE 020

Titolo nota

20/10/2014

SOTTOSUCCESSIONI Come dimostro che un limite non esiste?Esercizio Negare $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$\exists l \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 |a_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall l \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \underbrace{\forall m_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq m_0}_{\text{frequentemente}} |a_n - l| > \varepsilon$$

Fare così è una pena.

- o - o -

Sottosuccessioni $a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ \dots$ Brutalmente, pescare un po' di termini da una succ. a_n .Rigorosamente Sia a_n una succ. di numeri realiSia n_k una succ. strett. cresc. di numeri interi ≥ 0 .Allora a_{n_k} si dice sottosucc. di a_n .La successione n_k rappresenta gli indici che vado a pescare in a_n .Esempi ① $a_n = \frac{1}{n^2}$

$$n_k = 2k \quad a_{2k} = \frac{1}{4k^2} \quad \text{sottosucc. termini di indice pari}$$

$$n_k = 2k+1 \quad a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{" " " " dispari}$$

$$\textcircled{2} \quad a_n = 2^n \quad n_k = 3k \quad a_{n_k} = 2^{3k} = 8^k \quad (\text{indici multipli di } 3)$$

$$n_k = k! \quad a_{n_k} = 2^{k!}$$

Variante più debole Si prendono gli indici $n_k \rightarrow +\infty$ ma non necess. strett. crescenti.

Oss. Prendendo n_k strett. cresc., si ha che

$$n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{si dim. per inclusione}$$

Teorema (Limite di sottosucc.) Sia a_n una successione.

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$ (tipo ①, ②, ③).

Allora ogni sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow l$ (stesso l).

Dim.: Sarebbero 3 casi. Facciamo il caso $l \in \mathbb{R}$.

Ipotesi: $a_n \rightarrow l$

Tesi: $a_{n_k} \rightarrow l$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |a_{n_k} - l| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

Prendo ε . Per ipotesi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Ma allora basta prendere $k_0 = n_0$. Per ogni $k \geq k_0$ avremo che

$$n_k \geq k \geq n_0, \quad \text{quindi dall'ip. } |a_{n_k} - l| \leq \varepsilon. \quad \square$$

\uparrow
oss. prec.

Achtung! Può accadere che a_n non abbia limite, ma alcune sue sottosucc. sì.

Esempio classico $a_n = (-1)^n$ non ha limite, ma

$$a_{2k} \rightarrow 1$$

$$a_{2k+1} \rightarrow -1$$

a_{k^2} non ha limite

$$a_{k!} \rightarrow 1$$

$a_n = (-n)^n$ non ha limite

$$a_{2k} \rightarrow +\infty$$

$$a_{2k+1} \rightarrow -\infty$$

a_{k^2} non ha limite.

Fatto fondamentale Se a_n ammette due sottosucc. con due limiti $l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ e $l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ DIVERSI, allora a_n non ha limite.

Dim. Se per assurdo $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosucc. dovrebbero tendere allo stesso $l \in \bar{\mathbb{R}}$. \square

Esempio 1 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ $a_0=0, a_1=1, a_2=0, a_3=-1$
 $a_4=0, a_5=1, \dots$

$$a_{2k} = \sin(k\pi) = 0 \rightarrow 0$$

$$a_{4k+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(4k+1)\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1$$

Esempio 2 $a_n = n^7 + (-1)^n n^{11}$ non ha limite

$$a_{2k} \rightarrow +\infty \quad a_{2k+1} = (2k+1)^7 - (2k+1)^{11} \rightarrow -\infty$$

Esempio 3 $a_n = n^{11} + (-1)^n n^7$ tende a $+\infty$

Raccolgo n^{11} e ho $a_n = n^{11} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^4}\right) \rightarrow +\infty$

\downarrow \downarrow
 $+\infty$ 0
 (Carnotini)

$$-\frac{1}{n^4} \leq \frac{(-1)^n}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}$$

Come dimostro che

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste
 \uparrow può essere $+\infty, -\infty, l, l^+, l^-$

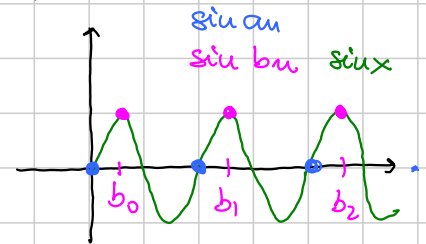
Uso il criterio funzioni \rightarrow successioni "a rovescio", cioè cerco due successioni $a_n \rightarrow x_0$ e $b_n \rightarrow x_0$ tali che

$$f(a_n) \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \quad f(b_n) \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}} \quad l_1 \neq l_2$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ non esiste

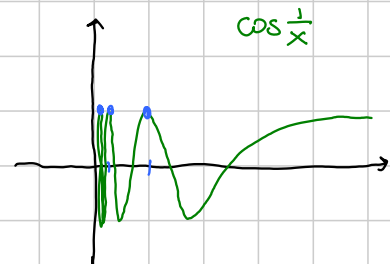
Formalmente, devo trovare $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c.
 $\sin(a_n) \rightarrow l_1$, $\sin(b_n) \rightarrow l_2$ e $l_1 \neq l_2$.

$a_n = 2n\pi \rightarrow +\infty$ e $\sin a_n = 0 \rightarrow 0$
 $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$ e $\sin b_n = 1 \rightarrow 1$



Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ non esiste

Mi servono due succ. $a_n \rightarrow 0^+$ e $b_n \rightarrow 0^+$
 t.c. $\cos a_n$ e $\cos b_n$ abbiano comp.
 diversi.



$a_n = \frac{1}{2n\pi}$. Allora $\cos \frac{1}{a_n} = \cos(2n\pi) = 1 \rightarrow 1$ e $a_n \rightarrow 0^+$

$b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Allora $\cos b_n = \cos(2n\pi + \pi) = -1 \rightarrow -1$ e $b_n \rightarrow 0^+$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \cos x^2)^x = +\infty$

$(3 + \cos(x^2))^x \geq 2^x$
 $+\infty \downarrow$ per confronto $+\infty$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x^2)^x$ non esiste
 $f(x)$

Devo trovare $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c. $f(a_n)$ e $f(b_n)$ si comportino diversamente.

Scelgo a_n in modo che $\sin a_n^2 = 0$, ad esempio $a_n = \sqrt{2\pi n}$.
Allora $a_n \rightarrow +\infty$ e

$$f(a_n) = (2 + \sin a_n^2)^{a_n} = 2^{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow +\infty.$$

Scelgo b_n in modo che $\sin b_n^2 = -1$, ad es. $b_n = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$
Allora $b_n \rightarrow +\infty$ e

$$f(b_n) = (2 + \sin b_n^2)^{b_n} = 1 \rightarrow 1.$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(3 + \log x)}{\log(3 + \sin x)}$ $f(x)$

Prendo a_n in modo tale che $\sin(\dots) = 1$, ad esempio

$$3 + \log a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ quindi } a_n = e^{\frac{\pi}{2} - 3 + 2\pi n} \rightarrow +\infty$$

Prendo b_n in modo che $\sin(\dots) = -1$, ad esempio

$$b_n = e^{\frac{3\pi}{2} - 3 + 2\pi n} \rightarrow +\infty$$

Ora osservo che $f(a_n) = \frac{1}{\log(3 + \sin a_n)} \geq \frac{1}{\log 4}$

$$f(b_n) = \frac{-1}{\log(3 + \sin b_n)} \leq \frac{-1}{\log 4}$$

Questo impedisce al limite di esistere,
come si verifica usando i risultati
tipo "permanenza del segno".

$$\frac{-1}{\log 4} < 0 < \frac{1}{\log 4}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 021

Titolo nota

20/10/2014

Esempio 1 $\frac{\sqrt{m^2+3m+1} - m}{\sqrt{A} \sqrt{B}} \quad [+\infty - \infty]$

Razionalizzazione: $(\sqrt{A} - \sqrt{B}) \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

Diventa: $\frac{m^2+3m+1 - m^2}{\sqrt{m^2+3m+1} + m} \rightarrow \frac{3}{2} \frac{m(3 + \frac{1}{m})}{m(\sqrt{4 + \frac{3}{m} + \frac{1}{m^2} + 1})}$

Esempio 2 $\frac{\sqrt{u+3} - \sqrt{u-7}}{\sqrt{2u+5} - \sqrt{2u+9}}$

Razionalizzo sopra e sotto

$$\frac{(u+3) - (u-7)}{\sqrt{u+3} + \sqrt{u-7}} \frac{\sqrt{2u+5} + \sqrt{2u+9}}{(2u+5) - (2u+9)} = \frac{10}{-86} \frac{\sqrt{2u+5} + \sqrt{2u+9}}{\sqrt{u+3} + \sqrt{u-7}}$$

\downarrow
 $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

Esempio 3 $\sqrt[3]{u^3+2u^2+1} - \sqrt[3]{m^3+5}$

Come razionalizzo $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ si parte da $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ponendo

$$a = \sqrt[3]{A} \quad e \quad b = \sqrt[3]{B} \quad \text{si ottiene}$$

$$A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})$$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}$$

$$\sqrt[3]{\dots} - \sqrt[3]{\dots} = \frac{m^3 + 2m^2 + 1 - m^3 - 5}{\sqrt[3]{(u^3 + 2u^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(\dots)(\dots)} + \sqrt[3]{(m^3 + 5)^2}} \rightarrow \frac{2}{3}$$

Esercizio Capire come si razionalizza $\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{\arcsin x} \quad \frac{[1-1]}{[0]} \rightarrow \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\arcsin x} + \frac{1 - \cos x}{\arcsin x}$$

$\downarrow \frac{1}{2}$ $\downarrow 0$ $\frac{1 - \cos x}{x^2} \downarrow \frac{1}{2}$ $\frac{x}{\arcsin x} \downarrow 1$ $\downarrow 0$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x + x - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

$\downarrow 1$ $\downarrow \frac{1}{2}$

Esempio 5 $\frac{\sqrt{2u+1} - \sqrt[3]{3u+1}}{\sqrt{u+4}} \rightarrow \sqrt{2} \quad \sim \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{2}$

Non serve a nulla razionalizzare, comandano i termini in \sqrt{n} .

Esempio 6 $\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

Raccolgo dai comanda $n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)$

$$= \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}} \quad \text{e questo è legato al}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} = 0$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$
 (si fanno razionalizzando)

— 0 — 0 —

Esempio 7 $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$

$a_1 = 1 + \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$, $a_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$, ...

$a_n \rightarrow ?$ $a_n \rightarrow 0$ perché tutti i termini tendono a 0.

I termini vanno a 0, ma il numero dei termini va a $+\infty$, quindi in un certo senso è $0 \cdot \infty$ e non si può usare il teo. algebrico (vale solo se il numero di addendi è FISSO).

Sol. decaute:

$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot (n+1)$
 Diagramma: $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot (n+1)$.
 - 0 è collegato a 0 da una freccia.
 - a_n è collegato a 0 da una freccia.
 - $\frac{1}{n^2}$ è collegato a 0 da una freccia.
 - $(n+1)$ è collegato a 0 da una freccia.
 - Note: "numero dei termini" (punta a $(n+1)$), "termine + grande" (punta a $\frac{1}{n^2}$).

Quindi $a_n \rightarrow 0$ per i carabinieri.

Esempio 8 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Invece $a_n \rightarrow +\infty$ perché

$a_n \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$
 Diagramma: $a_n \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
 - a_n è collegato a $+\infty$ da una freccia.
 - $(n+1)$ è collegato a $+\infty$ da una freccia.
 - $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ è collegato a $+\infty$ da una freccia.
 - Note: "termine + piccolo" (punta a $\frac{1}{\sqrt{2n}}$), "numero dei termini" (punta a $(n+1)$).

Esempio 9 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ $[0^0]$

$x^x = e^{x \log x} \rightarrow e^0 = 1$

$x \log x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$
 (limite dimenticato)

Esempio 10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\log(\sin x^2)}$ $[\frac{-\infty}{-\infty}]$

$$\frac{\log x}{\log \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x^2} \stackrel{\text{precorso}}{=} \frac{\log x}{2 \log x + \log \frac{\sin x^2}{x^2}} \stackrel{\text{raccolgo log}}{=} \frac{1}{2 + \frac{\log \frac{\sin x^2}{x^2}}{\log x}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{0}{-\infty} = 0$

Esempio 11 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$

SLOGAN : • i limiti sono comodi per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$
 • se non sono a 0 oppure $+\infty$, ce li facciamo arrivare con opportuni cambi di variabile

In questo caso pongo $y = x - \frac{\pi}{2}$. Quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ho $y \rightarrow 0$.

Il limite diventa $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{\pi - 2y - \pi} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$ resta ovviamente indeterminato

Ora $\cos(y + \frac{\pi}{2}) \stackrel{\text{precorso}}{=} -\sin y$ quindi diventa $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{-2y} = \frac{1}{2}$

Esempio 12 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + \sin x} + x$

[Non pensare nemmeno! $\sim x + x \rightarrow -\infty$] [$\sqrt{x^2} = -x$ per $x < 0$]

Cambio variabile $y = x$ e diventa

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - y - \sin y} - y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - y - \sin y - y^2}{\sqrt{\dots} + y} = -\frac{1}{2}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1

- LEZIONE 022

Titolo nota

21/10/2014

SIMBOLI DI LANDAU \rightarrow o piccolo (utile per i limiti)
 (linguaggio degli infinitesimi) \rightarrow O grande
 \rightarrow \sim (equivalenza asintotica)

o piccolo Siano date $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$. Sia x_0 un pto in cui ha senso fare i limiti ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$).

Si dice che **f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$** e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \forall x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Detto altrimenti, $f(x) = g(x) \cdot q.c.$ che tende a 0 per $x \rightarrow x_0$

Def. quasi equivalente **Se** ^{se $g(x) \neq 0$ per $x \in D \setminus \{x_0\}$} posso dividere per $g(x)$, allora la def. diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Brutalmente: f è o piccolo di g se " f batte g " quando faccio il limite per $x \rightarrow x_0$

Equivalenza asintotica Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste $w: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \forall x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

Esempi Da qui in poi $x_0 = 0$

① $x^3 = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Def. uff.: $x^3 = \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)}}{x^2} = \underset{\substack{\uparrow \\ g(x)}}{x^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ w(x)}}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0$

Def. quasi equiv.: per $x \neq 0$ posso dividere per x^2 e mi trovo a verificare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Più in generale $x^a = o(x^b)$ per $x \rightarrow 0$ se e solo se $a > b$

② $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \rightarrow 0$ anche se nessuna delle due tende a 0 per $x \rightarrow 0$.

③ $\arctan^2 x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Def. quasi equiv.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} = 0$$

\downarrow
1

④ $\tan x \cdot \arcsin x^2 = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Def. quasi equiv.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \arcsin x^2}{x^2} = 0$

\downarrow
1

\downarrow
 $y = x^2$

Oss. Negli esempi ③ e ④ puoi scrivere

$$\arctan^2 x \sim x^2$$

$$\tan x \cdot \arcsin x^2 \sim x^3$$

Proprietà di o piccolo Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x)) \quad f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$f_1 + f_2$ Dico che $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$

Dim.: $f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x) \quad f_2(x) = g(x) \cdot w_2(x)$

Allora $f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{[w_1(x) + w_2(x)]}_{w_3(x) \rightarrow 0+0=0}$

$a f_1$ con $a \in \mathbb{R}$ Dico che $a f_1(x) = o(g(x))$

Dim.: $a f_1(x) = a g(x) \cdot w_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{a w_1(x)}_{w_3(x) \rightarrow a \cdot 0 = 0}$

$f_1 \cdot f_2$ Dico che $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))$

Dim.: $f_1(x) \cdot f_2(x) = g^2(x) \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x) \rightarrow 0 \cdot 0 = 0}$

$\frac{f_1}{f_2}$ Nulla di furbo !!! $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g(x) \cdot w_1(x)}{g(x) \cdot w_2(x)}$ BOH !!!

Brutalmente: f_1 batte g , f_2 batte g , ma chi vince tra f_1 ed f_2 non si sa.

Transitività Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e
 $g(x) = o(R(x))$ per $x \rightarrow x_0$

allora

$$f(x) = o(R(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Dim. Per ipotesi abbiamo $f(x) = g(x) \cdot w_1(x)$ con $w_1(x) \rightarrow 0$
 $g(x) = R(x) \cdot w_2(x)$ con $w_2(x) \rightarrow 0$

Ma allora

$$f(x) = R(x) \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0. \quad \square}$$

Con un po' di abuso di notazione possiamo riassumere le proprietà come

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

$$a o(g) = o(g)$$

$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH}$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

Esempio 1 Supponiamo che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Cosa posso dire di

$$x \cdot f^2(x) \quad ?$$

Posso dire che è $o(x^5)$.

Dim. Per ipotesi $f(x) = x^2 \cdot w(x)$ con $w(x) \rightarrow 0$

Ma allora

$$x \cdot f^2(x) = x \cdot x^4 \cdot w^2(x) = x^5 \cdot \boxed{w^2(x)} \\ \downarrow w_1(x) \rightarrow 0$$

Esempio 2 Supponiamo che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Cosa posso dire di

$$f(\arctan x) \quad ?$$

Cosa posso dire di

$$\arctan(f(x)) \quad ?$$

Dim. L'ipotesi dice che $f(x) = x^2 \cdot \omega(x)$ con $\omega(x) \rightarrow 0$
 Nel 1° caso

$$f(\arctan x) = \arctan^2 x \cdot \omega(\arctan x)$$

$\omega_1(x) \rightarrow 0$ per cambio variabili

Per ora ho dimostrato che $f(\arctan x) = o(\arctan^2 x)$

Ma avrei anche potuto scrivere

$$f(\arctan x) = x^2 \cdot \frac{\arctan^2 x}{x^2} \cdot \omega(\arctan x)$$

$\omega_1(x) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$

Quindi ora so che $f(\arctan x) = o(x^2)$

Per il 2° ho che

$$\arctan(f(x)) = \arctan(x^2 \cdot \omega(x))$$

$$= x^2 \cdot \frac{\arctan(x^2 \cdot \omega(x))}{x^2 \cdot \omega(x)}$$

\downarrow 0 \downarrow per cambio di variabili
 \downarrow $y = x^2 \omega(x) \rightarrow 0$

Quindi $\arctan(f(x)) = o(x^2)$.

Oss. Sono stato un po' impreciso nel dividere per $x^2 \omega(x)$ che potrebbe annullarsi anche per $x \neq 0$.

— 0 — 0 —

ANALISI 1

-

LEZIONE 023

Titolo nota

21/10/2014

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} + \log(1 + \arctan(3x)) + \sqrt{1+2x} - 2\cos x^2}{\arcsin(5x) + \tan(e^{2x}-1)} = \frac{4}{7}$$

Divido sopra e sotto per x

$$\frac{\frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x} + \frac{\log(1 + \arctan(3x))}{x} + \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} + 2 \frac{1 - \cos x^2}{x}}{\frac{\arcsin(5x)}{x} + \frac{\tan(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1} + \frac{e^{2x}-1}{x}}$$

$$\frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot x \rightarrow 0$$

$$\frac{\log(1 + \arctan(3x))}{\arctan(3x)} \cdot \frac{\arctan(3x)}{x} \rightarrow 3$$

$$\frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{+1}} = \frac{\cancel{1+2x} - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x} + 1} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

SVILUPPINITutti gli o piccolo si intendono per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad (\text{comprensivo anche le radici } \alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \\ \text{e anche gli } \alpha \text{ negativi}$$

Quando scritto $\sin x = x + o(x)$ vuol dire che $\sin x - x = o(x)$ Dim. Uso def. quasi equiv. e mi riduco a verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Analogamente si dimostrano gli altri della 1ª colonna,

 $e^x = 1 + x + o(x)$ vuol dire che $e^x - 1 - x = o(x)$

Dim.! mi riduco a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$

Verifica dei 2 con $\cos x$:

$$\cos x = 1 + o(x) \quad \text{vuol dire che} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Dim. mi riduco a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \right] = 0.$$

Quello con α si ottiene

→ dal binomio di Newton quando $\alpha \in \mathbb{N}$

→ dalla razionalizzazione quando $\alpha = \frac{1}{k}$ con k intero ≥ 2

→ da Taylor in generale per α generico.

— o — o —

La tabellina degli sviluppi si può interpretare in termini di equivalenza asintotica

$$\sin x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\log(1+x) \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\arcsin x \sim x$$

Meglio dimenticarla
quando si fanno
i limiti

[Dim. Se divido $\frac{\text{LHS}}{\text{RHS}} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$]

Esempio 1 Dim $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\arcsin x + \tan x} = \frac{1}{2}$

Sostituisco ad ogni funzione il suo sviluppo

$$\frac{\overbrace{1+x+o(x)}^{e^x} - \overbrace{(1+o(x))}^{\cos x}}{\underbrace{x+o(x)}_{\arcsin x} + \underbrace{x+o(x)}_{\tan x}} = \frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1 + \frac{o(x)}{x}}{2 + \frac{o(x)}{x}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Sostituendo tutto: $\sin x = x + o(x) \rightsquigarrow \sin x = x + x \omega_1(x)$

$e^x = 1 + x + o(x) \rightsquigarrow e^x = 1 + x + x \omega_2(x)$

...

Frazione data = $\frac{x + x(\omega_1(x) + \omega_2(x))}{2x + x(\omega_3(x) + \omega_4(x))} = \frac{1 + \omega_1(x) + \omega_2(x)}{2 + \omega_3(x) + \omega_4(x)}$

Esempio 2 $\frac{\sin(3x)}{\log(1+2x)} = \frac{3}{2}$

$\sin x = x + o(x) \rightsquigarrow \sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x) \rightsquigarrow \log(1+2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$

$$\frac{\sin(3x)}{\log(1+2x)} = \frac{3x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{3 + \frac{o(x)}{x}}{2 + \frac{o(x)}{x}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$\begin{matrix} \nearrow 0 \\ \boxed{\frac{o(x)}{x}} \\ \downarrow 0 \end{matrix}$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + \tan^2(3x)}{2x + e^{5x} - 1} = \frac{2}{7}$

$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$

$\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$[\tan(3x)]^2 = [3x + o(x)]^2 = 9x^2 + 6x \cdot o(x) + o(x)^2 = o(x)$

$= 9x^2 + 6x \cdot x \omega(x) + x^2 \omega^2(x)$
 $= x (9x + 6x \omega(x) + x \omega^2(x))$
 $\omega(x) \rightarrow 0$

$e^{5x} = 1 + 5x + o(x)$

Frazione = $\frac{2x + o(x)}{2x + \cancel{1} + 5x - \cancel{1} + o(x)} = \frac{2x + o(x)}{7x + o(x)} \rightarrow \frac{2}{7}$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\log(1 + \tan(5x))} = \frac{3}{5}$

Num = $3x + o(x)$

Denom = $5x + o(x)$

La giustificazione è il discorso delle composizioni dell'ora prec.

$$e^x = 1 + x + \boxed{o(x)} \quad \xrightarrow{\quad} \quad x \omega(x)$$

$$e^{\sin(3x)} = 1 + \underbrace{\sin(3x)}_{3x + o(x)} + \boxed{o(\sin(3x))} = 1 + 3x + o(x)$$

$$\sin(3x) \omega(\sin(3x))$$

$$= x \cdot \boxed{\frac{\sin(3x)}{x}} \cdot \boxed{\omega(\sin(3x))}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$= x \cdot \text{q.c. che va a } 0$$

$$\frac{\begin{array}{l} x^2 \text{ e } \text{we we} \\ \uparrow \text{ frego} \\ e^{\sin^2 x} \end{array} + \log(1 + \arctan(3x)) + \sqrt{1+2x} - 2\cos(x^2)}{\arcsin(5x) + \tan(e^{2x}-1)} = \frac{4x}{7x} \rightarrow \frac{4}{7}$$

$\frac{3x}{\uparrow} \quad \frac{2x \cdot \frac{1}{2} = x}{\uparrow} \quad \text{quadrato...}$

$\downarrow 5x \quad \downarrow 2x$

ANALISI 1

-

LEZIONE 024

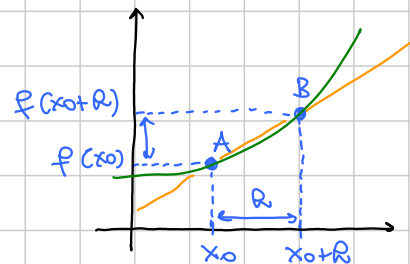
Titolo nota

23/10/2014

DERIVATA E DIFFERENZIALE $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ Requisito: x_0 è un punto interno a D , cioè $\exists \delta > 0$ t.c. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq D$.Def. (Rapporto incrementale). È la funzione

$$\mathbb{R} \rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

← con incremento della y
← incremento della x quando
passa da x_0 a $x_0 + h$

definita almeno per $h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ Geometricamente, il rapporto incrementale è il coeff. angolare della retta AB Def. (Derivata in x_0) Si dice che $f(x)$ è derivabile in x_0 se esiste finito (cioè reale) il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite si indica con una di queste notazioni

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \dot{f}(x_0)$$

e si chiama derivata di $f(x)$ in x_0 Def. Una funzione si dice derivabile in D se ogni p.to di D è interno a D ed il limite esiste per ogni $x_0 \in D$. In tal caso si indica con $f'(x)$ (o $\dot{f}(x)$) la funzione derivata.

Intuitivamente, quando $h \rightarrow 0$ il pto B tende al pto A e la retta AB tende alla retta tangente al grafico in A. Quindi $f'(x_0)$ rappresenta il coeff. ang. della retta tang. al grafico in A, che quindi ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Def. (Differenziale) Si dice che $f(x)$ è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Si dice differenziale di f in x_0 l'applicazione lineare $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Teorema f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ differenziabile in x_0

Detto meglio:

- Se f è derivabile in x_0 , allora f è diff. in x_0 e l'unico α che va bene è $f'(x_0)$
- Se f è diff. in x_0 , allora c'è un unico α che va bene e inoltre f risulta derivabile in x_0 con $f'(x_0) = \alpha$.

Lemma (unicità del diff.) Se f è diff. in x_0 , allora c'è un unico α che va bene.

Dim. Supponiamo verificati la def. con α_1 e α_2 . Allora

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha_1 h + o(h) = f(x_0) + \alpha_2 h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Ma allora $(\alpha_1 - \alpha_2)h = o(h)$, il che equivale a dire che

$$(\alpha_1 - \alpha_2)h = h \cdot \omega(h)$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$
 $\rightarrow 0$

Quindi $\alpha_1 = \alpha_2$. \square

Dim. f deriv. $\Rightarrow f$ diff. Dimostro che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

Con la def. quasi equiv. questo diventa verificare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$$

\downarrow
 $f'(x_0)$

f diff. $\Rightarrow f$ deriv. e $f'(x_0) = \alpha$ Per ipotesi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Ma allora $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha + \frac{o(h)}{h} = \alpha$

Quindi esiste $f'(x_0)$ e vale proprio α . \square

Oss. Riscrivo la def. di diff. cambiando variabile (pongo $x_0+h = x$)

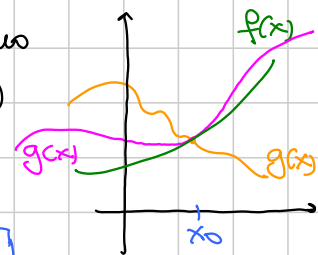
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

equazione della retta che
passa per $(x_0, f(x_0))$ con coeff. ang. α

Def. Diciamo che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si toccano
in x_0 se $f(x_0) = g(x_0)$ (contatto di ordine 0)
Diciamo che il contatto è di ordine ≥ 1
se

$$f(x) - g(x) = o(x-x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$



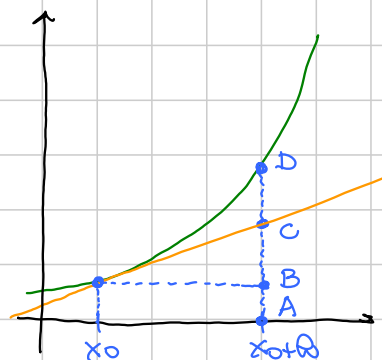
Def. intrinseca di retta tangente La retta tangente al grafico in un p.to è la retta che ha in quel p.to un contatto di ordine ≥ 1 con il grafico della funzione.

Oss. Quello che abbiamo dim. è che tale retta, posto che esista, è unica ed è quella che ha come coeff. ang. $f'(x_0)$

Interpretazione geometrica

$$f(x_0+R) = f(x_0) + f'(x_0)R + o(R)$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ AD & AB & BC & CD \end{array}$$



Quando $R \rightarrow 0$

- AB resta costante
- $BC \rightarrow 0$ linearmente in R
- $CD \rightarrow 0$ più velocemente di R e questo è $o(R)$.

Derivate di funzioni elementari $D = \mathbb{R}$

Esempio 1 $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(x_0+R)^2 - x_0^2}{R} \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0R + R^2 - \cancel{x_0^2}}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} (2x_0 + R) = 2x_0 \end{aligned}$$

In versione differenziale:

$$\underbrace{(x_0+R)^2}_{f(x_0+R)} = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{2x_0R}_{f'(x_0)R} + \underbrace{R^2}_{o(R)}$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$

Rapp. increment.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$

Diff.: $e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = e^{x_0} (1 + h + o(h))$

$$= e^{x_0} + e^{x_0} h + o(h)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) h + o(h)$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$

Rapp. increment.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} = \cos x_0$$

Diff.: $\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + \cos x_0 h + o(h)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) h + o(h)$$

Conclusione I tre concetti

- limiti notevoli con le funzioni elementari
- derivate delle funzioni elementari
- sviluppi

sono tre facce della stessa medaglia.

ANALISI 1 - LEZIONE 025

Titolo nota

23/10/2014

Derivate delle funzioni elementari

$$(x^m)' = m x^{m-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\text{costante})' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Teoremi algebrici sulle derivate

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata di $\log x$ Rapp. cuorem.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \frac{x_0+h}{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}$$

pongo $y = \frac{h}{x_0}$

$\frac{h}{x_0} \cdot x_0$

Diff.

$$\log(x_0+h) = \log \frac{x_0+h}{x_0} + \log x_0$$

$$= \log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) + \log x_0 = \text{sviluppiamo} \dots$$

Derivata della somma Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in D$ un p.to interno.

Supponiamo $f(x)$ derivabile in x_0 e $g(x)$ derivabile in x_0 .

Allora la funzione $s(x) = f(x) + g(x)$ è derivabile in x_0 e

$$s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dim. via rapporto increment.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Dim. via differenziale

$$\begin{aligned} s(x_0+h) &= f(x_0+h) + g(x_0+h) \quad (\text{uso ipotesi}) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) + g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h) \\ &= s(x_0) + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]}_s h + o(h) \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Derivata del prodotto ... enunciato ... $p(x) = f(x) \cdot g(x)$...

Dim. via rapp. increment.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

(aggiungo e tolgo un termine misto qualunque)

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{g(x_0+h)}_{\substack{\downarrow \\ g(x_0) \\ \uparrow \text{anch'ebbe dimostrato}}} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \underbrace{f(x_0)}_{\downarrow} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad g(x_0) \qquad \qquad f'(x_0) \qquad + \qquad f(x_0) \qquad \cdot \qquad g'(x_0) \end{aligned}$$

$$g(x_0+h) = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot h + g(x_0) \rightarrow g(x_0)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $g'(x_0)$ \cdot 0 $g(x_0)$

Oss. La riga precedente dimostra che g derivabile in $x_0 \Rightarrow g$ continua in x_0

(nota bene : $\lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$)

Dim. via differenziale

$$f(x_0+h)g(x_0+h) = [f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)] \cdot [g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)]$$

$$= f(x_0) \cdot g(x_0) + [f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)]h + o(h)$$

\uparrow provare a scrivere i 6 termini rimanenti e vedere che sono davvero o piccolo

Derivata di $\frac{1}{f}$... Enunciato ... Supponiamo $f(x_0) \neq 0$...

$$\dots q(x) = \frac{1}{f(x)} \dots q'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Dim. via rapp. inversa. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x_0+h) - q(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}}{h} = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Oss. Quando si definisce $\frac{1}{f(x)}$ ci vogliono cautele per essere sicuri che $f(x) \neq 0$ almeno vicino ad x_0 (peru. del seguito).

Derivata di $\frac{f}{g}$: segue scrivendo $f \cdot \frac{1}{g}$ e facendo la derivata del prodotto.

Derivata della composizione: teorema misterioso

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

\downarrow pongi $y = g(x_0+h) - g(x_0)$ \downarrow $g'(x_0)$

$$\frac{f(g(x_0)+y) - f(g(x_0))}{y}$$

\downarrow

$$f'(g(x_0))$$

Achtung! Non è una dim. completa perché potrei aver moltiplicato e diviso per 0.

Derivata di x^n : si fa per induzione sfruttando la derivata del prodotto

Derivata di a^x : $a^x = e^{x \log a}$ e uso la composizione

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a$$

derivata esponente

$$= a^x \cdot \log a$$

Derivata di x^α $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

derivata esponente

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Teorema misterioso Sia $g(x)$ la funzione inversa di $f(x)$ (supposto che esista).

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, e sia $y_0 = f(x_0)$.

Allora g è derivabile in y_0 e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Dim. abusiva $g(f(x)) = x$ per def. di inversa.

Derivo a dx e sx e ottengo

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Quindi $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Metto $x = x_0$ e ho la tesi. \square

Oss. L'abusivismo è supporre che g sia derivabile.

Esempio 1 $f(x) = e^x$ $g(x) = \log x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $f(x) = \tan x$ $g(x) = \arctan x$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \quad (\text{si fa usando il rapporto } \frac{\sin x}{\cos x})$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Occhio alla possibilità di "semplificare" \tan e \arctan .

[Esercizio] Fare la stessa cosa per $\arcsin x$ e $\arccos x$.

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 026

Titolo nota

27/10/2014

Teorema di De L'Hôpital Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$ e la possibilità di dividere per $g(x)$ e $g'(x)$, esistenza di $f'(x)$ e $g'(x)$)(ii) il limite iniziale sia una forma indet. del tipo $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,
cioè che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (gli eventuali segni - si possono portare fuori)

(iii) esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \text{ (stesso } l)$$

Operativamente, devo calcolare il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$. Caldo invece il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. \rightarrow che ho verificato essere $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

① Se questo non esiste, allora BOH (non posso dedurre nulla sul limite iniziale)

② Se esiste, allora 😊

③ Se è ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, allora posso reiterare, cioè calcolare il limite di

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ e così via.}$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1} = 0$

NO! Non è $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

In realtà il limite fa $+\infty$ $[\frac{1}{0^+}]$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sin x}{3} = \text{N.E.}$

NO! Se $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, allora non posso dedurre nulla sul limite iniziale

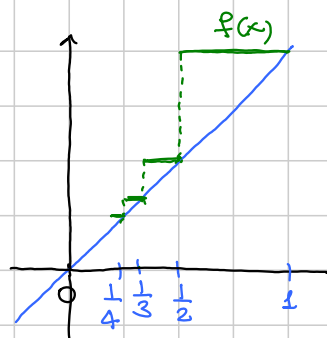
Infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{\cos x}{x}}{3} = \frac{2}{3}$ $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$ (carabinieri)

Oss. Quando si applica De L'Hôpital non basta che x_0 sia un p.to di accumulazione dell'insieme dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$ (così come se $x_0 = +\infty$ non basta che l'insieme di definizione di $f(x)$ e $g(x)$ sia non limitato).

Serve che $f(x)$ e $g(x)$ siano definite almeno in tutto un intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ oppure $(x_0 - \delta, x_0)$ per qualche $\delta > 0$ (oppure su tutta una semiretta nel caso $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$)

Esempio 3 Prendiamo $g(x) = x^2$

Prendiamo $f(x)$ costante a tratti negli intervalli $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ dove è uguale a $\frac{1}{k}$



$f(x)$ e $g(x)$ sono definite in \mathbb{R} meno i p.ti della successione $\frac{1}{n}$. Ovviamente 0 è p.to di accumulazione per questa zona.

$f'(x) = 0$ dove definita

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Oss. L'utilità pratica è limitata dal fatto che derivando spesso le funzioni peggiorano.

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$

\downarrow \downarrow
 $+\infty$ 0

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

\uparrow
 $[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p}]$

In alternativa: uso il fatto che $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$ e ottengo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1.$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ $[\frac{0}{0} : \text{H\ddot{o}p}]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} (-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x-x-x^2+2x}} \cdot 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Oss. L'esempio 5 ci dice che

$$\arccos(1-x) = \sqrt{2} \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

Oss. Si può usare H\ddot{o}p per limiti di successioni solo dopo aver usato il criterio funzioni \rightarrow successioni.

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3}$

1° modo Uso limiti notevoli

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{x \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) + x^5}{x^3} = \frac{x^5}{x^3} = x^2 \rightarrow 0$$

2° modo Uso di equivalenza asintotica: $\sin x \sim x$

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \sim \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^5}{x^3} = x^2 \rightarrow 0$$

3° modo Uso di l'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 5x^4}{3x^2} \quad \left[\frac{0}{0}; \text{Hôp} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 20x^3}{6x} \quad \left[\frac{0}{0}; \text{Hôp} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 60x^2}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Commenti: nel 1° modo ho fatto il limite metà per volta.

Nel 2° modo ho usato l'equiv. asintotica, che non si può usare se avessi messo 0 piccolo, avrei trovato

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + x^5}{x^3} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$$

oss. Posso usare l'Hôpital per calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$? o per

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} ?$$

ANALISI 1

LEZIONE 27

Titolo nota

27/10/2014

SVILUPPI DI TAYLOR

Data una funzione $f(x)$ e dato $n \in \mathbb{N}$, si vorrebbe trovare un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Formula di TAYLOR con resto di PEANO

resto

Se approssimo $f(x)$ con $P_n(x)$ commetto un errore $f(x) - P_n(x)$ che è "piccolo" nel senso che è $o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$.

Lemma Supponiamo che esista un $P_n(x)$ per cui vale la formula di sopra.

Allora $P_n(x)$ è unico.

Dim.: Supponiamo che ce ne siano 2 che vanno bene, diciamo $P_n(x)$ e $Q_n(x)$, allora

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

da cui $\underline{P_n(x) - Q_n(x)} = o(x^n)$
polinomio di grado $\leq n$

Dato un polinomio $P(x)$ di grado $\leq n$, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x^n} = 0 \quad \text{se e solo se } P(x) \text{ è il polinomio nullo}$$

(esercizio: si tratta di raccogliere in $P(x)$ la potenza di x più bassa e osservare che c'è più esponente al denominatore). \square

Teorema misterioso Sia $f(x)$ una funzione definita per lo meno in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per un qualche $\delta > 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

- Le derivate di f fino alla $(n-1)$ -esima esistono in $(-\delta, \delta)$
- La derivata n -esima di f esiste almeno in 0

Allora esiste un (unico) polinomio $P_n(x)$ per cui vale la formula di sopra ed è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

derivata n -esima di $f(x)$ in $x=0$

Oss. 1 Le ipotesi del teorema sono condizioni SUFFICIENTI per l'esistenza del polinomio $P_n(x)$.

Ci sono esempi di funzioni $f(x)$ che non sono nemmeno derivabili che però ammettono polinomi $P_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Oss. 2 I polinomi $P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots$ si ottengono l'uno dal precedente aggiungendo un termine.

La formula di Taylor con resto di Peano, nelle ipotesi del teo. mist., si scrive come

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

se voglio il polinomio $P_n(x)$ mi fermo al termine con x^n

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $\binom{\alpha}{1}$ $\binom{\alpha}{2}$ $\binom{\alpha}{3}$

sono come i binomiali, ma α non è detto che sia in \mathbb{N} .

Oss. Le funzioni pari hanno solo potenze pari nello sviluppo
 " " dispari " " " dispari " " .

[Si dimostra partendo dal fatto che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa, e le funzioni dispari in 0 fanno 0]

Oss. Casi particolari di $(1+x)^\alpha$.

$$\boxed{\alpha = -1} \quad \binom{\alpha}{1} = -1 \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1 \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1$$

e per involuzione $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$, da cui

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}} \quad (1+x)^\alpha = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

— 0 — 0 —

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} =$ (uso $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} + x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{6}$$

— 0 — 0 —

$$\sin x = \boxed{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^3) \quad \text{P}_3(x) \quad \text{VERA (Taylor con } n=3)$$

$$\sin x = \boxed{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^4) \quad \text{P}_4(x) \quad \text{VERA (Taylor con } n=4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5) \quad \text{FALSA (manca } \frac{x^5}{120})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2) \quad \text{VERA ma poco FORBA perché } o(x^2) \text{ mangia } -\frac{x^3}{6}$$

$$\sin x = x - 327x^3 + o(x^2) \quad \text{VERA per lo stesso motivo}$$

— 0 — 0 —

Giustificazione degli sviluppi di Taylor

$$\boxed{f(x) = e^x} \quad \text{Allora } f^{(k)}(x) = e^x, \text{ quindi } f^{(k)}(0) = 1 \text{ per ogni } k$$

quindi

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

$$\boxed{f(x) = \sin x} \quad \text{Allora} \quad f^{(0)}(x) = \sin x = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = \dots$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x = f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) = \dots$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x = f^{(6)}(x) = \dots$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x = \dots$$

Quando sostituisco $x=0$ ottengo

$$\boxed{0, 1, 0, -1, \dots}$$

Dividendo per $k!$ trovo i coeff. $\frac{1}{1!}, -\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, \dots$

$\boxed{f(x) = \cos x}$ Più o meno la stessa cosa

$$\boxed{f(x) = \log(1+x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \dots$$

In generale $\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}}$ *Si dimostra facilmente per induzione*

Da qui calcolo il coeff. di x^k nello sviluppo di $\log(1+x)$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{1} \cdot \frac{1}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$= 1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Esercizio Giustificare lo sviluppo di $(1+x)^a$.
Provare con archtan x ...

ANALISI 1 - LEZIONE 028

Titolo nota

28/10/2014

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO QUALUNQUE

Data $f(x)$, dato $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico polinomio P_n , di grado $\leq n$, tale che

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

La formula per P_n è la solita, quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Scrittura alternativa: ponendo $x-x_0 = h$ si ottiene

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Sotto quali ipotesi vale? Condizione suff. è che

- $\exists \delta > 0$ t.c. f è definita almeno in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,
- f è derivabile almeno $(n-1)$ volte in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,
- f è derivabile n volte almeno in x_0 .

Dim.:

Pongo $g(h) := f(x_0+h)$. Ora g è definita almeno in $(-\delta, \delta)$. Le derivate di g sono legate a quelle di f da $f^{(k)}(x_0+h) = g^{(k)}(h)$, da cui $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(0)$. Scrivendo Taylor per $g(h)$ si ottiene Taylor per $f(x)$ con centro in x_0 . \square

Operazioni con i polinomi di Taylor Per semplicità $x_0 = 0$.

Somma di funzioni Se $f(x) = P_m(x) + o(x^m)$
 $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

allora

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_n(x) + o(x^m)$$

[Dico]: $f(x) = P_m(x) + x^m \omega_1(x)$, $g(x) = Q_n(x) + x^m \omega_2(x)$

Allora

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_n(x) + x^m \underbrace{[\omega_1(x) \pm \omega_2(x)]}_{\omega_3(x)} = P_m(x) \pm Q_n(x) + o(x^m)$$

Prodotto per una costante $\alpha f(x) = \alpha P_m(x) + o(x^m)$

Prodotto di due funzioni $f(x) \cdot g(x) = P_m(x) \cdot Q_n(x) + o(x^m)$

[Dico]: $f(x) \cdot g(x) = P_m(x) \cdot Q_n(x) + x^m \{ P_m(x) \omega_2(x) + Q_n(x) \omega_1(x) + \omega_1(x) \omega_2(x) x^m \}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\omega_3(x) \rightarrow 0}$
 Tutto ciò è $o(x^m)$.]

Oss. Nel calcolare $P_m(x) \cdot Q_n(x)$ posso limitarmi ai termini di grado $\leq m$. Gli altri sono "mangiati" da $o(x^m)$

Esempio 1 $\cos x \cdot \sin x$ $m = 4$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) =$$

$\cos x$ $\sin x$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

pensando de nell' altro termine c'è almeno x posso risparmiarlo

Composizione

$$f(x) = P_m(x) + o(x^n)$$

Primo caso semplice

$$f(\alpha x) = P_m(\alpha x) + o(x^n)$$

Secondo caso semplice

$$f(x^\alpha) = P_m(x^\alpha) + o(x^{\alpha n}) \quad \text{per } \alpha > 0$$

Dim.: $f(x^\alpha) = P_m(x^\alpha) + x^{\alpha n} \omega(x^\alpha)$

$$\omega_3(x) \rightarrow 0 \quad \text{perché } \alpha > 0$$

↑ se $\alpha \in \mathbb{N}$ ottengo ancora un pol., altrimenti è comunque corretto

corretto dopo video

Caso generale

$$f(x) = P_m(x) + o(x^n) = P_m(x) + x^n \omega_1(x)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + x^n \omega_2(x)$$

$$f(g(x)) = P_m(Q_n(x)) + o(x^n)$$

PERCHÈ $Q_n(0) = 0$
cioè $g(0) = 0$

Dim.: $f(g(x)) = P_m(g(x)) + [g(x)]^n \omega_1([g(x)]^n)$

$$= P_m(Q_n(x) + x^n \omega_2(x)) + [Q_n(x) + x^n \omega_2(x)]^n \omega_1(\dots)$$

Fatto 1

$$P_m(Q_n(x) + x^n \omega_2(x)) = P_m(Q_n(x)) + o(x^n)$$

Questo è vero monomio per monomio

$$(Q_n(x) + x^n \omega_2(x))^k = [Q_n(x)]^k + \underbrace{\text{tutti termini con almeno } x^n}_{o(x^n)} \quad \text{e } \omega_2(x) \uparrow$$

Fatto 2

$$[Q_n(x) + x^n \omega_2(x)]^n \omega_1(g(x)) \stackrel{?}{=} x^n \cdot \omega_3(x)$$

↓ qui posso raccogliere x
perché $Q_n(0) = 0$

$$[x R_n(x) + x^n \omega_2(x)]^n \omega_1(g(x)) =$$

$$x^n \underbrace{[R_n(x) + x^{n-1} \omega_2(x)]^n}_{\omega_3(x)} \omega_1(g(x))$$

poiché $g(x) \rightarrow 0$
posso porre $y = g(x)$
e dedurre che va a 0.

Esempio 1 $\cos(\sin x)$ Sviluppo con $m=4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4) \quad \text{poi pongo } t = \sin x$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + \underbrace{o(\sin^4 x)}_{o(x^4)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

↑
doppio prodotto

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underbrace{o(x^5)}$$

↑ avrei $o(x^4)$, ma sapendo che la funzione è pari sono sicuro che il termine con x^5 ha coeff. 0.

Esempio 2 $\sin(\cos x)$ $m=4$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \quad \sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + \underbrace{o(\cos^4 x)}_{o(x^4)}$$

NO! Perché non è verificata l'ipotesi $g(0)=0$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + \cos^4 x \omega(\cos x)$$

↑ non posso moltip. e dividere per x^4
↑ non tende a 0, quindi di ω non so nulla

Oss. Lo sviluppo classico di $\sin x$ vale quando $x \rightarrow 0$, quindi se l'argomento tende ad \pm non posso dire nulla.
— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 029

Titolo nota

28/10/2014

FUNZIONI IPERBOLICHE

Def. $\operatorname{sinh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\operatorname{tanh} x = \frac{\operatorname{sinh} x}{\operatorname{cosh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Simmetrie

$$\begin{aligned} \operatorname{sinh}(-x) &= -\operatorname{sinh} x && \text{(dispari)} \\ \operatorname{cosh}(-x) &= \operatorname{cosh} x && \text{(pari)} \\ \operatorname{tanh}(-x) &= -\operatorname{tanh} x && \text{(dispari)} \end{aligned}$$

Periodicità NON sono funzioni periodiche, anzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sinh} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cosh} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sinh} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cosh} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tanh} x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tanh} x = -1$$

Derivate

$$\begin{aligned} (\operatorname{sinh} x)' &= \operatorname{cosh} x && (\operatorname{cosh} x)' = \operatorname{sinh} x \\ (\operatorname{tanh} x)' &= \text{esercizio} && \uparrow \\ &&& \text{senza il segno -} \end{aligned}$$

Taylor $\operatorname{sinh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

$$\operatorname{cosh} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{sinh} x + \operatorname{cosh} x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dici. 1° modo $f(x) = \sin R x$, allora

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin R x & k \text{ pari} \\ \cos R x & k \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi nel Taylor ci sono solo le potenze dispari con coeff. $\frac{1}{k!}$

2° modo $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin R x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

↑
i pari se ne vanno per colpa di

Esercizio: fare lo stesso per $\cos R x$.

Quadrati $\sin^2 x = \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} - 2)$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} + 2)$$

da cui

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

Relazione fondamentale
della trigonometria
iperbolica

Duplicazione $\sin(2x) = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x})$

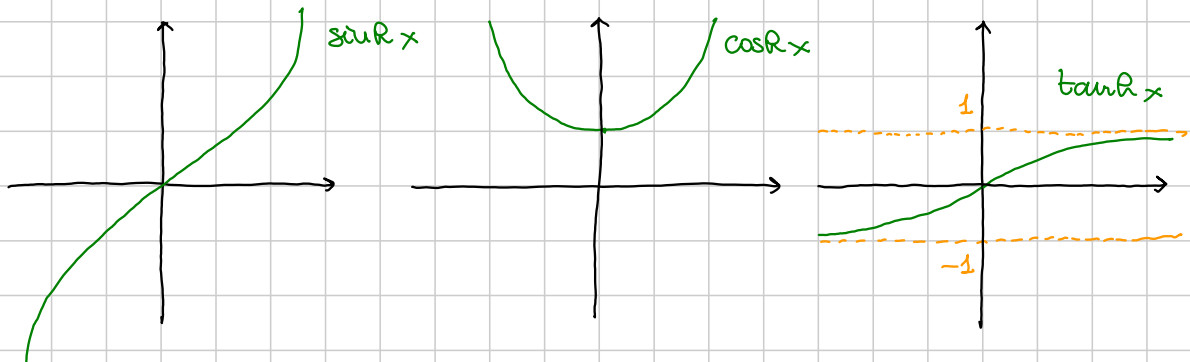
$$= 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{Ok!}$$

Esercizio: trovare la formula per $\cos_R(2x)$ e scriverla nei tre modi usuali, confrontandola con

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Monotonia e grafici I grafici sono i seguenti



Dimostriamo che $\sinh x$ è monotona crescente: somma di 2 funzioni strett. crescenti (e^x e $-e^{-x}$).

Dim. che $\cosh x$ è strett. cresc. in $[0, +\infty)$: prendo $y > x$ e spero che $\cosh y > \cosh x$, cioè

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} > \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Pongo $e^y = b$, $e^x = a$ e mi riduco a dimostrare che

$$b > a \Rightarrow b + \frac{1}{b} > a + \frac{1}{a}$$

$$b - a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = (b - a) + \frac{a - b}{ab} = (b - a) \left(1 - \frac{1}{ab}\right)$$

$$= \frac{(b - a)(ab - 1)}{ab} > 0 \text{ perché } b > a \geq 1, \text{ quindi } ab > 1$$

quindi se $b - a > 0$ l'espressione è positiva.

Funzioni inverse

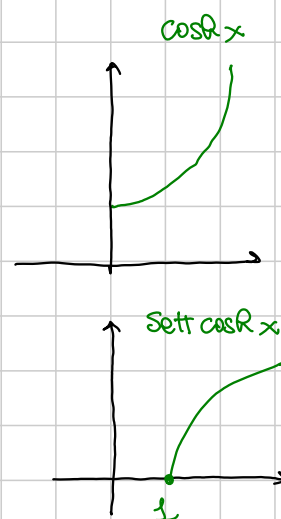
$\sinh x$ È bigettiva come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, quindi ammette l'inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ detta $g(x) = \text{Sett} \sinh x$

$\cosh x$ Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è invertibile.

La sua inversa

$g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$
è detta

$$g(x) = \text{Sett} \cosh x$$



Le derivate sono $(\text{Sett} \sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
 $(\text{Sett} \cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ *controllare per esercizio*

Formule esplicite per le funzioni inverse

Facciamo il caso di $\cosh x$. Per trovare $\text{Sett} \cosh x$ devo risolvere

$$\cosh \alpha = x \quad (\text{cioè trovare } \alpha)$$

$$\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = x, \quad \text{cioè} \quad e^\alpha + e^{-\alpha} = 2x$$

Pongo $e^\alpha = b$ e l'eq. diventa $b + \frac{1}{b} = 2x$, cioè

$$b^2 - 2xb + 1 = 0, \quad \text{da cui} \quad b = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Ora mi serve che sia $b > 0$ per poter risolvere $e^\alpha = b$. Si vede abbastanza facilmente che questo succede solo se $x \geq 1$ (per $x \leq -1$ le soluzioni sono negative).

A questo punto devo risolvere

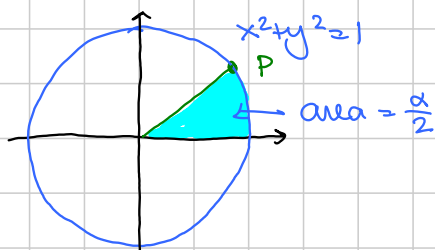
$$e^{\alpha} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \text{ cioè } \alpha = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

Quella buona è quella che mi fornisce $\alpha \geq 0$, quindi l'arg. del log deve essere ≥ 1 e questo accade se e solo se prendo quella con il +. Conclusione

$$\text{Sett } \cos R x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

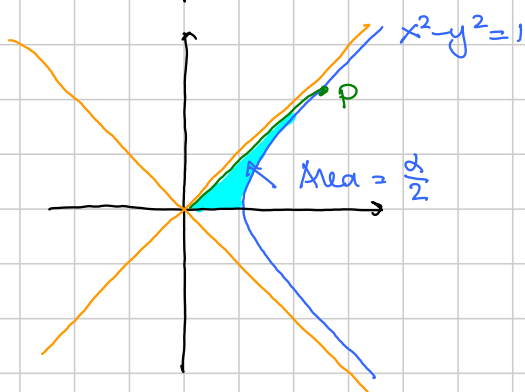
Oss. Le 2 soluzioni in α sono l'una = l'altra cambiata di segno. Si vede dalla formula?
—o —o —

Interpretazione geometrica



Quando Area = $\frac{\alpha}{2}$, allora

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$



Fatto misterioso: per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un unico p.to P sull'iperbole che individua un settore di area = $\frac{\alpha}{2}$ (interpretata con segno).

Le coord. di P = $(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$

Oss. Il giorno in cui i complessi saranno noti, ci saranno le formule

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ANALISI 1

- LEZIONE 030

Titolo nota

30/10/2014

Def. Se $f(x) \sim cx^\alpha$ per $x \rightarrow 0$

oppure equivalentemente

$$f(x) = cx^\alpha + o(x^\alpha) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

si dice che

- $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α ($\alpha > 0$) per $x \rightarrow 0$
- cx^α è la parte principale di $f(x)$.

Esempi

$$\sin x \sim \boxed{x} \quad \text{parte principale}$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x - x \sim \boxed{-\frac{1}{6}x^3} \quad \text{parte princ.}$$

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{x} = 2$

$$\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 + 1 = 2$$

Si gioca sul 1° termine, quindi si fa anche con i limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + \sin x^3}{\tan^3 x} = 2 \quad \text{per lo stesso motivo: si gioca sul 1° termine dello sviluppo.}$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}$

Non si può fare con i limiti notevoli

$$\frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2} = \frac{\overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}^{e^x} - \overbrace{1 - x}^{\sin x} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

La battaglia si è decisa sul 2° termine.

Oss. Se sopra e sotto ci sono infinitesimi di ordine k , allora servirebbero k passaggi di Hôpital per concludere.

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\sqrt{x} \arctan(x\sqrt{x}) + |\sin^5 x|} = \frac{1}{2}$

$\frac{\quad}{\underbrace{\sqrt{x} \arctan(x\sqrt{x})}_{x^2 + o(x^2)} + \underbrace{|\sin^5 x|}_{o(x^2)}}$

è lo stesso limite di prima.

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} =$$

↑ parte principale x^4 , quindi si gioca tutto sul 4° ordine

$$= \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{\cancel{x^4} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)}{\cancel{x^4} \left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Mi devo procurare lo sviluppo di $\sin^2 x$ di ordine 4:

$$\begin{aligned} (\sin x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

Esempio 5 Sviluppare $\arctan(x+x^3)$ di ordine 3

$$\arctan t = t + o(t) \rightsquigarrow \arctan(x+x^3) = x+x^3 + o(x^3)$$

↑
NO!

$$\begin{aligned} \arctan(x+x^3) &= x+x^3 + o(x+x^3) \\ &= x+x^3 + o(x) \\ &= x + o(x) \end{aligned}$$

Oss. $o(x+x^3) = o(x)$ e niente più

$$\begin{aligned} \uparrow \\ (x+x^3) \omega(x+x^3) &= \underbrace{\cancel{x}}_{\substack{\text{raccolgo solo } x \\ \rightarrow 0}} (1+x^2) \omega(x+x^3) \end{aligned}$$

Corretto: $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, quindi

$$\begin{aligned}\arctan(x+x^3) &= (x+x^3) - \frac{1}{3}(x+x^3)^3 + o((x+x^3)^3) \\ &= x+x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} \quad [1^\infty]$

Lo scrivo come $e^{\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}}$ e considero il solo esponente

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x^2} \log \left[\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \right] && \frac{o(x^3)}{x} = \frac{x^3 \omega(x)}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} \log \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) && = x^2 \omega(x) = o(x^2) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \rightarrow -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\log(1+t) = t + o(t)$ quindi

$$\log \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) + o \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right] x \quad y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} - e \right] \frac{1}{y}$$

Mi serve l'ordine di infinitesimo di $(1+y)^{\frac{1}{y}} - e$

$$\begin{aligned}
 (1+y)^{\frac{1}{y}} &= e^{\frac{1}{y} \log(1+y)} = e^{\frac{1}{y} (y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2))} \\
 &= e^{1 - \frac{1}{2}y + o(y)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2}y + o(y)} \\
 &= e \left[1 - \frac{1}{2}y + o(y) \right] = e - \frac{e}{2}y + o(y)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$(1+y)^{\frac{1}{y}} - e = \cancel{e} - \frac{e}{2}y + o(y) - \cancel{e} = -\frac{e}{2}y + o(y)$$

In conclusione

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1+y)^{\frac{1}{y}} - e}{y} = -\frac{e}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 8 $\left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^n - 3^n$ [3[∞] - 3[∞]]

$$3^n \left(\frac{n + \frac{1}{3}}{n+4} \right)^n - 3^n = 3^n \left[\underbrace{\left(\frac{n + \frac{1}{3}}{n+4} \right)^n}_{1^\infty} - 1 \right] \rightarrow -\infty$$

↓ e^{1/3 - 4}

Pongo $x = \frac{1}{n}$ e vedo che succede nella parentesi quadra

$$\left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{x} + 4} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1 + \frac{x}{3}}{1 + 4x} \right)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^{\frac{1}{3} - 4} < 1$$

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^{\frac{1}{3}} \quad (1+4x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^4 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{x}{3}\right)} \rightarrow e^{\frac{1}{3}}$$

Achtung! Achtung!

Posto $f_n = \frac{n + \frac{1}{3}}{n+4}$ è vero che $f_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Tuttavia **LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE**

cioè se so che $f_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso dedurre solo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \leq 1$$

↑ posto che esista

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 031

Titolo nota

30/10/2014

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

Pongo $x = \frac{1}{n}$ e diventa $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$

$$\frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{x^3} = \frac{\cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n - 1}{n^2} = 0$

$$\frac{x - \frac{n^2}{2} - x + o(n^2)}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{NO!!} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ vale}$$

quando l'argomento tende a 0

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \operatorname{sh} x + x^4 \log x}{x \operatorname{arctan}(x^2 + x^3)} = -\frac{1}{6}$

$x^3 + o(x^3)$ quindi si decide sul 3° ordine

↑ quello del $\operatorname{sh} x$

Non posso sviluppare $\log x$ neanche scrivendo

$$\log x = \log [1 + \underbrace{(x-1)}_{\uparrow \text{non tende a 0}}]$$

Fortuna: $x^4 \log x = o(x^3)$ (quando divido tende a 0)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \operatorname{sh} x + x^3 \log x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{x^3} + \log x = -\frac{1}{6} + (-\infty) = -\infty$$

Esempio 4 Sviluppare e^x di ordine 3 con centro in $x_0 = 1$

Teoricamente uso la formula

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + f''(x_0) \frac{h^2}{2} + f'''(x_0) \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

Nel nostro caso $f^{(k)}(x) = e^x$, quindi $f^{(k)}(1) = e$, da cui

$$e^{1+h} = e + e h + e \frac{h^2}{2} + e \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

$$\downarrow \quad \uparrow$$

$$e \cdot e^h = e \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 + o(h^3) \right)$$

Esempio 5 Sviluppare $\sin x$ con centro in $x_0 = 1$ e ordine 3

1° modo: fare le derivate

2° modo: $\sin(1+h) = \sin 1 \cdot \cos h + \cos 1 \cdot \sin h$

$$= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2} h^2 + o(h^3) \right) + \cos 1 \left(h - \frac{1}{6} h^3 + o(h^3) \right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot h - \frac{1}{2} \sin 1 \cdot h^2 - \frac{1}{6} \cos 1 \cdot h^3 + o(h^3)$$

Esempio 6 Sviluppare $\sin(\cos x)$ con centro in 0 e ordine 3

Non va bene: $\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^3)$, quindi

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6} \cos^3 x + \boxed{o(x^3)}$$

NO!

Va bene! $\sin(\cos x) = \sin \left(\underbrace{1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^3)}_R \right)$ uso $\sin(1+R)$

$$= \sin 1 + \cos 1 \left(\underbrace{-\frac{1}{2} x^2}_R \right) + o(x^3)$$

↑ un'omia sia R^2 , sia R^3 , sia $o(R^3)$

Esempio 7 $\log(2+x)$ come lo sviluppo centro in $x_0=0$

$$\log(2+x) = \log\left[1 + \underbrace{\left(\frac{1+x}{2}\right)}_t\right]$$

↑ non tende a 0! non posso usare sviluppo classico

$$\begin{aligned} \log(2+x) &= \log 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) \\ &= \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

↑ ↑ ↑
t -1/2 t^2 + 1/3 t^3

Esempio 8 $x^4 + x^3 - x = p(x)$

Taylor di ordine 3 con centro in 0 : $-x + x^3 + o(x^3)$
 " " " " " " " 2

$p(2+h) = (2+h)^4 + (2+h)^3 - (2+h)$ e faccio i conti con il binomio di Newton salvando solo i termini con esponente ≤ 3 .

Esempio 9 $f(x) = \frac{x+2}{3+x}$ Taylor di ordine 3 in 0

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \frac{x+2}{1 + \frac{x}{3}} = \frac{1}{3} (x+2) \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{3} (x+2) \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + o(x^3)\right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$ e moltiplico salvando solo...

Esempio 10

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

↑
↑
 Derivata di arctan x Derivata di $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

Per rendere il discorso rigoroso

→ dallo sviluppo di $\frac{1}{1+x^2}$ deduco il valore delle derivate di $\frac{1}{1+x^2}$ in 0

→ dalle derivate di $\frac{1}{1+x^2}$ deduco le derivate in $x=0$ di arctan x

→ dalle derivate di arctan x in $x=0$ deduco lo sviluppo di arctan x

Esempio 11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^3 + 7}$

Questo si fa razionalizzando le radici cubiche.

$n \left[\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}} - \sqrt[3]{1 + \frac{7}{n^3}} \right] \dots$ passo alle funzioni $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{\sqrt[3]{1 + 2x + 5x^3} - \sqrt[3]{1 + 7x^3}}{x} = \frac{1 + \frac{2}{3}x - 1 + O(x)}{x}$$

$\sqrt[3]{1+t} = (1+t)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}t + O(t^2)$

→ $\frac{2}{3}$

Oss. Per questo limite bastano gli sviluppi (si è deciso al 1° ordine)

Esempio 12 $\left[\sqrt[n]{7^n + n^7} - 7 \right] e^n$

$$\sqrt[n]{7^n + n^7} = 7 \sqrt[n]{1 + \frac{n^7}{7^n}} = 7 \left(1 + \frac{n^7}{7^n} \right)^{1/n} = 7 e^{\frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{n^7}{7^n} \right)}$$

$\log(1+t) \sim t$

$$= 7 \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot \frac{n^7}{7^n}} = 7 \cdot e^{\frac{n^6}{7^n}} = 7 \left(1 + \frac{n^6}{7^n} \right) = 7 + \frac{n^6}{7^{n-1}}$$

↑
Brutal mode

↑
 $e^t \sim 1+t$

Quindi espressione data $\sim \frac{n^6}{7^{n-1}} \cdot e^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$

Abbiamo dim. che $\sqrt[n]{7^n + n^7} - 7 = \frac{n^6}{7^{n-1}} + o\left(\frac{n^6}{7^{n-1}}\right)$
 ↑
 "ordine" di infinitesimo generalizzato

$(1 + a_n)^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n} a_n$ e il termine successivo?
 — o — o —

ANALISI 1

-

LEZIONE 032

Titolo nota

03/11/2014

SERIE NUMERICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

brutalmente è la somma di tutti i termini di una data succ. a_n Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Def. Data una succ. a_n , si definisce la successione S_n delle somme parziali

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

non è una serie, ma una sumatoria finita

A quel p.to si pone

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Da buon limite, ci sono 4 possibilità:

- ① $S_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora si dice che la serie converge ad l
- ②-③ $S_n \rightarrow +\infty$ opp. $S_n \rightarrow -\infty$, allora si dice che la serie diverge a $+\infty$ opp. $-\infty$
- ④ S_n non ha limite, allora la serie è indeterminata.

Esempi banali Se $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la serie converge a 0.

Se $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $S_n = n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

Se $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 1$ per n pari e $S_n = 0$ per n dispari, quindi la serie è indeterminata.

[Le formule per S_n avrebbero dim. per induzione].

variante banale : cosa vuol dire $\sum_{n \geq 77}^{\infty} a_n$?

Vuol dire che definisco $S_n := a_{77} + a_{78} + \dots + a_n$ per ogni $n \geq 77$ e poi faccio il limite del nuovo S_n .

Oss. banale Siano a_n e \hat{a}_n due successioni tali che

$$a_n = \hat{a}_n \quad \text{definitivamente}$$

(cioè possono differire solo per un numero finito di termini).

Allora le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n$$

hanno lo stesso tipo di comportamento (cioè una converge/div. se e solo se lo è l'altra, ma l'eventuale Q può essere diverso).

Dim. Sia m_0 t.c. $a_n = \hat{a}_n$ per ogni $n \geq m_0$. Siano S_n e \hat{S}_n le due succ. delle somme parziali. Allora

$$S_n - S_{m_0} = \hat{S}_n - \hat{S}_{m_0} \quad \forall n \geq m_0 \quad (\text{facile inclusione})$$

$$\text{quindi} \quad \hat{S}_n = S_n + \underbrace{(\hat{S}_{m_0} - S_{m_0})}_{\text{numero fisso}} \quad \forall n \geq m_0$$

Per fatti noti sui limiti \hat{S}_n e S_n hanno lo stesso comportamento (teo. somma).

— 0 — 0 —
 Due classi speciali : \rightarrow SERIE TELESCOPICHE
 \rightarrow SERIE GEOMETRICHE

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

Oss. chiave! $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = S_n$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = S_n$$

Alla fine resta solo $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Se è così $S_n \rightarrow 1$, quindi la serie converge a 1.

Formalmente, dimostro che $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ per induzione.

Nel passaggio induttivo, assumo che $S_{n-1} = 1 - \frac{1}{n}$ e quindi

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{S_{n-1} \text{ per Hp indutt.}} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

Osservo che $a_n = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \dots + a_n = \\ &= \cancel{\log 2} - \cancel{\log 1} + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 2} + \cancel{\log 4} - \cancel{\log 3} + \dots + \log(n+1) - \cancel{\log n} \\ &= \log(n+1) \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{la serie diverge a } +\infty. \end{aligned}$$

Formalmente, dimostro per induzione che $S_n = \log(n+1)$.

SERIE GEOMETRICHE Sono le serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

dove a è un numero reale FISSO

A suo tempo per inclusione si ottiene $S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

(se $a \neq 1$, ma se $a = 1$ è uno degli esempi iniziali).
Dalla formula segue la teoria, distinguendo dei casi

$a > 1$ $S_n \rightarrow +\infty$

$a = 1$ $S_n = n + 1 \rightarrow +\infty$

$a \in (-1, 1)$ $S_n \rightarrow \frac{1}{1-a}$ perché $a^{n+1} \rightarrow 0$

$a = -1$ $S_{2n} \rightarrow 1$, $S_{2n+1} \rightarrow 0$, quindi è indeterminata

$a < -1$ $S_{2n+1} \rightarrow -\infty$, $S_{2n} \rightarrow +\infty$, quindi è indet.
il denom. è negativo

Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \rightarrow \text{converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1, 1) \\ \searrow \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Oss. Le serie telescopiche e geometriche sono quasi le uniche per cui c'è una formula esplicita per S_n

Proprietà algebriche } Siamo a_n e b_n due successioni.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

con tutte le cautele tipiche del limite della somma.

Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

con tutte le cautele del prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$.

Dim.: Pongo $c_n := a_n + b_n$. Chiamo S_n^a , S_n^b , S_n^c le somme parziali relative alle 3 serie.

Allora una banale induzione ci dice che

$$S_n^c = S_n^a + S_n^b.$$

A questo punto il eventuale limite di S_n^c è legato ai limiti di S_n^a e S_n^b (teo. alg. per somma di limiti).

Dimostrazione analoga per λa_n .

Achtung! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ non ha nulla a che fare con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Non vale nemmeno per le somme finite

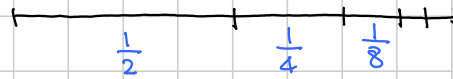
$$a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1)$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 033

Titolo nota

03/11/2014

Serie vs Zerone

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

geometrica
con $a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-a}$

- 0 - 0 -

Teoria delle serie: stabilire se una serie converge o no SENZA avere una formula esplicita per S_n .
Il valore a cui converge per ora non interessa.

Strumenti:Condizione necessariaSerie a termini ≥ 0 (segno costante)Termini a segno qualunque

- Criterio della radice
- " del rapporto
- Criterio del confronto
- Cr. del confronto asintotico:
 - * casi standard
 - * casi limite

- Criterio di LEIBNITZ
- Assoluta convergenza

CONDIZIONE NECESSARIASe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$ Dim.:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 0 l l

← sto usando che la serie converge

Quindi $a_n \rightarrow 0$. \square

Achtung! La condizione è necessaria, ma non SUFFICIENTE.

Quindi

- se a_n non tende a 0 (cioè tende ad altro oppure non ha limite), allora la serie non converge, quindi restano aperte 3 possibilità,
- se $a_n \rightarrow 0$, allora restano aperte tutte le 4 possibilità.

Fatto generale Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora S_n è debolmente crescente definitivamente, quindi (teo. succ. monotone) ci sono solo 2 possibilità:

- $S_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ (cioè la serie converge)
- $S_n \rightarrow +\infty$ (cioè la serie diverge a $+\infty$).

Esempio 1
$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2 + 3n + 1}{5n^2 - 700}}_{a_n} = +\infty$$

$a_n \geq 0$ definitivamente, quindi o converge, o diverge a $+\infty$.

$a_n \rightarrow \frac{1}{5}$ quindi la cond. nec. non funziona, quindi non può convergere. Resta solo che diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente.}$$

Allora valgono queste due implicazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \end{aligned}$$

Dim. wlog l'ipotesi valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$S_n^a \leq S_n^b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, vuol dire che $S_n^a \rightarrow +\infty$, ma allora per confronto a 2 tra limiti anche $S_n^b \rightarrow +\infty$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

(oss.: fino a qui non ho usato che i termini sono ≥ 0)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, vuol dire che $S_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma allora

S_n^b è limitata (volendo proprio da l), ma allora S_n^a è limitata, ma allora (essendo debolmente crescente) S_n^a tende ad un limite reale ($\leq l$).

↑
qui ho usato l'ipotesi
che i termini siano ≥ 0

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

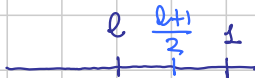
$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \quad (l \in [0, +\infty) \text{ opp. } l = +\infty)$$

Allora

- se $l > 1$, la serie diverge
- se $l < 1$, la serie converge
- se $l = 1$, allora BOH.

Dim. $l > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow$ ad alio condiz. nec. \Rightarrow non può convergere

$l < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ ok condiz. nec. \Rightarrow BOH \leftarrow Falsa prova

Dim. giusta: $l < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definit. 

$$\Rightarrow a_n \leq \left(\frac{l+1}{2} \right)^n$$

||
 $b_n \rightsquigarrow$ serie geometrica di
ragione in $(0, 1)$

quindi $\sum b_n < +\infty$, ma allora $\sum a_n$ converge.

Criterio del rapporto Sia $a_n > 0$ definitivamente.
Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$$

Allora... esattamente come la radice

Dim. $l > 1 \Rightarrow$ NO cond. necessaria

$l < 1$, allora definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$

da cui per induzione si ottiene (come per i limiti)

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-m_0} a_{m_0} \quad \forall n \geq m_0$$

cioè

$$a_n \leq \boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n} \cdot \boxed{\frac{a_{m_0}}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^{m_0}}}$$

\uparrow \uparrow
 geometrica con costante
 ragione < 1

Si conclude come prima per confronto con la geometrica. \square

— 0 — 0 —

ANALISI 1 -

LEZIONE 034

Titolo nota

04/11/2014

Criterio del confronto asintotico Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $b_n > 0$ e $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \text{ (caso standard)}$$

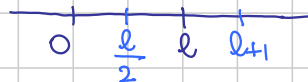
Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso tipo di comportamento, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad \text{(il valore a cui converge, no può essere diverso)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

Utilizzo operativo Data $\sum a_n$, con a_n complicato, cerco una b_n nota per cui funziona il criterio.

Dica Poiché $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora



definitivamente si avrà che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l+1$$

Moltiplico moltiplicando per b_n (che è > 0):

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq (l+1) b_n.$$

Conclusione: $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum (l+1) b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$
↑
disug. dx + confronto

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{l}{2} b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$. \square
↑
disug. sx + confronto.

Confronto asintotico (casi limite)

$$(1) a_n \geq 0, b_n > 0, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$$

[definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$ defiu., quindi]

$$\text{allora } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$(2) a_n \geq 0, b_n > 0, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

[definitiv. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, quindi $a_n \leq b_n$ defiu....]

$$\text{allora } \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Oss. Le implicazioni non scritte in generale non valgono.
 $\rightarrow 0 \quad \rightarrow 0 \quad \rightarrow$

SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE ($a=1 \Rightarrow$ armonica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Dimostrazioni di questi fatti:

- ① Criterio di condensazione di CAUCHY
- ② Disuguaglianze dirette
- ③ Confronto serie - integrali

Criterio di condensazione di Cauchy Sia a_n una succ. tale che

(i) $a_n \geq 0$ definitivamente

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

(iii) $a_n \rightarrow 0$ (questa in realtà non serve)

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$$

↑
termini i cui indici
sono potenze di 2

Applicazione La successione $a_n = \frac{1}{n^a}$ verifica le ipotesi per ogni $a > 0$.

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{na}} < +\infty \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^a}\right)^n \end{aligned}$$

Questa è una serie geometrica, quindi converge se e solo se $\frac{2}{2^a} < 1$, cioè se e solo se $a > 1$.

Esercizio Vedere cosa succede con $a_n = \frac{1}{n \log^a n}$

(risposta: diventa l'annuncia precedente).

— 0 — 0 —

Dim. condensazione di Cauchy

$$a_1 | a_2 | a_3 \quad a_4 | a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 | a_9 \dots a_{16} | \dots$$

Maggiorazione:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^m} \leq a_1 + a_2 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^{m-1} a_{2^{m-1}}$$

Miiorazione

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^m} \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{m-1} a_{2^m}$$

Detto formalmente

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^m} a_k \leq a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{m-1} 2^k a_{2^k}$$

Formalmente si dimostra per induzione

Allora ci sono 2 casi

① Se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge, allora il RHS è limitato, quindi è limitato il LHS, quindi converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

② Se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = +\infty$, allora il LHS $\rightarrow +\infty$, quindi anche RHS $\rightarrow +\infty$.

Alternativa 1 Posso dimostrare che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ per confronto asintotico con $\sum \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{b_n}$

Infatti $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow 1$ (solito limite notevole)

Sapendo che $\sum b_n = +\infty$ (telescopica) deduco che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Alternativa 2 Dal fatto che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, posso dedurre che

$\sum \frac{1}{n^a} = +\infty$ per ogni $a \leq 1$

Infatti $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^a}$ se $a \leq 1$ e si conclude per confronto

Alternativa 3 Se ossemo che

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2$$

Ora so che $\sum_{u=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < +\infty$ perché è telescopica, quindi

deduco che $\sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u^2} < +\infty$.

Da qui per confronto deduco che converge $\sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ per ogni $a \geq 2$.

Quello che resta scoperto è il range $a \in (1, 2)$.

Il caso $a = 2$ fornisce un ulteriore suggerimento

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{si dimostra per induzione oppure maggiorando con la telescopica})$$

Nel caso generale posso sperare che

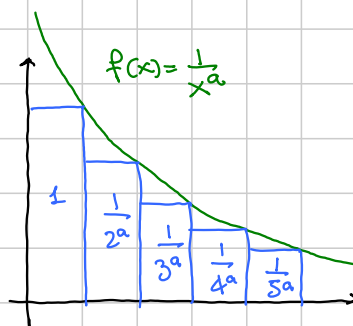
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq A - \frac{B}{(n+1)^{a-1}}$$

L'obiettivo per una dim. diretta è trovare A e B in funzione di a, per cui la disuguaglianza è vera.

La scorciatoia è

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^a} dx}_1$$

si sa fare



ANALISI 1

LEZIONE 035

Titolo nota

04/11/2014

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^5}{2^n}}_{a_n}$ converge $a_n \geq 0$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^5}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n}$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ converge

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n!}$ converge (radice / rapporto)

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{n^3 - 200n^2 + 6}$

$a_n \geq 0$ definitivi.
(num. e denom. sono definiti positivi perché $\rightarrow +\infty$)

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge (armonica con $a=1$)

Rigorous: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \dots \rightarrow 1 \neq 0, \neq \pm\infty$, quindi si comporta come $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e \neq 0, \neq \pm\infty$
↑ tabellina
Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, quindi diverge

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{7} - 1)$ $a_n \geq 0$ sempre

Brutal mode: $e^{\frac{1}{n} \log 7} - 1 \sim 1 + \frac{1}{n} \log 7 - 1 = \frac{1}{n} \log 7$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{7} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n} \log 7} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \log 7 \neq 0 \neq \infty$$

Esempio 7 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^4}$

Intanto $a_n \geq 0$ definitivamente, anzi sempre, perché $0 < \frac{1}{n^4} \leq 1$ e $\sin x > 0$ per $x \in (0, 1)$

Brutal mode: $n^2 \sin \frac{1}{n^4} \sim n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$... $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \rightarrow 1$

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$

Brutal mode: $\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ TROPPO BRUTALE, DEVO ANDARE AVANTI!

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^{3/2}} \leftarrow > 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Mi riduco a fare

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} \quad \text{che diventa} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

↑
Taylor

Oss. Il limite appena fatto ci dice anche che $a_n > 0$ definitivamente.
 Infatti, se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{3}$

allora definitivamente $\frac{a_n}{b_n} > 0$, ma essendo $b_n > 0$ lo sarà pure a_n .

Esempio 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$

Brutal mode: $a_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{6n^3}$

Rigorosamente è equivalente a dire che

$\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{1}{6}$ da cui come prima $a_n > 0$ definitivamente e la serie converge.

Esempio 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 + n^5 - n^3}{n^d + n^4 - 3\sqrt{n} + 8}$ converge $\Leftrightarrow d > 9$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^d + n^3 + 5}{n^8 + n^5 - 127}$ converge $\Leftrightarrow d < 7$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3 + 5}{n^d + n^5 + 7}$ converge per ogni d

(Provare a sistemare rigorosamente)

↓ sopra c'è n^3 , che è comunque sconfitto da n^5

$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \sin R \frac{1}{n^d}$ converge $\Leftrightarrow d > 6$

$\sum \frac{n^d}{\sin R(n^2)}$ converge per ogni d

↑ contiene un e^{n^2} che sconfigge abbondantemente il numeratore

↳ step 1: c.s. con $\frac{n^d}{e^{n^2}}$

↳ step 2: criterio della radice per

Esempio 11 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ $\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

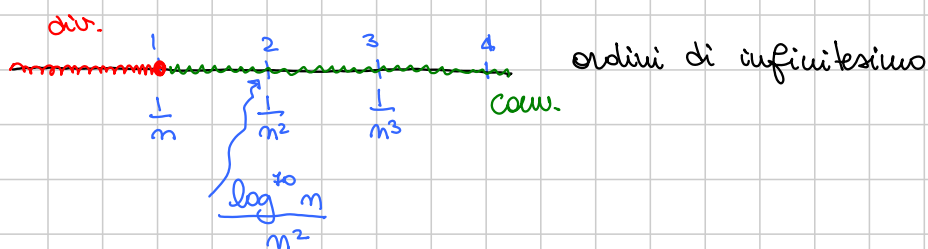
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n} \quad \frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{converge}$$

Esempio 12 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\alpha} n}{n^2}$

C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ (o qualunque esponente in $(1, 2)$)

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^{\alpha} n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{caso difficile}$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots \Rightarrow a_n \leq b_n \dots \right] \sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$$



Più in generale

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^b n}{n^a} \quad \text{converge } \forall a > 1 \text{ e per } b \text{ qualunque}$$

C.A. con $\frac{1}{n^{(1+a)/2}}$ ← intermedio tra 1 e a

Esempio 13 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$

Brutal mode: $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log n} - 1 \sim \frac{\log n}{n}$, quindi

$a_n \sim \frac{\log^{\alpha} n}{n^{\alpha}}$ quindi come sopra converge se e solo se $\alpha > 1$.

Esempio 14 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n + n^4}{n^7 + \alpha^n}$

Converge se e solo se $\alpha > 4$:
è come fosse $\frac{4^n}{\alpha^n} = \left(\frac{4}{\alpha}\right)^n$.

— 0 — 0 —

ANALISI 1

LEZIONE 036

Titolo nota

06/11/2014

Serie con termini di segno qualunque

- ① Criterio di LEIBNITZ
- ② Assoluta convergenza

Criterio di Leibnitz (serie a segno alterno)

Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_n.$$

Supponiamo che

- (i) $d_n \geq 0$ definitivamente (cioè la serie è a segni alterni)
- (ii) $d_{n+1} \leq d_n$ definitivamente
- (iii) $d_n \rightarrow 0$ (equivalente alla condiz. necess.)

Allora la serie converge.

Achtung! Se l'ipotesi (i) o (ii) non sono verificate, allora non si può dire nulla.

Se invece non è verificata la (iii), allora manca la cond. nec., quindi di sicuro non converge.

Idea! Diseguiamo le somme parziali S_n in rappresentazione cartesiana.

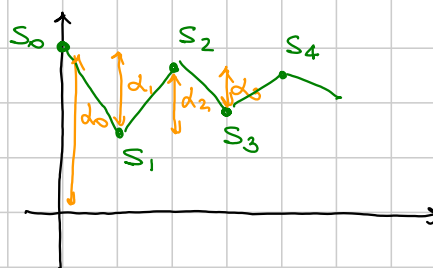
$$S_0 = d_0$$

$$S_1 = d_0 - d_1$$

$$S_2 = d_0 - d_1 + d_2$$

$$S_3 = d_0 - d_1 + d_2 - d_3$$

$$S_{2m} \rightarrow \text{mentre } S_{2m+1} \nearrow$$



Dim. **Step 1** $S_{2m+2} \leq S_{2m}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Infatti

$$S_{2m+2} = S_{2m} - \underbrace{\alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2}}_{\leq 0 \text{ per Hp (ii)}} \leq S_{2m}$$

Analogamente $S_{2m+3} \geq S_{2m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Step 2 $S_{2m} \geq S_{2m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $m \in \mathbb{N}$
(tutte le somme di indice pari sono maggiori di quelle di indice dispari)

Se $n \geq m$, allora $S_{2m+1} \leq S_{2m+1} \leq S_{2n}$
↑ Step 1 ↑ $S_{2n+1} = S_{2n} - \alpha_{2n+1}$

Se $u \leq m$, allora $S_{2n} \geq S_{2m} \geq S_{2m+1}$
↑ Step 1 ↑ $S_{2m+1} = S_{2m} - \alpha_{2m+1}$

Step 3 $S_{2m} \geq S_1 = \alpha_0 - \alpha_1$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
 $S_{2m+1} \leq S_0 = \alpha_0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

Segue dallo Step 2 e dallo Step 1.

Step 4 Per il teorema delle successioni monotone

$$S_{2m} \rightarrow l_1 \in \mathbb{R} \quad S_{2m+1} \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$$

A priori sappiamo solo che $l_1 \geq l_2$. Ora

$$\begin{array}{ccc} S_{2m} - S_{2m+1} = \alpha_{2m+1} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \leftarrow \text{Hp (iii)} \\ l_1 - l_2 = 0 \end{array}$$

Questo mostra che $l_1 = l_2 = S_\infty$

Step 5 Sapendo che $S_{2n} \rightarrow S_\infty$ e $S_{2n+1} \rightarrow S_\infty$ posso concludere che $S_n \rightarrow S_\infty$.

— 0 — 0 —

Lemma delle 2 sottosuccessioni Se una successione ha 2 sottosucc. che tendono allo stesso $l \in \bar{\mathbb{R}}$, e coprono tutti gli indici, allora tutta la successione tende allo stesso l .

Lo stesso vale se ho k sottosuccessioni con lo stesso limite che coprono tutti gli indici.

Esercizio E se le sottosuccessioni fossero infinite?
— o — o —

ASSOLUTA CONVERGENZA

Def. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema Se una serie converge assolutamente, allora converge. Detto altrimenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Achtung! Non vale il viceversa, cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, per $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ restano aperte le 4 possibilità.

Due strategie dimostrative: \rightarrow sfruttando l'ordinamento
 \rightarrow sfruttando la completezza dei reali
— o — o —

Lemma (carabinieri per serie) Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente. Supponiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ converge.}$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. (Nessuna Hp di segno su a_n, b_n, c_n)

Dim. **Step 1** $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n - a_n)}_{\geq 0}$ converge perché è differenza di due serie convergenti.

Step 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n)$ converge. Infatti

$$0 \leq b_n - a_n \leq a_n - a_n$$

quindi da tesi segue dallo Step 1 per confronto tra serie a termini ≥ 0

Step 3 $b_n = a_n + (b_n - a_n)$, quindi

$\sum b_n = \sum a_n + \sum (b_n - a_n)$ è somma di due serie convergenti.

— o — o —

Dim criterio assoluta convergenza

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Le due serie laterali convergono per ipotesi, quindi converge quella centrale. \square

— o — o —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{d_n}$

Devo fare 3 verifiche:

(i) $d_n \geq 0$ gratis

(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ cioè $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ gratis

(iii) $d_n \rightarrow 0$ gratis

Quindi la serie converge per Leibnitz

Non converge assolutamente perché $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Generalizzazione : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$

(1) converge per Leibnitz se e solo se $a > 0$

(2) converge assolutamente se e solo se $a > 1$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$

$\frac{\cos(n!)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge quindi per confronto converge quella data.

NO! Il confronto vale per serie a termini ≥ 0 , quindi qui non si può usare.

Passo attraverso l'assoluta convergenza : $0 \leq \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (tabellina) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n!)|}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$ conv.

↑ confronto tra serie a termini ≥ 0 ↑ assoluta convergenza

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + n + 7}{n^5 - 3n^4 + 18} = dn$

Se voglio usare Leibnitz devo dim. che $dn+1 \leq dn$ definit.

In questo caso l'assoluta convergenza è molto più comoda:

$|(-1)^n dn| = dn \sim \frac{1}{n^2}$

↑ almeno definit.

— o — o —

ANALISI 1

LEZIONE 037

Titolo nota

06/11/2014

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+1}{n^2+2}$

Manca la condizione necessaria, quindi non converge.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$ a_n

Non converge assolutamente perché $|a_n| = a_n \sim \frac{1}{n}$

1° modo Leibnitz... resta da fare $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente.

$$\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{(n+1)^3+2} \stackrel{?}{\leq} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$$

$$\frac{n^2+5n+5}{n^3+3n^2+3n+3} \stackrel{?}{\leq} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$$

$$(n^2+5n+5)(n^3+2) \stackrel{?}{\leq} (n^2+3n+1)(n^3+3n^2+3n+3)$$

$$\cancel{n^5} + 5n^4 + (\text{roba di grado } \leq 3) \stackrel{?}{\leq} \cancel{n^5} + 6n^4 + (\text{roba di grado } \leq 3)$$

$$n^4 \stackrel{?}{\geq} (\text{roba di grado } \leq 3)$$

Divido per n^4 e ritrovo

$$1 \stackrel{?}{\geq} \frac{\text{roba di grado } \leq 3}{n^4}$$

↓
0 quindi definitivamente sta sotto 1

2° modo Brutalmente $a_n \sim \frac{1}{n}$. Aggiungo e tolgo $\frac{1}{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\dots}{\dots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\dots}{\dots} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

converge assolutamente
converge per Leibnitz

Vediamo l'altra

$$\frac{u^2+3u+1}{u^3+2} - \frac{1}{u} = \frac{\cancel{u^3}+3u^2+1-\cancel{u^3}-2}{u(u^3+2)} = \frac{3u^2+u-2}{u(u^3+2)}$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+4}$

Sicuramente non converge. Che fa?

Aggiungo e tolgo 1 alla frazione:

$$\begin{aligned} \text{Serie data} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^2+4} - 1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{-2}{n^2+4}}_{\text{converge assolutamente}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n}_{\text{indeterminata}} \end{aligned}$$

Convergente + indeterminata = indeterminata

In questo caso si dimostra che le somme parziali di indici pari / dispari hanno limiti diversi.

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge per il criterio del rapporto.
La somma di questa serie è e.

Nella giornata del numero e:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (*)$$

Nell'ultima disug. ho usato che $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ ↖ somma parziale della serie data

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

≤ 1

Passando al limite in (*) per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$e \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Senza disug. dalla parte opposta. Fisso un $m \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $n \geq m$ è vero che:

$$e^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{1}{m^k}$$

\downarrow
 $\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$

Fissato k , si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{m^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! \cdot m^k} = \frac{1}{k!}$$

\downarrow
 1

Così ho dimostrato che $e \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$ qualunque sia m .

Facendo ora andare $m \rightarrow +\infty$ ottengo $e \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ che è la disuguaglianza richiesta.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ Converge per criterio del rapporto

La somma di questa è e^α , per $\alpha \geq 0$ si dimostra come sopra partendo da:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\alpha^k}{m^k} \geq \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!}$$

\downarrow e^α per limiti notevoli \downarrow serie data

La disuguaglianza opposta si fa come prima.

Futuro: il risultato si dimostra agevolmente con la formula di Taylor con resto di Lagrange

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

Fatto 1 Per $\alpha > 1$ converge in quanto

$$0 \leq \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha} \leq \frac{327}{n^\alpha} \text{ e concludo per confronto tra serie a termini } \geq 0$$

Fatto 2 Per $\alpha = 1$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan 1}{n}$, quindi diverge

Fatto 3 Quando $\alpha \in (0, 1)$

Brutal mode!

$$\frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha} \sim \frac{\alpha^n}{n^\alpha} \text{ quindi converge}$$

↑
 $\arctan x \sim x$
quando $x \rightarrow 0$

Me la cavo in due step.

Prima faccio C.A. con $b_n = \frac{\alpha^n}{n^\alpha}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{\alpha^n} = 1$$

↑
solito limite notevole

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, quindi converge ad esempio per il criterio della radice.

Esempio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2014}}{2^{\sqrt{n}}}$ $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ quindi BOH

Faccio C.A. con $b_n = \frac{1}{n^3}$ e ottengo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2017}}{2^{\sqrt{n}}} = e^{2017 \log n - \sqrt{n} \log 2}$$

→ $e^{-\infty} = 0$
↑
radice parte logaritmica

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \dots \text{quindi defiu...} \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots a_n \leq b_n \dots$$

Alternativa per il lim.

$$\frac{n^{2014}}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{(n^{\sqrt{n}})^{4028}}{2^{\sqrt{n}}}$$

ANALISI 1

-

LEZIONE 038

Titolo nota

10/11/2014

Teorema misterioso (Teorema di LAGRANGE) (MEAN VALUE THM.)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a, b]$,

(ii) f derivabile in (a, b) . [Se è deriv. in $[a, b]$ meglio]

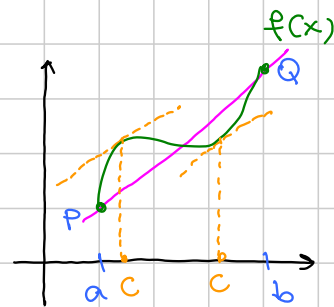
Allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

Interpretazione geometrica Dividendo per $(b-a)$ la tesi diventa

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

"coeff. angolare della retta PQ" "coeff. ang. retta tangente in c"



Esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ in cui

la retta tangente è parallela alla retta PQ

Il p.to c può non essere unico (nella figura ce ne sono due).

Teoremi di monotonia = teoremi che legano segno della derivata e monotonia di una funzione.

MONOTONIA 1 (Segno della derivata in un p.to)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f: (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f'(x_0)$ esista e sia > 0 ,

Allora esiste $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tale che

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \quad (\text{un po' prima vale meno})$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \quad (\text{un po' dopo vale di più})$$

Achtung! Questo non vuol dire che f è crescente (anche sdo deb.) in $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
(questo richiederebbe confrontare 2 p.ti qualunque di $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$)

Oss. Nei teoremi di monotonia se cambio $f' > 0$ con $f' < 0$ si cambia crescente con decrescente.

Dim. Per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Per permanenza del segno si avrà che $\exists \delta_1 > 0$ ($\delta_1 \leq \delta_0$) t.c.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{per ogni } h \in (-\delta_1, \delta_1) \setminus \{0\}$$

Per $h > 0$, questo vuol dire $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$
 Per $h < 0$, " " " $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$
 un po' a dx di x_0
 un po' a sx di x_0

MONOTONIA 2 (segno della derivata in un intervallo)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f: (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia derivabile in tutto l'intervallo.

Allora valgono le seguenti implicazioni.

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \Rightarrow f$ è deb. cresc. in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

(ii) $f'(x) > 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \Rightarrow f$ è strett. cresc. " " "

(iii) f è deb. cresc. in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ nell'intervallo

(iv) f è strett. cresc. " " $\Rightarrow f'(x) > 0$ " " "

No!

Se f è strett. cresc. nell'intervallo, posso dedurre solo che $f'(x) \geq 0$ nell'intervallo stesso

Esempio $f(x) = x^3$ è strett. cresc. in $(-3, 3)$, però
 $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

Dici: Siamo $x_0 - \delta_0 < a < b < x_0 + \delta_0$
 ↑ ↑
 generici

Per Lagrange

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0} \cdot f'(c) \quad \text{dipende da } a \text{ e } b$$

(i) So per certo che $f'(c) \geq 0$, da cui $f(b) - f(a) \geq 0$, cioè
 $f(b) \geq f(a)$

(ii) Stessa cosa, solo che so che $f'(c) > 0$, da cui $f(b) > f(a)$

(iii) Sia x un qualunque pto in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Per def.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\boxed{f(x+h) - f(x)}_{\geq 0}}{\boxed{h}_{> 0}}$$

Per $h > 0$ ho che il rapp. increment. è ≥ 0 , e questa disug. si mantiene al limite.

Per $h < 0$ si ha pure che rapp. increment. ≥ 0 , ma non sono strettamente.

— 0 — 0 —

Oss. Se f è strett. cresc., è vero che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{per ogni } h \text{ compatibile con } x$$

Però le disug. stette NON passano al limite.

— 0 — 0 —

MONOTONIA 3 (Seguo con annullamento sporadico)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f: (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

(ii) non esiste nessun intervallo $(a, b) \subseteq (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ tale

che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$. $\leftarrow f'(x)$ si può annullare,

ma non su un
intero intervallo

Allora

f è strettamente crescente

Dim.] Per monotonia 2 sappiamo che f è debolmente crescente.

Se per assurdo non fosse strett. cresc., esisterebbero a e b in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ t.c. $a < b$ ma $f(a) = f(b)$.

Ma allora f dovrebbe essere costante in tutto $[a, b]$, ma allora $f'(x)$ dovrebbe annullarsi in tutto $[a, b]$.



ANALISI 1 - LEZIONE 039

Titolo nota

10/11/2014

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

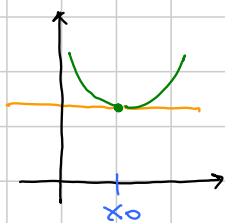
Obiettivo Dato un p.to x_0 , capire come è fatto il grafico di $f(x)$ un po' dopo x_0 e un po' prima di x_0

Primo risultato : monotonia \pm (se conosco il segno di $f'(x_0)$, so confrontare $f(x_0)$ con $f(x)$ per x "vicino" a x_0)

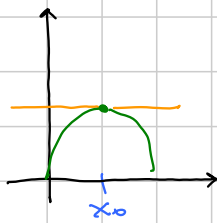
Cosa succede quando $f'(x_0) = 0$

Def. Un p.to x_0 si dice stazionario per $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$
(prequisito : x_0 è p.to interno alla zona di def. di f).

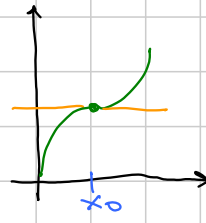
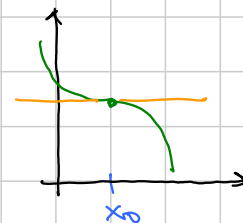
Possibili comportamenti vicino ad un p.to stazionario :



MIN. LOC.



MAX. LOC.

p.to di flesso
a tang. orizz.
ascendentep.to di flesso
a tang. orizz.
discendente

C'è poi un quinto possibile comportamento patologico.

MIN. LOC. $\leadsto \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
 $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

FLESSO. TANG. ORIZ. DISC. $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
 $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Criterio delle derivate successive

Sappiamo che $f'(x_0) = 0$. Supponiamo che esista $k \geq 2$ intero t.c.

$$f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

$$f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

(stiamo supponendo che la k -esima derivata di f sia la prima a non annullarsi in x_0)

Allora



Dim. Taylor!!!

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k + o(R^k)$$

da cui

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Prendiamo uno qualunque dei 4 casi

k pari, $f^{(k)}(x_0) < 0$ Il lim è < 0 , quindi frazione < 0 per $R \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$.

Essendo k pari, il denom. è positivo, quindi il num. è < 0 , cioè $f(x_0 + R) < f(x_0)$ sia in $(-\delta_0, 0)$ sia in $(0, \delta_0)$.

Questo dice che x_0 è pto di max,

Altro caso k dispari, $f^{(k)}(x_0) > 0$ Il lim. è > 0 , quindi

$\exists \delta_0 > 0$ t.c. la funzione è > 0 in $(-\delta_0, 0) \cup (0, \delta_0)$.

Essendo k dispari

- per $h \in (0, \delta_0)$ ho denom. > 0 , quindi num. > 0 , quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ (un po' dopo vale di più)
- per $h \in (-\delta_0, 0)$ ho denom. < 0 , quindi num. < 0 , quindi $f(x_0+h) < f(x_0)$ (un po' prima vale di meno)

Per def. questo è il stesso a tg. orizz. ascendente.

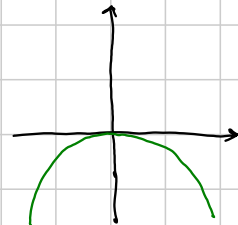
Studio locale: una funzione si comporta vicino ad x_0 come il primo termine non nullo e non costante del suo polinomio di Taylor.

Esempio 1 $f(x) = x^{20} - \sin x^4$

Come è fatto il grafico vicino all'origine?

Risposta: $f(x) = -x^4 + o(x^4) \rightsquigarrow$ si comporta come $-x^4$
 \rightsquigarrow max. locale

Perché $x_0 = 0$ è un p.to staz.?



modo antico: calcolo $f'(x)$ e verifico che $f'(0) = 0$

modo nuovo: $f'(0)$ compare nel coeff. di x del polinomio di Taylor di $f(x)$. Ora x non c'è, quindi coeff. = 0, quindi $f'(0) = 0$.

Varianti: quanto vale $f^{(2014)}(0)$? Vale 0 perché nello sviluppo di Taylor ci sono solo potenze multiple di 4.

Lo studio locale ci dice anche che f NON è iniettiva.

Calcoliamo $f^{(2020)}(0)$. Penso allo sviluppo di Taylor

$$f(x) = -x^4 - \frac{1}{3!}x^{12} - \frac{1}{5!}x^{20} - \frac{1}{7!}x^{28} - \dots - \frac{1}{505!}x^{2020}$$

\downarrow
 $\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!} x^{2020}$

Da qui $f^{(2020)}(0) = -\frac{2020!}{505!}$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

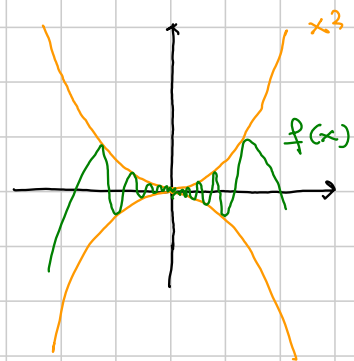
È facile vedere che non ha nessuno dei 4 comportamenti.

Perché $x=0$ è un p.to stazionario?

Caldo $f'(0)$ usando la definizione

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 \quad (\text{cavallini})$$



Esempio 3

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x^{20} \sin \frac{1}{x^{19}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

È evidente che $f(x) = o(x^{19})$ per $x \rightarrow 0$ (basta dividerlo e fare il limite)
 quindi ammette polinomio di Taylor di ordine 19 (il polinomio nullo).

Si verifica che $f'(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$ (anche $x=0$)
 ma non è continua in $x=0$, quindi $f''(0)$ NON ESISTE.

Esempio 4

$$f(x) = \begin{cases} x + 7x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si verifica che $f'(0)$ esiste e vale 1 (è somma di 2 funzioni derivabili).

Per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = 1 + 14x \sin \frac{1}{x} + 7x^2 \cos \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{x^2} \right)$

$$= 1 + 14x \sin \frac{1}{x} + 7 \cos \frac{1}{x}$$

segno - ! corretto dopo video

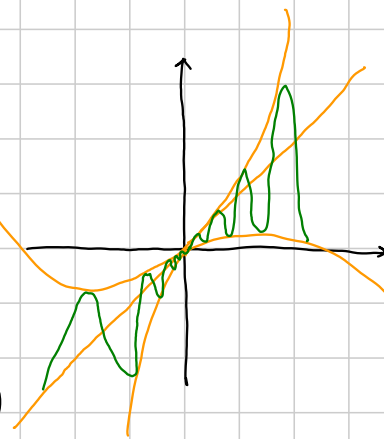
In ogni intervallo $(0, \delta)$ esistono punti, anzi intervalli, in cui $f'(x) > 0$ e intervalli in cui $f'(x) < 0$ (per colpa del termine $7 \cos \frac{1}{x}$)

Pur di scegliere δ piccolo

$f(x) > 0$ in $(0, \delta)$] monotonia
 $f(x) < 0$ in $(-\delta, 0)$] \uparrow

ma f non è monotona in
nessun intervallo $(0, \delta)$ o $(-\delta, 0)$

— o — o —



ANALISI 1 - LEZIONE 040

Titolo nota

11/11/2014

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a, b]$

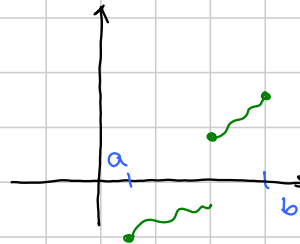
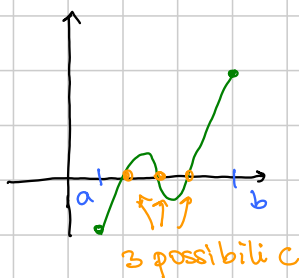
(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (come dire che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ tale che

$$f(c) = 0$$

Oss. ① Non è detto che c sia unico

② L'ipotesi di continuità è essenziale



Dim 1: inf / sup + assurdo wlog $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Pongo

$$c := \inf \{ x \in [a, b] \mid f(x) > 0 \}$$

non vuoto perché almeno c'è $x = b$

Dico che c è il p.to richiesto. Per definizione di inf deve succedere

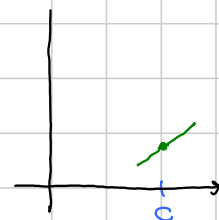
(1) $f(x) \leq 0$ per ogni $x < c$, $x \in [a, b]$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in (c, c + \varepsilon)$ t.c. $f(x) > 0$

Suppongo per assurdo che $f(c) \neq 0$.



Caso 1: $f(c) > 0$ Per continuità $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > 0$ per ogni $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Questo è contro il p.to (1) guardando a sx di c .



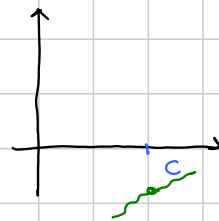
Caso 2: $f(c) < 0$ Per continuità $\exists \delta > 0$ t.c.

$f(x) < 0$ per ogni $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

Questo è contro il p.to (2) guardando a dx di c.

Detto meglio: preso $\varepsilon = \delta$ dovrei trovare

$x \in (c, c+\delta)$ t.c. $f(x) > 0$ e invece non lo trovo.



L'unica possibilità rimasta è che $f(c) = 0$.

Esercizi Capire se si può fare la dim. (e come) iniziando con

$$c := \inf \{ x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \}$$

$$c := \sup \{ x \in [a,b] : f(x) < 0 \}$$

$$c := \inf \{ x \in [a,b] : f(x) \leq 0 \}$$

Fare un esempio in cui le 4 possibilità producano 4 valori di c diversi,

— 0 — 0 —

Dim. 2: inf / sup + diretta Inizio come prima

$$c := \inf \{ x \in [a,b] : f(x) > 0 \}$$

Ora osservo che

(1) $f(x) \leq 0$ per ogni $x \leq c$, quindi

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq 0$$

perché f è continua

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in (c, c+\varepsilon)$ t.c. $f(x) > 0$

Per ogni $n \geq 1$, la applico con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e trovo un p.to

$c_n \in (c, c + \frac{1}{n})$ t.c. $f(c_n) > 0$.

Ora $c_n \rightarrow c$ per i Carabinierei: $c \leq c_n \leq c + \frac{1}{n}$

Ma allora

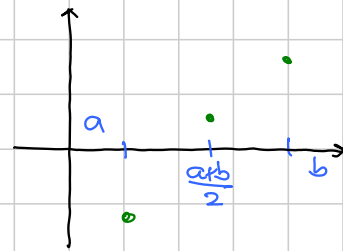
funs. succ. + continuità

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n) \geq 0$$

Avevo $f(c) \geq 0$ e $f(c) \leq 0$, deve essere per forza $f(c) = 0$.

Dim 3: BISEZIONE

Idea: ad ogni passaggio divido l'intervallo in 2 parti e scelgo una delle 2 parti in cui valgono ancora le ipotesi



Pongo $a_0 = a$, $b_0 = b$. Considero $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Se $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) = 0$, allora ho trovato c .

Se $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0$, allora valgono le ipotesi in $\left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2} \right]$
"1" "2"
 a_1 b_1

Se $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0$, allora valgono le ipotesi in $\left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0 \right]$
"1" "2"
 a_1 b_1

Proseguendo in questo modo o ad un certo p.to trovo un c in cui f si annulla, oppure ottengo una succ. di intervalli $[a_n, b_n]$, ognuno uguale a metà del precedente e tali che $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

Idea: gli intervallini convergono ad un p.to in cui f si annulla

Rigorosamente: a_n è debolm. crescente e sup. limitata (da b)
 quindi $a_n \rightarrow a_\infty$ (teo. succ. monotone)

Analogamente: b_n è debolm. decresc. e inf. limitata (da a)
 quindi $b_n \rightarrow b_\infty$

D'altra parte

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (\text{banale induzione})$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$b_\infty - a_\infty = 0$$

quindi $a_\infty = b_\infty$ e d'ora in poi lo chiamo c .

La conclusione è come nella dim. 2

$$\left. \begin{array}{l} \bullet a_n \rightarrow c, f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \\ \bullet b_n \rightarrow c, f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0 \end{array} \right\} f(c) = 0.$$

— o — o —

Oss. In tutte queste dim. il pto c è limite di successioni in cui $f > 0$ e di successioni in cui $f < 0$.

Teorema (Teorema dei valori intermedi) (INTERMEDIATE VALUE THM.)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, b]$

(ii) $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$ (o viceversa)

Allora:

$$\exists c \in (a, b) \text{ t.c. } f(c) = \lambda$$

Dim. Applico il teo. di esistenza degli zeri a $g(x) := f(x) - \lambda$. \square

Corollario 1 Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Siano

$$l := \inf \{ f(x) : x \in (a, b) \} \quad L := \sup \{ f(x) : x \in (a, b) \}$$

(possono essere reali oppure $\pm\infty$)

Allora $\forall \lambda$ t.c. $l < \lambda < L \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = \lambda$

Oss. Altro modo di dire la stessa cosa: f assume tutti i valori strettamente compresi tra il suo \inf ed il suo \sup . I valori l ed L li può assumere o no a seconda dei casi.

Dim. Per la caratterizzazione dell'inf
esiste un p.to $A \in (a,b)$ t.c. $f(A) < \lambda$

Per la caratterizzazione del sup

esiste un p.to $B \in (a,b)$ t.c. $f(B) > \lambda$.

Basta applicare il te. dei valori intermedi nell'intervallo
di estremi A e B (non so quale dei 2 è più grande).



Esempio 1 $f(x) = \log x + x^{28} + \sin(x^2)$

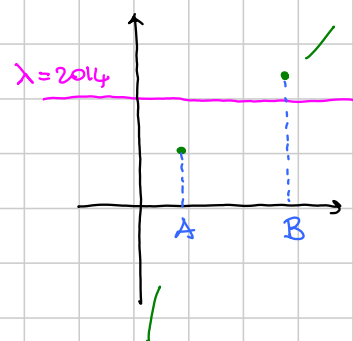
Pensata come $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva.

Basta osservare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Quindi $\inf \{ f(x) : x > 0 \} = -\infty$

$\sup \{ f(x) : x > 0 \} = +\infty$

e quindi f assume tutti i valori
intermedi, cioè tutti i possibili valori
reali.



ANALISI 1

-

LEZIONE 041

Titolo nota

11/11/2014

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

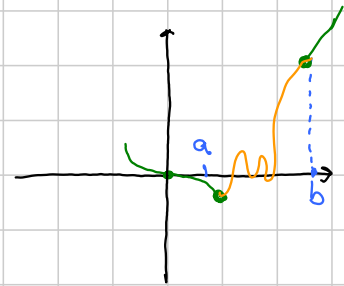
$$\underbrace{x^7 - \sin x^3 + \log(1+x^{20})}_{f(x)} = 2014$$

ha almeno una soluzione reale.

Banale: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (comando x^7)Essendo anche f continua, questo garantisce che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva. Questo garantisce che $f(x) = \lambda$ ha almeno una sol. reale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.Esempio 2 La $f(x)$ di prima è iniettiva?No! Perché $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
quindi $f(x)$ ha in $x=0$ un
flesso a tg. orizz. discendente.

A questo p.to l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha almeno 3 soluzioni reali, quindi f non è iniettivaDim rigorosa che $\exists x > 0$ t.c. $f(x) = 0$ • Dallo studio locale: $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < 0$ in $(0, \delta)$.Prendo $a \in (0, \delta)$ • Dal limite a $+\infty$: $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \geq k$ Prendo $b > a$ e $b > k$ Applico il teo. esistenza degli zeri in $[a, b]$.

Esempio 3 La funzione $f(x) = x + \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva? surgettiva?

Surgettiva SI: basta guardare i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$

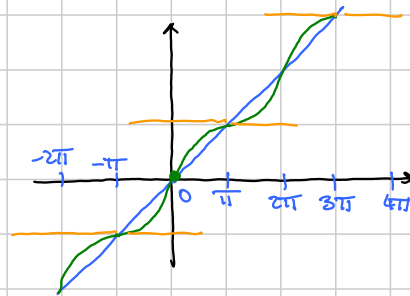
Iniettiva: vedo se per caso è monotona.

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi per lo meno è debolmente crescente. Ora

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
quindi annullamento sporadico, quindi è strett. crescente,
dunque iniettiva.

I p.ti $x = \pi + 2k\pi$
sono tutti p.ti di flesso
a tangente orizz. ascendente.



Generalizzazione Le funzioni $x \pm a \sin x$, $x \pm a \cos x$
sono iniettive e surgettive ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) se e solo se $|a| \leq 1$.
Per $|a| > 1$ viene meno l'iniettività in quanto

$$f'(x) = 1 \pm a \cos x \quad (= 1 \pm a \sin x)$$

e quindi ci sono intervalli con $f'(x) > 0$ e altri con $f'(x) < 0$.

— o — o —

Esempio 4 Una funzione continua che ha un pto di minimo locale non può essere iniettiva.
Idem per il massimo locale.

Idea: devo trovare un valore λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno 2 soluzioni



Dim. Per def. di pto di min. locale

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Prendo $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$. Ora scelgo

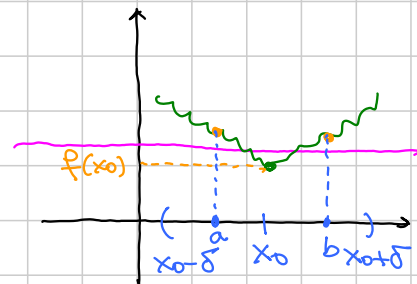
$$f(x_0) < \lambda < \min \left\{ f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right), f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) \right\}$$

Dico che $f(x) = \lambda$ ha almeno 2 soluzioni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

In fatti

- c'è una sol. in (x_0, b) per il teo. dei valori intermedi
- c'è una sol. in (a, x_0) per lo stesso motivo.

— o — o —

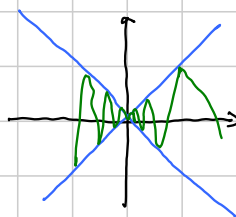


Oss. Se f ha un pto di min. locale in x_0 , NON è detto che

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f \text{ è crescente in } (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f \text{ è decrescente in } (x_0 - \delta, x_0)$$

Esempio $|x| \sin \frac{1}{x}$
Questo non va



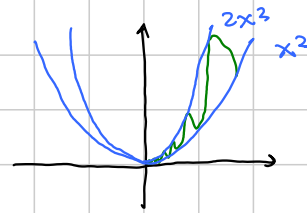
Altro esempio

$$f(x) = x^2 + x^2 \sin^2 \frac{1}{x^{20}}$$

$$f'(x) = 2x + 2x \sin^2 \frac{1}{x^{20}} -$$

$$x^2 \cdot 2 \sin \frac{1}{x^{20}} \cos \frac{1}{x^{20}} \frac{20}{x^{21}}$$

vicino a 0 ci sono valori
per cui è positivo enorme e
valori per cui è neg. enorme



Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

f è continua in $x=0$ e
quindi su tutto \mathbb{R} .

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \quad \text{per } x \neq 0$$



In $x=0$ faccio il rapporto incrementale e diventa

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

Questo mostra che f è derivabile su tutto \mathbb{R} e f' è continua ovunque (anche in 0).

Per inoltanto si dimostra che esistono tutte le derivate e sono del tipo

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

↑ P_k e Q_k polinomi

Conseguenza : f è derivabile infinite volte e $f^{(k)}(0) = 0$
per ogni k .

Quindi ha lo sviluppo di Taylor per ogni n
ed è il polinomio nullo

$$f(x) = o(x^n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Usando questa si possono pensare esempi del tipo

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x} \quad \text{o peggio!}$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 042

Titolo nota

13/11/2014

Max-Min per funzioni di una variabile

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\{f(x) : x \in A\} = f(A) = \text{insieme dei valori assunti da } f(x) \text{ quando } x \text{ varia in } A$$

Def. Si dice che $M = \max\{f(x) : x \in A\}$ se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x \in A$ b.c. $f(x) = M$.

Tutti i p.ti x che soddisfano (ii) si dicono p.ti di max.

Oss. ① Il max non è obbligato ad esistere

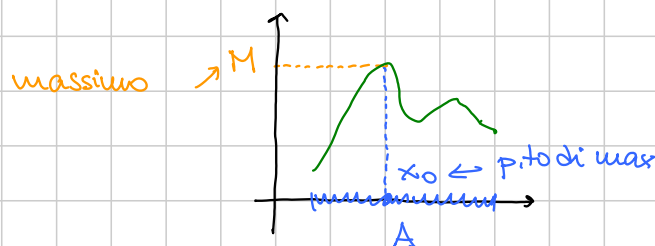
② Se esiste è unico

③ Se anche esiste il max, i p.ti di max possono non essere unici

Achtung! Non confondere MAI

- il massimo M , che è un valore assunto dalla funzione (è "una y ")
- i p.ti di massimo, che sono "le x " in cui il valore M viene raggiunto

Definizioni analoghe valgono per minimo e p.ti di minimo.



Teorema misterioso (WEIERSTRASS edulcorato)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

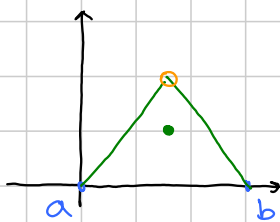
Allora esistono per forza

$$\begin{aligned} & \max \{ f(x) : x \in [a, b] \} \\ & \min \{ f(x) : x \in [a, b] \} \end{aligned}$$

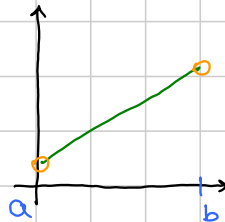
Oss. Le ipotesi importanti sono che

- f è continua
- L'intervallo comprende gli estremi
- L'intervallo è un insieme limitato

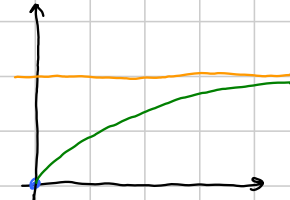
Quando falliscono le ipotesi (almeno una), allora \exists o.e., cioè max/min possono esistere oppure no.

Esempi

Manca continuità
in un p.to



Mancano gli
estremi all'interv.



L'insieme è la
semiretta $[0, +\infty)$

- Esercizi
- ① Esiste $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua che non ha né max, né min?
 - ② Esiste $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua che non ha né max, né min?
 - ③ Esiste $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua per ogni $x \neq \frac{1}{2}$ che non ha né max, né min?

Esempio facile Esiste $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continua (o anche no) che ha sia max sia min.

Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, come trovo max e min?

I candidati ad essere p.ti di max/min. ricadono in queste 3 categorie

- p.ti STAZIONARI INTERNI: p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x) = 0$
- p.ti SINGOLARI INTERNI: p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste
- p.ti del BORDO: $x = a$ e $x = b$.

Operativamente: trovo i p.ti delle 3 categorie, li sostituisco tutti nella funzione: quelli in cui vale di più sono i p.ti di max, quelli in cui vale meno sono i p.ti di min.

Esempio 1 $[a, b] = [0, 2\pi]$, $f(x) = |\sin x|$

Max = 1 p.ti di max: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$

↑
stazionari interni



min = 0 p.ti di min: $x = 0, x = 2\pi, x = \pi$

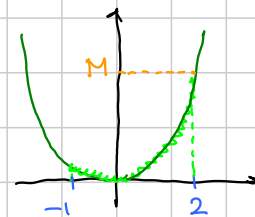
↑
bordo

↑
singolare interno

Esempio 2 $[a, b] = [-1, 2]$, $f(x) = x^2$

Max = 4 p.to di max: $x = 2$

↑
bordo



min = 0 p.to di min: $x = 0$

↑
stazionario interno

Esempio 3 $[0, b] = [0, 1]$ $f(x) = x^3 - x^2$

- stazionari interni : $f'(x) = 0$

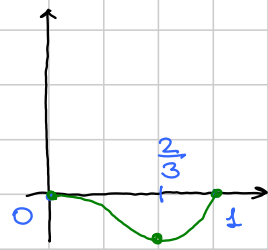
$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

← stazionario interno



- singolari interni : \emptyset (f è derivabile ovunque)

- bordo : $x = 0$ $x = 1$

Ho 3 candidati : $x = 0 \rightsquigarrow f(0) = 0$ ← Max

$$x = 1 \rightsquigarrow f(1) = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \rightsquigarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27} \leftarrow \text{min}$$

Max = 0 p.ti di max : $x = 0$ e $x = 1$
 ↑ bordo ↑

Min = $-\frac{4}{27}$ p.to di min : $x = \frac{2}{3}$ ← staz. interno

Oss. • Non è detto che tutti i candidati siano alla fine p.ti di max / min.

- Se ci sono dubbi su un p.to singolare, tanto vale metterlo in elenco e male non fa.

Esempio $f(x) = x |\sin x|$

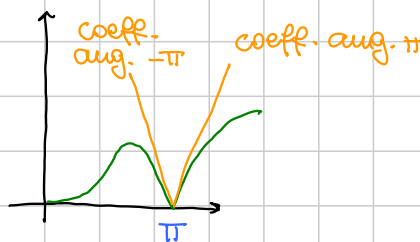
$x = 0$ è un p.to singolare? NO, perché $f'(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h |\sin h|}{h} = 0$$

$x = \pi$ è un p.to singolare? SI, perché

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\pi+h) |\sin(\pi+h)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\pi+h) \sin h}{h} = \pi$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\pi-h) - f(\pi)}{-h} = \dots = -\pi$$



— o — o —

PRIMA VARIANTE DI W. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica e continua.
Allora max e min esistono per forza

Dim. Sia T **UN** periodo qualunque. Allora per W. vero esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in [0, T] \}$$

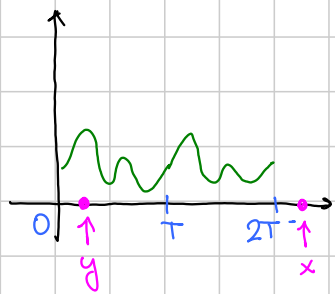
e sia $x_0 \in [0, T]$ un qualunque p.to di min. corrispondente.
Allora dico che

$$m = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

Infatti, preso un qualunque $x \in \mathbb{R}$ esiste un $y \in [0, T]$ tale che
 $x = y + kT$ con $k \in \mathbb{Z}$

Per periodicit a
 $f(x) = f(y) \geq m$

Quindi $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
D'altra parte, gi  sappiamo che $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = m$.



Per dimostrare per bene l'esistenza di y (dato x)
considero i p.ti del tipo kT . Allora per forza
 $\exists k_0 \in \mathbb{Z}$ t.c. $\underline{k_0 T \leq x < (k_0 + 1) T}$
questi intervalli ricoprono la retta

Ora $y := x - k_0 T$.
— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 043

Titolo nota

13/11/2014

WEIERSTRASS GENERALIZZATO Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.**Dim.** Considero $f(213)$.Per il limite a $-\infty$ esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq f(213) \quad \forall x \leq A$$

Per il limite a $+\infty$ esiste $B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq f(213) \quad \forall x \geq B$$

Wlog posso assumere $B > A$, anzi posso assumere $A < 213 < B$

Per W vero esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

Dico che è il minimo anche su tutto \mathbb{R} .Prendo $x \in \mathbb{R}$ e dimostro che $f(x) \geq m$. Ci sono 3 casi

- Se $x \in [A, B]$, allora $f(x) \geq m$ per definizione di m .
- Se $x \leq A$, allora

$$f(x) \geq f(213) \geq m$$

def. di A

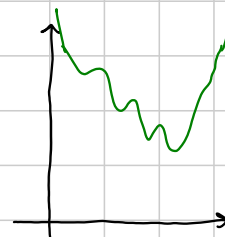
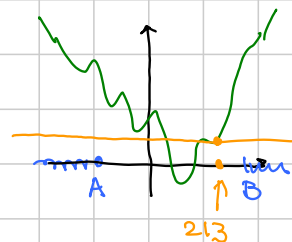
perché $213 \in [A, B]$, quindi
213 ha giocato nella gara
per la definizione di m

- Se $x \geq B$, allora è come il p.to precedente.

Del tutto analogo: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

allora esiste il minimo (esercizio).



Ancora più generale Quello che abbiamo veramente usato è

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua
- esiste un intervallo $[A, B]$ ed esiste $x_0 \in [A, B]$ t.c.

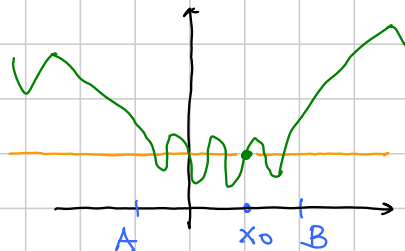
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \geq B$$

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \leq A$$

Sotto queste ipotesi

$$\min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

$$= \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$



— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x^4 - \log(1+x^{20}) + x^7 \sin x$

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva? è surgettiva?

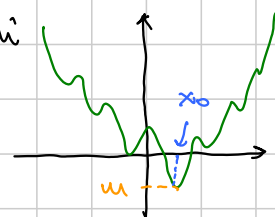
Si vede subito che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Quindi per W. generalizzato esiste il minimo, quindi addio surgettività.

L'iniettività me la gioco sul livello $u+4$, cioè l'equazione

$$f(x) = u+4$$

ha almeno 2 soluzioni, una in $(x_0, +\infty)$ una in $(-\infty, x_0)$ per il teorema dei valori intermedi.



Esempio 2 $f(x) = x^4 - \log(1+x^{20}) + x^7 \cos x$

Come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva? surgettiva?

$\begin{matrix} +\infty & & \text{SI} \\ \downarrow & & \\ \text{in } 0 \text{ si comporta} \\ \text{come } x^4 \Rightarrow \text{min. loc.} \\ \Rightarrow \text{addio iniettività} \end{matrix}$

Per la surgettività considero la successione

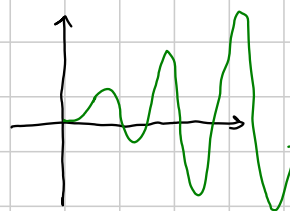
$$a_n = 2\pi n \quad (\cos \text{ si } \cos = 1)$$

$$b_n = 2\pi n + \pi \quad (\cos \text{ si } \cos = -1)$$

Si vede facilmente che

$$f(a_n) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) \rightarrow -\infty$$

Quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ trovo un p.to in cui vale $-$ e un p.to in cui vale $+$. Concluso per esistenza degli zeri.



— o — o —

Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$$

Domanda: esistono max / min ? Non è detto (arctan x)
 può essere surgettiva ? NO

Dim non surgettività Prendo $m = \min\{l_1, l_2\}$. Ho 2 casi

- se $f(x) \geq m$ sempre, allora addio surgettività
- se $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < m$, allora f ammette un minimo $m_1 \in \mathbb{R}$ ($m_1 < m$) e quindi addio surgettività

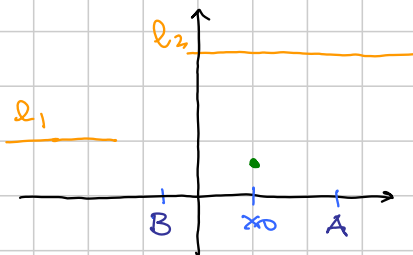
Per il limite a $-\infty$ esiste $B < x_0$

$$\text{t.c. } f(x) > f(x_0) \quad \forall x \leq B$$

Per il limite a $+\infty$ esiste $A > x_0$

$$\text{t.c. } f(x) > f(x_0) \quad \forall x \geq A.$$

A quel p.to il minimo in $[B, A]$ è il minimo generale.



— o — o —

Esercizio Consideriamo l'equazione

$$\underbrace{\sin x - 10^x \cos(x^2) + x^3 \arctan x}_{f(x)} = \lambda$$

È evidente che $\forall \lambda \in \mathbb{R} \exists$ soluzione (suggettività).

$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \lambda \geq \lambda_0$ la soluzione è unica

Derivata: $f'(x) = \cos x +$ roba polinomiale
(meno forte quando $x \rightarrow +\infty$
di $\cos x$)

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

Di conseguenza $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x) > 0$ per ogni $x \geq x_0$
quindi $f: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva.

Mi piacerebbe che esistesse

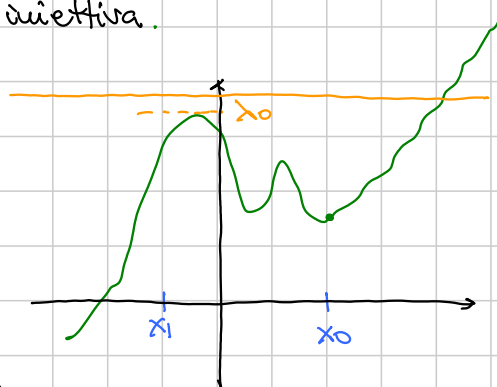
$$\max \{ f(x) : x \leq x_0 \}$$

Se esistesse questo è il λ_0
che sto cercando

Infatti per ogni $\lambda > \lambda_0$ la

soluzione di $f(x) = \lambda$ (che so già

esistere) sarà per forza $\geq x_0$ (prima non può essere perché
 λ_0 è il max) e dopo x_0 è unica per iniettività.



Per dimostrare l'esistenza del max per $x \leq x_0$ bisogna fare
un Weierstrass generalizzato.

Basta prendere $x_1 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \leq x_1$$

e poi dimostrare al solito modo (farlo!) che il max in $[x_1, x_0]$

è in realtà anche il max in $(-\infty, x_0]$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 044

Titolo nota

17/11/2014

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: capire il grafico di una funzione su tutto l'insieme di definizione

Esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

Punto 1 Eventuali simmetrie. In questo caso è dispari
 $f(-x) = -f(x)$

Punto 2 Dove ha senso e dove è continua: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
 In questa zona è continua per teo. sulle funzioni continue

Punto 3 Limiti agli estremi della zona di continuità. In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

(Quelli della seconda riga sono i primi cambiati di segno)

Punto 4 Zeri e segno, cioè risolvere

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

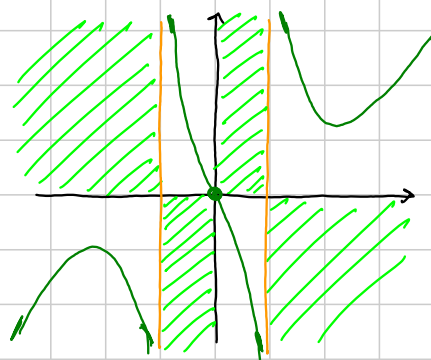
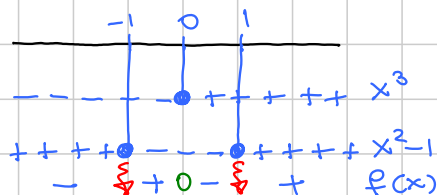


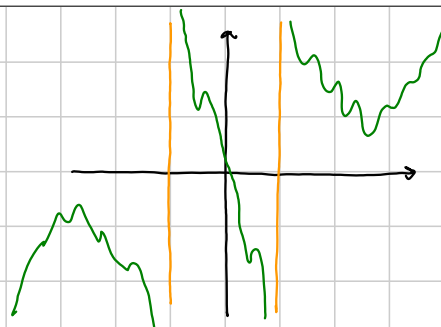
Grafico "supposto"

Punto 5 Seguo della derivata e monotonia.

$f(x)$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$ e

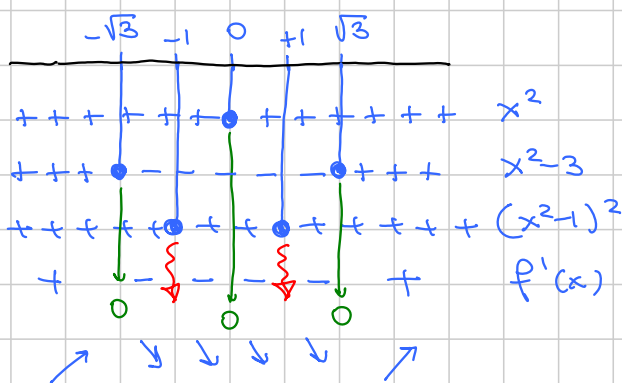
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

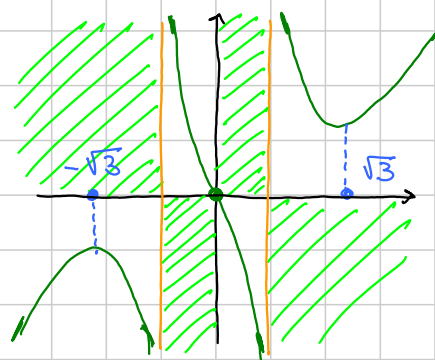


Altro grafico compatibile con i primi 4 pti.

Voglio risolvere $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}, 0$$



Possiamo dire che $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ sono pti di min / max locale.

Punto 6 P.ti di max / min locale e globale (occhio: globale \Rightarrow locale): $x = \sqrt{3}$ (min. loc.)
 $x = -\sqrt{3}$ (max. loc.)
 Globali non ce ne sono.

Complementi al p.to 5 : classi di regolarità

Si dice che $f \in C^0(D)$ se f è continua in ogni pto di $D \subseteq \mathbb{R}$
 (nel vostro caso $f \in C^0(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}}_D)$)

Si dice che $f \in C^1(D)$ se f è derivabile in D e $f' \in C^0(D)$
 " " " $f \in C^k(D)$ se f è derivabile k volte (almeno) in
 D e $f^{(k)} \in C^0(D)$.

Si dice che $f \in C^\infty(D)$ se $f \in C^k(D)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Oss. Da C^1 in poi c'è come prerequisito che D sia **APERTO**, cioè
 che ogni p.to di D sia interno a D , cioè
 $\forall x \in D \exists \delta > 0$ t.c. $(x-\delta, x+\delta) \subseteq D$.

Esempi classici di insieme aperto:

- tutto \mathbb{R}
- intervalli senza estremi: (a, b)
- semirette senza estremo: $(-\infty, a)$ oppure $(a, +\infty)$.

Def. estesa (nel caso di intervalli $[a, b]$ o semirette $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$)
 si dice che $f \in C^1([a, b])$ se $f \in C^1((a, b))$ ed esiste
 $g \in C^0([a, b])$ tale che $g(x) = f'(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.
 (sostanzialmente f' è continua in (a, b) e si può estendere ad
 una funzione continua g definita in tutto $[a, b]$)

Esercizio La definizione sopra è equivalente a definire $f'(x)$
 anche agli estremi come limite del rapp. increm. dx/sx e
 imporre la continuità in $[a, b]$.

Analogamente si definisce $f \in C^k([a, b])$ e C^∞ ...

Nell'esempio possiamo dire che $f \in C^\infty(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}}_{\text{insieme aperto}})$

Punto 7 Asintoti \rightarrow orizzontali
 \rightarrow verticali
 \rightarrow obliqui

Asintoti orizz. La retta $y = l$ è asintoto orizz. per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

La stessa retta è asintoto orizz. per $x \rightarrow -\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

Asintoto verticale La retta $x = x_0$ è asintoto verticale per $f(x)$ se succede almeno una di queste 4 possibilità

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix}$$

Nell'esempio le rette $x = +1$ e $x = -1$ sono asintoti vert.

Asintoto obliquo La retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

La retta ... per $x \rightarrow -\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Come calcolo gli asintoti obliqui? Esistono se e solo se

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R}$$

Dim. Se $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} + \frac{mx + n}{x} = m$$

$\downarrow \frac{0}{+\infty} = 0$
 $\downarrow m$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \boxed{f(x) - mx - n} + n = n$$

↓
0

Altra implicazione: se i due limiti sono reali, allora dal secondo limite deduco che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(f(x) - mx - n)}_n = n - n = 0$$

Oss. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$. Possiamo

$$\text{dedurre che } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

C'è una implicazione: se $\frac{f(x)}{x}$ è una forma del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, allora posso provare con De L'Hôpital e ottenere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1}$$

↑
a patto che il 2° esista.

$$\text{Nell'esempio } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} - x^3 + x}{x^2-1} = 0 \end{aligned}$$

quindi $y = x$ è asintoto obliquo.

ANALISI 1 - LEZIONE 045

Titolo nota

17/11/2014

Precisazioni sugli asintoti obliqui

1° fatto Può essere che $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \text{ non esiste (se esiste è per forza } m)$$

Ad esempio

$$f(x) = x + \frac{\sin(x^{20})}{x}$$

È chiaro che $y = x$ è asintoto obliquo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$,

$$\text{ma } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{20x^{18} \cdot \cos x^{20}}{x} - \frac{\sin(x^{20})}{x^2}$$

\downarrow non esiste \downarrow 0

2° fatto Gli asintoti orizz. sono un caso particolare di asintoto obliquo.

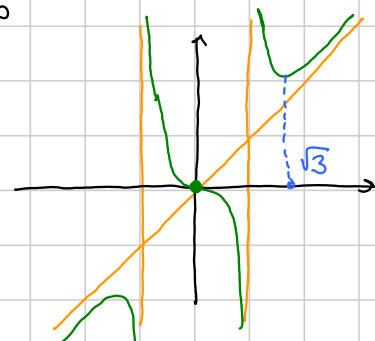
3° fatto Può esistere $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ ma non esserci

l'asintoto obliquo a $+\infty$.

Esempio: $f(x) = 2x + \log x$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

Un asintoto obliquo dà una info sulla crescita della funzione a $\pm\infty$



Nell'esempio, per decidere se $f(x)$ "tende all'asintoto" da sopra o da sotto posso risolvere $f(x) = x$ oppure $f(x) > x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = x \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Punto 8 Convessità / Concavità

"Def. geometrica di convessità"

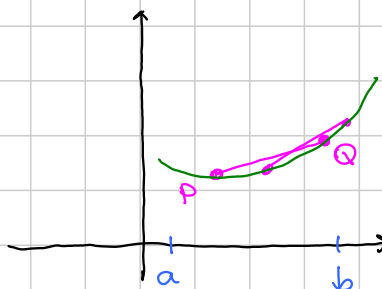
Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se per ogni a e b in D si ha che tutto il segmento $[a, b] \subseteq D$.

Esercizio I sottoinsiemi $D \subseteq \mathbb{R}$ convessi sono tutti e soli quelli del seguente elenco:

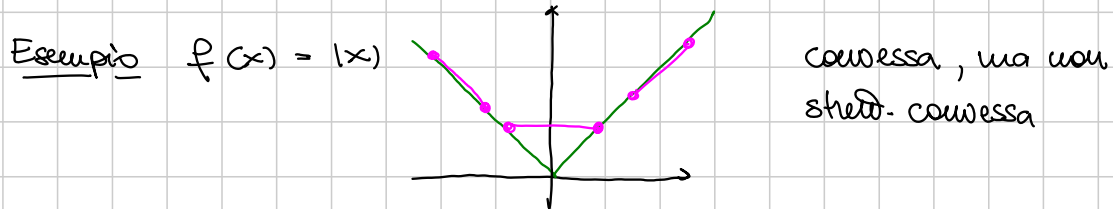
- banali: \emptyset , \mathbb{R} , un solo p.to
- intervalli, con o senza estremi
- semirette, con o senza estremi

Idea della dim.: prendo $\sup D$ e $\inf D$ e mostro che tutti i p.ti strettamente compresi stanno in D .

"Def" Sia D un insieme convesso. Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti P e Q del grafico, tutto il segmento PQ sta "sopra" il grafico.
Si dice concava se PQ sta sempre "sotto" il grafico, cioè se $-f(x)$ è convessa.



Precisazione : quella data è la definizione di debolmente convessa. Strettamente convessa vuol dire che grafico e segmento si incontrano solo agli estremi.



$f(x) = x^2$ non strett. convessa.

Teorema misterioso (convessità e derivata seconda)

Sia D un insieme convesso e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f''(x)$ esista in D .

Allora valgono le seguenti implicazioni:

(i) Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$, allora f è convessa in D

(ii) Se f è convessa in D , allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$

(iii) Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$, allora f è strett. conv. in D

(iv) Se f è strett. conv. in D , allora $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$

NO

Esempio $f(x) = x^4$ è strett. conv. in \mathbb{R} , ma $f''(x) = 12x^2$ si annulla in $x=0$.

Achtung! Una funzione può essere convessa e avere $f'(x)$ che non esiste da qualche parte (figuriamoci $f''(x)$)
(ad esempio $f(x) = |x|$ ha f' che non esiste in $x=0$).

Teorema misterioso (convessità e retta tangente)

Il grafico di una funzione convessa sta sopra tutte le rette tangenti che esistono.

Oss. Una funzione convessa ma non strettamente convessa ha il grafico con dei tratti rettilinei.

In questi tratti $f''(x) \equiv 0$,

quindi vale una specie di monotonia 3:

se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e non esiste

nessun intervallo $[a, b] \subseteq D$ in cui $f''(x) = 0$ a tappeto,

allora $f(x)$ è convessa strettamente in D .



Esempio $f(x) = \arctan x$

Ci aspettiamo

- convessa in $(-\infty, 0]$
- concava in $[0, +\infty)$

Si può verificare con $f''(x)$



Def. Si dice che x_0 è un p.to di flesso per $f(x)$ se esiste $\delta > 0$ t.c.

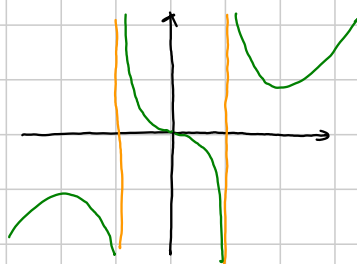
f è convessa in $[x_0, x_0 + \delta]$ } o viceversa
 f è concava in $[x_0 - \delta, x_0]$ }

Nei p.ti di flesso la retta tangente (posto che esista) attraversa il grafico (cioè $f(x)$ sta sopra a dx e sotto a sx , o viceversa).

Tornando all'esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, ci aspettiamo che sia

- convessa in $(-1, 0]$ e in $(1, +\infty)$
- concava in $(-\infty, -1)$ e in $[0, 1)$.

Ci aspettiamo che $x = 0$ sia l'unico p.to di flesso

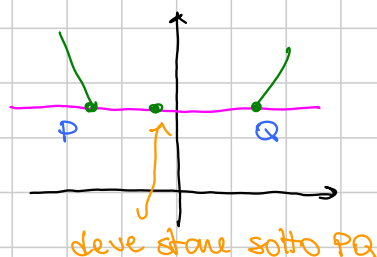


Oss. In un p.to di flesso la derivata 2^a, se esiste, si annulla.
 Non vale il viceversa, cioè può essere $f''(x_0) = 0$ senza che
 x_0 sia un p.to di flesso.

(Pensare a $f(x) = 3x + x^4$)

Esercizio Se $f(x)$ è strett. convessa, allora l'eq.
 $f(x) = \lambda$
 ha al massimo 2 soluzioni.

Dim. Se ne avesse 3...



Domanda: se $f(x)$ e $g(x)$ sono strett. convesse e
 non coincidono in nessun intervallo, cosa possiamo
 dire del numero di soluzioni di

$$f(x) = g(x)$$

Niente! Possono anche essere infinite

Esempio: $f(x) = 7x^2$ $g(x) = 7x^2 + \sin x$

ANALISI 1 -

LEZIONE 046

Titolo nota

18/11/2014

Motivi per fare uno studio globale di funzioni:

- decidere iniettività / surgettività
- calcolare inf / sup / max / min di una $f(x)$ in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$
- risolvere equazioni del tipo $f(x) = 0$ o $f(x) = \lambda$
- risolvere disequazioni del tipo $f(x) > 0$.

Achtung! È pericoloso risolvere equazioni / disequazioni del tipo

$$f(x) = g(x) \qquad f(x) > g(x)$$

che comportano il confronto tra 2 grafici.

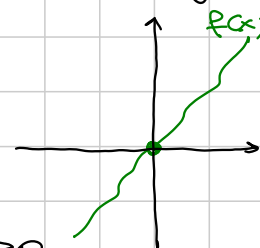
Molto meglio ridursi a $\underbrace{f(x) - g(x)}_{\varphi(x)} = 0$, $\underbrace{f(x) - g(x)}_{\varphi(x)} < 0$

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\underbrace{2x + \sin x}_{\varphi(x)} > 0$

Osservo che $f(0) = 0$ e che $f'(x) = 2 + \cos x \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f(x)$ è strett. cresc., quindi

$f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

Conclusione $2x + \sin x > 0 \Leftrightarrow x > 0$



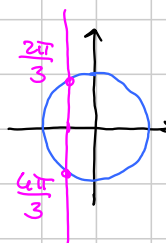
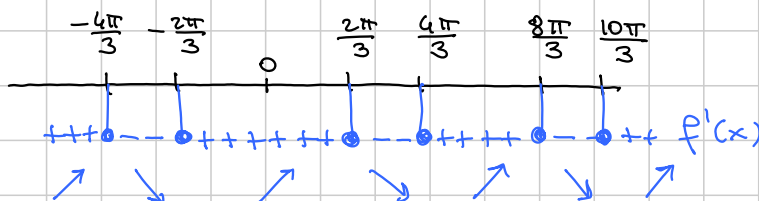
Esempio 2 Risolvere la disequazione $\underbrace{x + 2\sin x}_{\varphi(x)} > 0$

Ora non ho la monotonia.

$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$

Provo a capire il segno

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$$



Osservo che $f(0) = 0$ e che f è dispari.

È necessario calcolare

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 0$$

In tutti i successivi p.ti di min. loc., che sono $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) sarai

$$f\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) > 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}}$

Zoommando indietro il grafico è così →

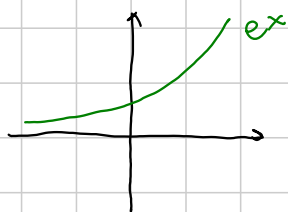
Conclusione: $x + 2 \sin x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

— 0 — 0 —

Esempio 3 Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

Se uno confronta i grafici



Congettura:

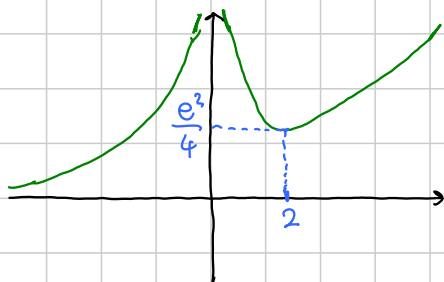
- se $\lambda < 0$ nessuna soluzione
- $\lambda > 0$ piccolo \rightsquigarrow 1 soluzione
- $\lambda > 0$ grande \rightsquigarrow 2 soluzioni

Metodo sistematico: studio

$$\frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

$f(x)$

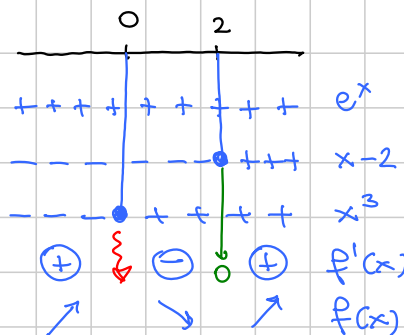
Oss.: dividendo per x^2 non پیدا sol. perché $x = 0$ non è mai sol.



Calcolo $f'(x)$ per confermare il grafico.

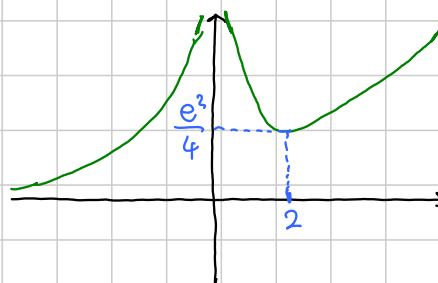
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

Studio il segno di $f'(x)$,
che conferma il grafico e
individua il p.to di
minimo locale in $x=2$
con valore $\frac{e^2}{4}$.

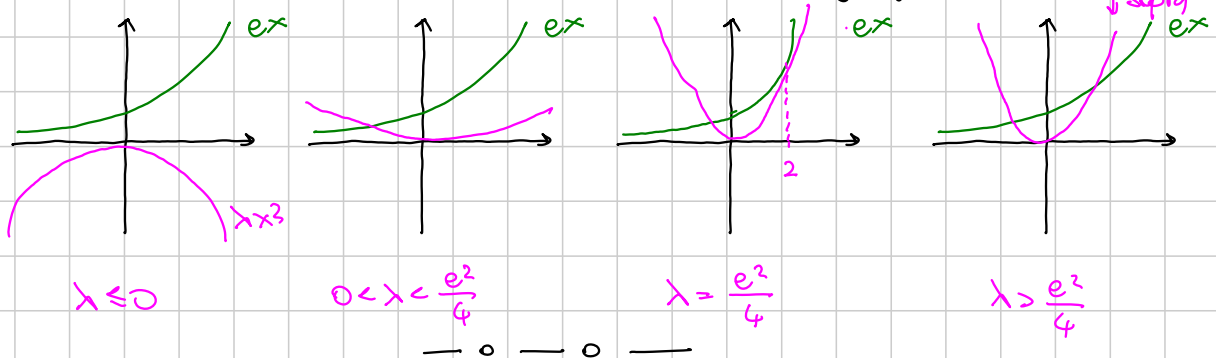


Soluzioni di $f(x) = \lambda$

- $\lambda \leq 0 \rightsquigarrow 0$ sol.
- $0 < \lambda < \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 1$ sol.
- $\lambda = \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 2$ sol.
- $\lambda > \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 3$ sol.



Ora possiamo veramente capire il confronto di grafici

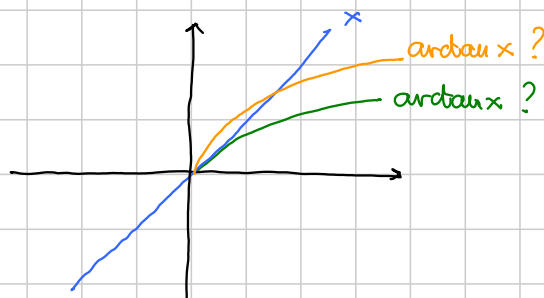


Esempio 4 Risolvere la disuguaglianza $\arctan x \leq x$

Se confronto i grafici, è pericoloso

Per decidere, studio la funzione

$$f(x) = x - \arctan x$$



Osservo che $f(0) = 0$, $f(x)$ è dispari e

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = + \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

e $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, quindi c'è annullamento sporadico.

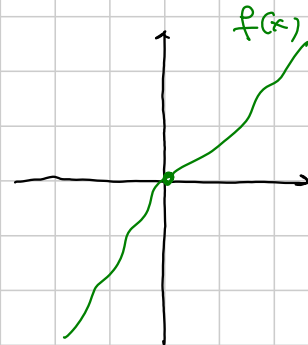
Monotonia 3 $\Rightarrow f(x)$ è strett. crescente

quindi

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{Morale: } \arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{con uguaglianza se e solo se } x = 0.$$



Allo stesso modo si dimostrano le seguenti disuguaglianze:

$$\sin x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\log(1+x) \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$e^x \geq 1+x \Leftrightarrow x \geq 0$$

} inoltre vale il segno di uguale se e solo se $x = 0$

Si potrebbe andare avanti:

$$e^x \geq 1+x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x \geq 0$$

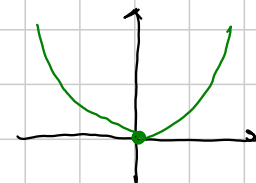
$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con l'uguaglianza se e solo se } x = 0$$

Volendo dimostrare quest'ultima, studio $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0$

Osservo che $f(x)$ è pari, $f(0) = 0$, e $f'(x) = x - \sin x \geq 0$ per ogni $x \geq 0$ (per disug. precedente) con $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Quindi $f(x)$ è strett. cresc. per $x \geq 0$

$$\text{Analogo: } \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow x \geq 0$$



ANALISI 1 -

LEZIONE 047

Titolo nota

18/11/2014

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$.

Considero $f(x) = x - \arctan(x^2)$.

Se fosse monotona...

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

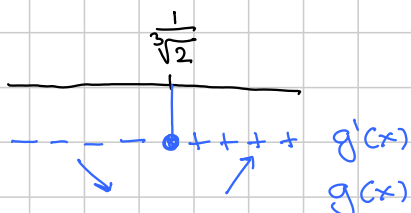
Den. > 0 sempre, quindi il segno dipende dal segno di $1+x^4-2x$.

Pongo $g(x) = x^4 - 2x + 1$ e studio questa

$$g'(x) = 4x^3 - 2$$

Ci sono vari modi di uscire.

1° modo: standard Segno di $g'(x)$



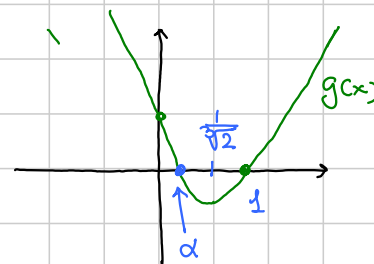
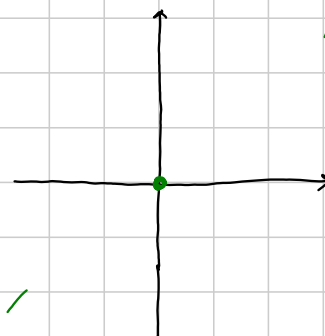
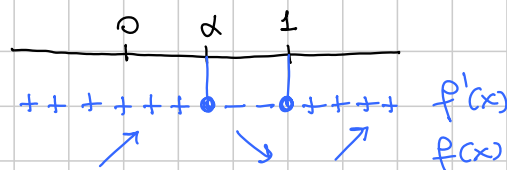
Dal grafico di $g(x)$ abbiamo dedotto che esiste $\alpha \in (0, 1)$ b.c.

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha) \cup (1, +\infty)$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\alpha, 1)$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ oppure } x = 1$$

Dal segno di $g(x)$ deduciamo quello di $f'(x)$, cioè



$$\alpha \in (0, 1)$$

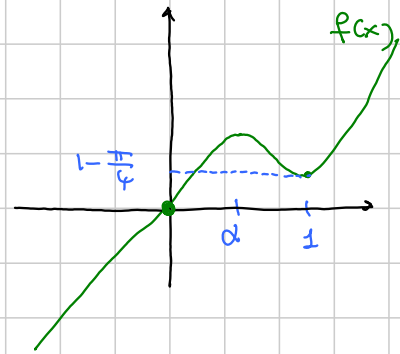
Punto decisivo: calcolare

$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

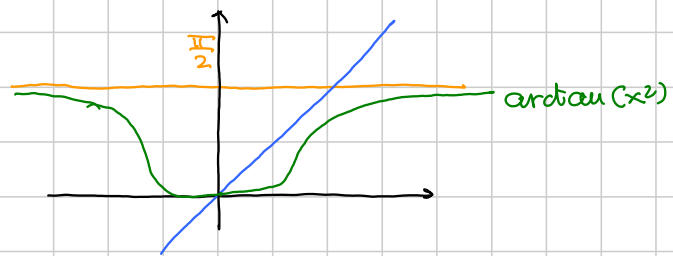
Conclusione

$$\arctan(x^2) \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

con segno di uguale solo per $x=0$.



Confronto tra grafici



2° modo: risparmiioso

Per $x < 0$ è ovvio che $\arctan(x^2) > x$

Per $x \in (0,1)$ abbiamo

$$\arctan(x^2) < \arctan x < x$$

↑
 $x^2 < x$ e \arctan è
 monotona

↑
 Disug. classica

per $x > 1$ faccio il conto e $x - \arctan x > 0$

per $x > 1$ riprendo le funzioni precedenti e ho $g'(x) > 0$, quindi $g(x)$ strett. crescente, quindi $g(x) > g(1) = 0$, quindi $f'(x) > 0$, quindi $f(x) > f(1) > 0$, da cui

$$x > \arctan(x^2).$$

Esempio 2 Dimostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$e^x \geq c(x^2 - 7) \quad \forall x \geq 0$$

Idea: isolare c .

$$\frac{e^x}{x^2 - 7} \geq c$$

↑
 così non è equivalente
 perché non posso dividere per roba di segno ignoto

$$\frac{1}{c} \geq (x^2 - 7)e^{-x}$$

↓ ok perché ho diviso per e^x

Volevo salvare il primo approccio, posso dire

- per $x \in [0, \sqrt{7}]$ ho LHS $> 0 \geq$ RHS per ogni $c > 0$, quindi la disug. data è gratis
- per $x > \sqrt{7}$ posso dividere e mi riduco a trovare $c > 0$ t.c.

$$\frac{e^x}{x^2-7} \geq c \quad \text{per ogni } x > \sqrt{7}$$

Seguiamo la via $\boxed{(x^2-7)e^{-x}} \leq \frac{1}{c}$
 \downarrow
 $f(x)$

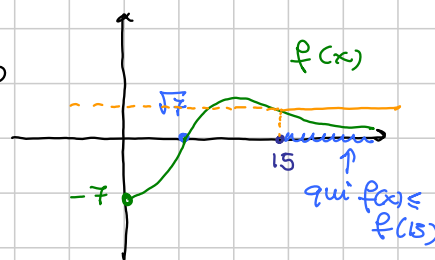
Mi basta dimostrare che $f(x)$ ha massimo per $x \geq 0$ e poi come $\frac{1}{c} \geq \max$ (in realtà basterebbe

$$\sup \{ f(x) : x \geq 0 \} < +\infty).$$

A questo punto basta osservare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ per dedurre

che $f(x)$ è limitata inferiormente e superiormente per $x > 0$.

Dalle varianti di Weierstrass segue che $f(x)$ ammette pure max/min in $x \geq 0$



Dim. che esiste il max Prendo $x = 15$, cioè un p.to in cui f è > 0 .

Poiché $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$, dalla def. di

limita ho che esiste $k \geq 15$ tale che $f(x) \leq f(15)$ per ogni $x \geq k$

Ora applico W. in $[0, k]$ e trovo il max in $[0, k]$ che è anche max in $[0, +\infty)$ (vedi lezione corrispondente).

Nell'esempio il max si calcola pure

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2-7)e^{-x} = (2x-x^2+7)e^{-x}$$

Quindi $f'(x)$ si annulla dove si annulla $x^2 - 2x - 7$

$$x = 1 + \sqrt{8} = 1 + 2\sqrt{2}$$

Conclusione: il max si ha per $x = 1 + \sqrt{8}$ e vale $f(1 + \sqrt{8})$.

Ponendo $\frac{1}{c} = \max$ si trova non solo che esiste $c > 0$ ma si trova il c ottimale per cui vale.

Esempio 3

- ① $\exists c > 0$ t.c. $x^2 + 1 \geq c (e^{3x} + \arctan x) \forall x \in [0, 7]$ OK
- ② $\exists c > 0$ t.c. $x^2 - 1 \geq c (e^{3x} + \arctan x) \forall x \in [0, 7]$ NO
- ③ $\exists c > 0$ t.c. $x^2 + 1 \geq c (e^{3x} + \arctan x) \forall x \geq 0$ NO

La ③ è NO perché dovrebbe essere $\frac{1}{c} \geq \frac{e^{3x} + \arctan x}{x^2 + 1}$ per ogni $x \geq 0$ e se faccio il limite per $x \rightarrow +\infty$ il RHS $\rightarrow +\infty$, quindi è assurdo

La ① è OK. La $f(x)$ è continua in $[0, 7]$ per il teorema, quindi per W. ha max e basta prendere $\frac{1}{c} \geq \max$

La ② è NO perché per $x \in (0, 1)$ abbiamo LHS < 0 e RHS > 0 .
Gli approcci basati su isolare c hanno problemi di tutti i tipi

— o — o —

ANALISI 1

-

LEZIONE 048

Titolo nota

20/11/2014

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Si dice che f è lipschitziana in A se esiste una costante L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Oss. Se una certa L va bene, allora tutte le $L' \geq L$ vanno bene ugualmente.

La più piccola L che posso mettere si dice costante di Lip. di f in A ed è data dalla formula

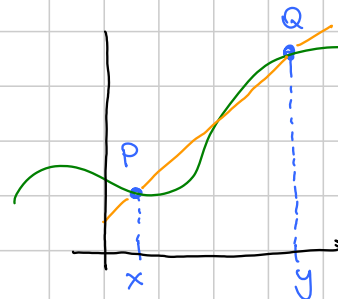
$$L = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x \in A, y \in A, x \neq y \right\}$$

Interpretazione geom. Per $x \neq y$ divido e ottengo

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L$$

coeff. ang. retta PQ

$$\forall x \in A \quad \forall y \in A \quad x \neq y$$



Quindi: f è Lip. in A se e solo se
le rette che congiungono 2
p.ti qualunque del grafico
hanno pendenza limitata.

È come dire che il grafico ha pendenza limitata.

Esempio 1 $f(x) = x^2$ è lip. su \mathbb{R} ? NO
 Pongo $x=0$ e $y=n$ nella definizione

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$$

$$n^2 \leq Ln \quad \text{quindi} \quad n \leq L \quad \text{che è impossibile} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In alternativa potevo usare $x=n, y=n+1$

Esempio 2 $f(x) = x^2$ è lip. in $[-30, 30]$? SI

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 60 \text{ nell'intervallo dato}} |x-y| \leq 60|x-y|$$

Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[0, 1]$? NO

Sostituisco $x=0$ e $y=\frac{1}{n}$ nella def.:

$$\left| \sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{0} \right| \leq L \left| \frac{1}{n} - 0 \right|, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq L \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{cioè}$$

$$\sqrt{n} \leq L \quad \text{che è impossibile quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

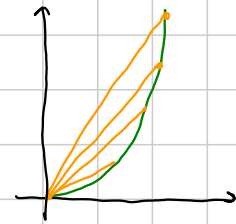
Esempio 4 $f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[1, +\infty)$? SI

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \stackrel{?}{\leq} L|x-y|, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \stackrel{?}{\leq} L|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}|$$

è equivalente a $1 \leq L|\sqrt{x} + \sqrt{y}|$ e questa è vera anche con $L = \frac{1}{2}$ in quanto

$$1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \leq \frac{1}{2} |\sqrt{x} + \sqrt{y}|$$

↑
 $x \geq 1$
 $y \geq 1$



Oss. Le funzioni Lip. non è detto che siano derivabili.

Ad esempio, $f(x) = |x|$ è lip. ma non derivabile in $x=0$



$$||x| - |y|| \leq \underset{L=1}{|x-y|}$$

Dim. Partiamo dalla disuguaglianza triangolare

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$$

(si dimostra distinguendolo un po' di casi). Pongo $a = y$, $b = x - y$

Ottengo

$$|x| \leq |y| + |x-y|$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x-y| \quad (\text{utile se } |x| \geq |y|)$$

Ponendo $a = x$ e $b = y - x$ ottengo

$$|y| \leq |x| + |y-x|$$

da cui

$$|y| - |x| \leq |x-y| \quad (\text{utile se } |x| \leq |y|)$$

Teorema Supponiamo che A sia un intervallo, una semiretta, oppure tutto \mathbb{R} . Supponiamo che $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sia derivabile.

Allora

$$f \text{ è lip. in } A \Leftrightarrow |f'(x)| \text{ è limitata in } A$$

e in tal caso $L = \sup \{|f'(x)| : x \in A\}$

Dim. Ipotesi: f derivabile e Lip.

Tesi: derivata limitata dalla costante di Lip.

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq L$$

poiché

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq \frac{L|h|}{|h|}$$

← sappiamo già che $f'(x_0)$ esiste

Seconda implicazione Ipotesi: $L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\} < +\infty$

Tesi: f è Lip. in A

$$f(y) - f(x) = f'(c) (y-x) \quad \text{Lagrange}$$

↑
sta tra x e y

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y-x| \leq L |y-x|$$

Oss. → per poter applicare Lagrange serve che f sia definita in tutto l'intervallo tra x e y , quindi l'insieme A deve essere convesso

Resta da verificare che L è la più piccola costante che va bene.

Se esistesse una costante $L_1 < L$ tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq L_1 |y-x| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A,$$

allora per l'implicazione precedente potrei concludere che

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} \leq L_1 < L$$

il che contraddice la def. di L .

Esempio 2bis $f(x) = x^2$ è Lip. in $[-30, 30]$

$f'(x) = 2x$, quindi la costante è

$$\sup\{|2x| : x \in [-30, 30]\} = 60$$

Esempio 4 bis $f(x) = \sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \geq 1 \} = \sup \{ \frac{1}{2\sqrt{x}} : x \geq 1 \} = \frac{1}{2}$$

Disuguaglianze classiche di Lipschitzianità

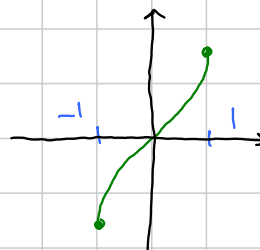
$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &\leq |x - y| & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ |\cos x - \cos y| &\leq |x - y| & \text{"} \\ |\arctan x - \arctan y| &\leq |x - y| & \text{"} \end{aligned}$$

Seguono banalmente dall'essere funzioni con derivata ≤ 1 .

Esempio 5 $f(x) = \arcsin x$ è Lip. in $[-1, 1]$? No

Se lo fosse la sua derivata, dove esiste, sarebbe $\leq L$ e questo non è vero

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

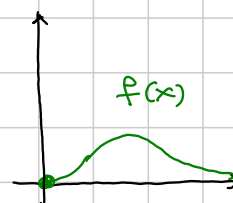


che ha problemi quando $x \rightarrow \pm 1$

Oss. Se f è Lip. in A e $f'(x)$ esiste anche solo in un pto $x_0 \in A$, allora per forza $|f'(x_0)| \leq L$ (questo perché i rapporti incrementali sono limitati)

Esempio 6 $f(x) = x^{20} e^{-x}$ è Lip. in $[0, +\infty)$?

$$f'(x) = 20x^{19} e^{-x} - x^{20} e^{-x}$$



Basta ora osservare che $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, quindi

per le varianti di Weierstrass $|f'(x)|$ è limitata superiormente, quindi f è Lip.

ANALISI 1 — LEZIONE 049

Titolo nota

20/11/2014

Esercizio 1 Dimostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\cos^{22} x + \sin^{2014} x \geq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim. Pongo $f(x) = \cos^{22} x + \sin^{2014} x$. Si tratta di una funzione periodica (2π è un periodo).

Continua + periodica \Rightarrow esiste

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} = \min \{ f(x) : x \in [0, 2\pi] \} = c$$

Resta da verificare che $c > 0$.

Ora $c = f(x_0)$ per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$f(x_0) > 0$$

perché se fosse $f(x_0) = 0$ vorrebbe dire che $\sin x_0 = \cos x_0 = 0$ il che non è possibile.

Dim. sbagliata $f(x) > 0$ sempre (perché $\sin x$ e $\cos x$ non si annullano contemporaneamente) quindi $c > 0$.

Oss. $f(x) = \frac{1}{x} > 0$ per ogni $x > 0$, ma non è vero che

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } \frac{1}{x} \geq c \quad \forall x > 0.$$

È fondamentale l'esistenza del minimo.

Esercizio 2 Dim. che esiste $c > 0$ t.c.

$$\frac{1}{\sin x + 2 \cos x} \leq c \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Dim. Prendo $f(x) = \sin x + 2 \cos x$,
 ≥ 0 ≥ 0
 nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$

Poiché $\sin x$ e $\cos x$ sono ≥ 0 e non si annullano contemporaneamente, per forza $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
 Inoltre

$$f(x) \geq \min \{ f(x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \} = m > 0$$

perché $m = f(x_0) > 0$

quindi

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=c}$

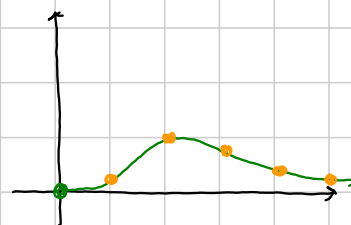
Esercizio 3 Calcolare inf/sup/max/min dell'insieme

$$\left\{ \underbrace{\frac{n^3}{2^n}}_{a_n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{8}{4}, \frac{27}{8}, \dots \right\}$$

Possibile approccio: studio la funzione $f(x) = x^3 2^{-x}$ per $x \geq 0$

Parte facile: inf = 0 e min non esiste

$a_n \rightarrow 0$ e $a_n > 0$ sempre. Questo basta per concludere che inf = 0 e min. N.E.



Quasi gratis: esiste il max. Infatti

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \text{ e } a_n \geq \frac{1}{2} \right\}$$

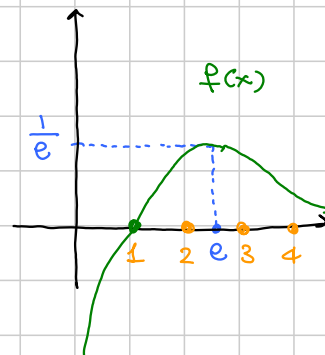
è un insieme finito perché poiché $a_n \rightarrow 0$ sarà $a_n < \frac{1}{2}$ definitivamente. Quindi per il max se la guardo un numero finito di termini,

Esercizio 4 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$ chi è più grande?

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n} \quad \text{quindi studio}$$

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad \text{per } x \geq 1$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$



Per il max se la gioiamo $n=2$ e $n=3$: $\sqrt{2} \stackrel{?}{<} \sqrt[3]{3}$ elevo alla 6ª
 $8 < 9$ OK.

Quindi il max è $\sqrt[3]{3}$. Ora sappiamo anche che la successione
 $a_n = \sqrt[n]{n}$ è strett. dec. per $n \geq 3$
 $-o-o-$

Esercizio 5 Dimostrare che l'equazione

$$\log(3+x^{20}) + x \sin(x^2) = 2014$$

ha infinite soluzioni reali (sarebbe lo stesso con ogni λ invece di 2014)

[se fosse $\log(3+x^{20}) + x = 2014$ sarei sicuro che c'è un'unica soluzione $x > 0$ (per le soluzioni $x < 0$ bisognerebbe fare un conto): quando il lim a $+\infty$ e la monotonia].

Fatto generale. Se $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ed esistono due successioni $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ t.c.

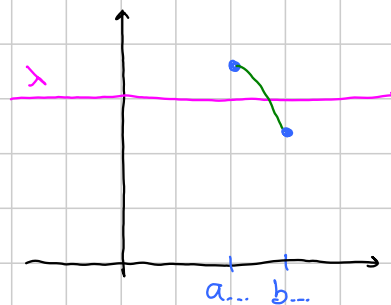
$$f(a_n) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) \rightarrow -\infty,$$

allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha infinite soluzioni.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(a_{n_1}) > \lambda$$

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(b_{k_1}) < \lambda, k_1 > n_1$$

Allora esiste x compreso tra a_{n_1} e b_{k_1}
tale che $f(x) = \lambda$.

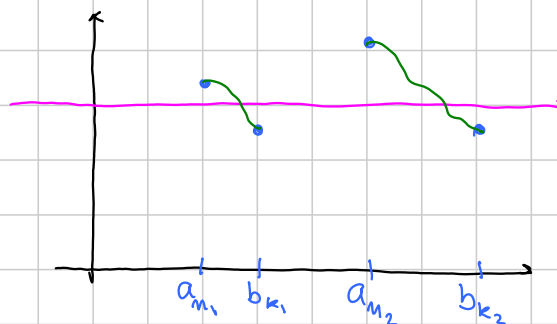


$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n_2 > k_1 \text{ e } f(a_{n_2}) > \lambda$$

$$\exists k_2 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } k_2 > n_2 \text{ e } f(b_{k_2}) < \lambda$$

Allora esiste x in $[a_{n_2}, b_{k_2}]$ t.c. $f(x) = \lambda$

e così via.



ANALISI 1 -

LEZIONE 050

Titolo nota

24/11/2014

Formula di Taylor con resto di LagrangeCaso con centro in $x_0=0$

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

\uparrow funzione "strana" \uparrow polinomio \uparrow resto alla PEANO

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

resto di Lagrange

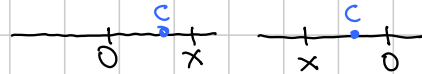
è come se fosse il termine successivo solo con la derivata calcolata in c e con x_0 .

Teorema misterioso Sia $\delta > 0$ e sia $f: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia derivabile $(n+1)$ volte in $(-\delta, \delta)$. Sia $n \in \mathbb{N}$.

Sia $P_n(x)$ il pol. di Taylor di f di grado $\leq n$ dato dalla solita formula.

Allora per ogni $x \in (-\delta, \delta)$ esiste c compreso tra x e 0 tale che vale la formula di sopra.



Oss. Se prendo $n=0$ ottengo $P_0(x) = f(0)$ e la formula diventa

$$f(x) = f(0) + f'(c)x$$

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$$

e questo è il teo. di Lagrange.

Esempio 1 Approssimare $\sin \frac{1}{10}$ con una frazione.

Uso Taylor per approssimarlo con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5$$

Se al posto di $\sin \frac{1}{10}$ io scrivo $\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = \frac{599}{6000}$

commetto un errore che è $\frac{f^{(5)}(c)}{120} \cdot \frac{1}{10^5}$.

Per non conoscendo c , so che $|f^{(5)}(c)| = |\cos c| \leq 1$, quindi

$$|\text{errore}| \leq \frac{1}{12.000.000}$$

$$\sin \frac{1}{10} = 0,099833\boxed{4}1\dots \qquad \frac{599}{6000} = 0,099833\boxed{3}$$

— 0 — 0 —

Oss. La formula vale anche con centro x_0 generico:

$$f(x_0 + R) = P_m(R) + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} R^{m+1}$$

dove c sta tra x_0 e $x_0 + R$.

— 0 — 0 —

Esempio 2 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1° modo: porto a sx e faccio lo studio di funzione.

2° modo: Taylor-Lagrange con $m=1$

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2$$

$$e^x = 1+x + \frac{e^c}{2} x^2 \geq 1+x \quad (\text{la disug. è stretta se } x \neq 0)$$

≥ 0

Esempio 2bis Se uso ordine 2 ottengo

$$e^x = 1+x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} e^c x^3$$

ha lo stesso segno di x

e di conseguenza

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \geq 0$$

Esempio 3 Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dim Chiamo $S_n(x)$ la somma parziale n -esima, che in realtà è $P_n(x)$ (il pd. di Taylor di grado n di $f(x) = e^x$)
Per Taylor-Lagrange

$$e^x - S_n(x) = e^x - P_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\text{quindi } 0 \leq |e^x - S_n(x)| \leq \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

non so dove sta c ,
ma sta tra 0 e x ,
quindi $c \leq |x|$

Fissato x , è ovvio che RHS $\rightarrow 0$, quindi LHS $\rightarrow 0$

Esempio 4 Allo stesso modo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

Infatti

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} |x|^{2n+2}$$

derivata $(2n+2)$ -esima
in un p.to c

Ancora una volta, fissato x il resto tende a 0 ($x \in \mathbb{R}$ qualunque)

Def. Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte, si dice **SERIE DI TAYLOR** di $f(x)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c_0)}{n!} x^n$$

serie di potenze:
"polinomio di grado infinito"

cioè la serie (in cui x è pensato come parametro) che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Fatto: con Taylor-Lagrange si può dimostrare che, per opportuni valori della x e per opportune $f(x)$, la serie converge proprio ad $f(x)$.

Def. Quando succede che $f(x)$ è la somma della sua serie di Taylor in un certo intervallo si dice che $f(x)$ è **ANALITICA** in quell'intervallo e si indica con

$$f \in C^{\omega}((a,b))$$

Esempio $f(x) = \log(1+x)$

Dove è vero che $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$?

Certamente non per $x > 1$, perché lì la serie non converge

Idem per $x \leq -1$,

Per $x \in (-1, 1)$ posso applicare Taylor-Lagrange (basta usare l'espressione per la derivata $(n+1)$ -esima,

In particolare

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots = \log \frac{4}{3}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 051

Titolo nota

24/11/2014

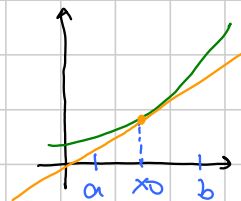
Esempio 1 Sia $f \in C^2((a,b))$ una funzione convessa, sia $x_0 \in (a,b)$. Allora $f(x)$ sta sopra la retta tangente in x_0 .

Dim. Taylor-Lagrange con $n=1$ e centro in x_0

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(c)}{2} h^2$$

$\begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$

$$\geq f(x_0) + f'(x_0)h$$



Volendo si può porre x_0+h e ottenere

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{eq. retta tangente al grafico in } x_0}$$

Oss. La conclusione vale per f convessa anche se non è C^2 , ma la dimostrazione è diversa.

Esempio 2 Taylor-Lagrange di $f(x) = e^x$ di ordine n :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Domanda: fissato $x \in \mathbb{R}$, calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Prima osservazione: c_n è unico perché e^x è iniettiva (vale tutte le volte che la derivata $(n+1)$ -esima è iniettiva).

Seconda osservazione: volendo c_n si ricava, ma il numero di termini cresce di volta in volta.

Ora scelgo se usare $\tan(\arctan x) = x$ o viceversa

$$\tan(\arctan x) = \arctan x + a \arctan^3 x + b \arctan^5 x + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + b x^5 + o(x^6)$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \underbrace{a x^3 - a x^5} + b x^5 + o(x^5)$$

$$= \cancel{x}$$

Quindi per forza $a = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5} - a + b = 0$, $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

Oss. Allo stesso modo posso fare $\arcsin x$

Alternativa per $\arcsin x$: sviluppare la derivata $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

e fare la primitiva termine a termine come con $\arctan x$

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

e poi faccio "la primitiva termine a termine"

Formalmente: sviluppo $\frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow$ ottengo info sulle derivate in

$x=0$ di $\frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow$ ottengo info. sulle derivate di $\arctan x$ in

$x=0 \rightsquigarrow$ ottengo lo sviluppo di $\arctan x$,

La stessa ROAD MAP funziona per $\arcsin x$ e $\arccos x$.

Esempio 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cosh x) - \cos(\sqrt{1+x^2})}{\cosh(\cos x) - \cosh(\sqrt{1+x^2})}$$

Con Taylor costringe a sviluppare $\cos x$ e $\cosh x$ in $x_0 = 1$

1° modo: sviluppi

2° modo: Hôpital

3° modo: Lagrange

$$\text{Num} = -\sin(c_x) (\cosh x - \sqrt{1+x^2})$$

$$\text{Den} = \sinh(d_x) (\cos x - \sqrt{1+x^2})$$

Quindi

$$\text{Frazione} = \frac{-\sin(c_x)}{\sinh(d_x)} \frac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\cos x - \sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \hline \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \hline \frac{o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} \rightarrow 0 \end{array}$$

Dove stanno c_x e d_x ?

$$\left. \begin{array}{l} c_x \text{ sta tra } \cosh x \text{ e } \sqrt{1+x^2} \\ d_x \text{ sta tra } \cos x \text{ e } \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\} \text{ Per i carabinieri } \begin{array}{l} c_x \rightarrow 1 \\ d_x \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\text{quindi } -\frac{\sin(c_x)}{\sinh(d_x)} \rightarrow -\frac{\sin 1}{\sinh 1}$$

Esempio 5

$$\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1} - 3\sqrt{n} \right]^{1/\log n}$$

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1} - 3\sqrt{n} = \sqrt{n} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{4n} \sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 3\sqrt{n}$$

$$= \sqrt{n} \left\{ \sqrt{1+\frac{1}{n}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 3 \right\} = \sqrt{n} \left\{ \cancel{1} + \frac{1}{2n} + 2\left[\cancel{1} + \frac{1}{4n} \right] - \cancel{3} \right\}$$

$$= \sqrt{n} \frac{3}{4n} = \frac{3}{4\sqrt{n}}. \text{ È come se fosse } \left[\frac{3}{4\sqrt{n}} \right]^{1/\log n} =$$

$$\left(\frac{3}{4\sqrt{m}}\right)^{\frac{1}{\log m}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{\log m}} \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{\frac{1}{\log m}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$e^{\frac{1}{\log m} \cdot \log \frac{1}{\sqrt{m}}} = e^{\frac{1}{\log m} \left(-\frac{1}{2} \log m\right)}$$

— o — o —