A.A. 2015/2016
Corso di Analisi Matematica 2

Stampato integrale delle lezioni

(Appendice di Teoria della Misura)

Massimo Gobbino

Indice

Teoria della Misura — LEZIONE 1 (AM2-131)

Titolo nota 17/05/2016

Motivazioni

① Riunificare varie nozioni di integrale
- integrali propri in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$
- " impropri " "
- integrali di funzioni su curve
- " " " su superfici

Non è che c'è una struttura comune

② Buoni teo. di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Problema: limite puntuale di fn Riemann int. può non essere Riemann int.

③ Buona descrizione del completamento risp. distanze integrali

$C^0([a,b])$ $\quad \text{dist}_1(f,g) := \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

Si verifica che è una distanza e che C^0 con questa distanza è spazio metrico non completo.

Chi è il suo completamento? $L^1([a,b])$

— o — o —

Achtung! Ci saranno dei grossi problemi, dovuti al dover scansare BANACH–TARSKI.

$\boxed{\text{Banach – Tarski}}$ Sia $n \geq 3$ un intero e siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi QUALUNQUE tali che $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, $\text{Int}(B) \neq \emptyset$.

Allora esistono un intero positivo k e sottoinsiemi

$A = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k$ con gli A_i disgiunti

$B = B_1 \cup B_2 \dots \cup B_k$ " B_i "

$\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometrie t.c.

$$\varphi_i(A_i) = B_i$$

Brutalmente: posso scomporre una sfera di raggio 1 in un numero finito di pezzi e ricomporli in modo da ottenere 2 sfere di raggio 1. (Bastano 5 pezzi)

— o — o —

$\boxed{\text{SIGMA – ALGEBRA}}$ Sia X un insieme. Una $\boxed{\text{sigma}}$-algebra su X è un sottoinsieme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con la proprietà che

insieme delle parti

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

(ii) se $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$ (chiuso risp. al complem.)

(iii) se $A_i \in \mathcal{M}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{M} \qquad \text{(chiuso risp. unioni } \boxed{\text{NUMERABILI}}\text{)}$$

Oss. $\mathcal{M}$ si dice algebra se vale (i) + (ii) + (iii) solo con unioni di 2 (e quindi unioni finite)

Oss. Tra i sottoinsiemi di X si può definire somma e prodotto con le proprietà classiche

$$A \cdot B = A \cap B \qquad A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(equivale a identificare sottoinsiemi di X con funzioni $f : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Fatti semplici

(1) $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $A \cap B \in \mathcal{M}$

($A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, dove $A^c := X \setminus A$)

(2) $A_i \in \mathcal{M}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

($\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \right)^c$)

(3) $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $A \setminus B \in \mathcal{M}$ ($A \setminus B = A \cap B^c$)

(4) Data una famiglia qualunque $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ di sigma-algebre (I non è nec numerabile), allora

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i \quad \text{è ancora una } \sigma\text{-algebra}$$

Def. (Sigma algebra generata) Sia X un insieme, e sia

$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un sottoinsieme qualunque.

Si definisce σ-algebra generata da $\mathcal{Y}$ l'intersezione di tutte le σ-algebre che contengono $\mathcal{Y}$, che è quindi la + picc. σ-alg. che contiene $\mathcal{Y}$ (almeno una c'è ed è $\mathcal{P}(X)$).

Oss. Due esempi banali di σ-algebra:

- $\mathcal{P}(X)$
- $\{\emptyset, X\}$.

Un terzo esempio sono $\mathcal{M}$ = sotto insiemi finiti o numerabili e complementari degli stessi

Esercizio Non esistono σ-algebre numerabili.

$\boxed{\text{Definizioni di misura}}$ Tre modi di farlo

- misura (positiva su sigma-algebra)
- misura esterna (positiva su $\mathcal{P}(X)$)
- misura vettoriale (a valori in un Banach)

$\boxed{\text{DEF. MISURA}}$ Sia X un insieme, sia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-algebra di sottoinsiemi.

Si dice <u>misura</u> una qualunque funzione

incluso

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

tale che

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (NUMERABILE ADDITIVITÀ) per ogni successione $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ $\boxed{\text{a due a due disgiunti}}$ vale

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

Si chiama <u>spazio di misura</u> la terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$

$\boxed{\text{DEF. MISURA ESTERNA}}$ Sia X un insieme. Una <u>misura esterna</u> è una qualunque funzione

incluso

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

t.c. (i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (NUMERABILE SUBADDITIVITÀ) per ogni succ. di insiemi $A_i \in \mathcal{P}(X)$ $(i \in \mathbb{N})$ vale

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{(anche non disgiunti)}$$

(iii) (MONOTONIA) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

DEF. DI MISURA VETTORIALE Sia X un insieme, sia V un Banach, sia $\mathcal{M}$ una σ-alg.

Si dice misura vettoriale una qualunque funzione

$$\mu : \mathcal{M} \to V$$

t.c. (i) $\mu(\emptyset) = 0 \in V$

(ii) vale la numerabile additività

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)}_{}$$ ← serie a valori in V

se gli $A_i \in \mathcal{M}$ e sono a 2 a 2 disgiunti

Oss. Le misure vettoriali sono interessanti già quando $V = \mathbb{R}$ (si chiamano MISURE CON SEGNO)

Conseguenze facili delle definizioni

(1) numerabile additività $\Rightarrow$ finita additività
" subadditività $\Rightarrow$ " subadditività
(basta prendere $\emptyset$ da un certo pto in poi)

(2) Nei casi ① e ② vale la monotonia, cioè

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

Dopo video: per le misure estese la monotonia va richiesta

($B = A \cup (B \setminus A)$, poi uso $\boxed{(\text{sub})}$ additività)

No: corretto dopo video

(3) finita additività + numerabile subadditività $\Rightarrow$ numerabile additività

(Basta dim. $\mu(\cup A_i) \geq \sum \mu(A_i)$ $\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$ e mando $m \to +\infty$)

Teoria della misura — LEZIONE 2 (AM2-132)

Titolo nota 17/05/2016

Passaggio al limite della misura

Prop. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia A_n una succ. di elementi di $\mathcal{M}$ CRESCENTE, cioè

$$A_{n+1} \supseteq A_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sia $A_\infty := \bigcup_{i=0}^{\infty} A_n$.

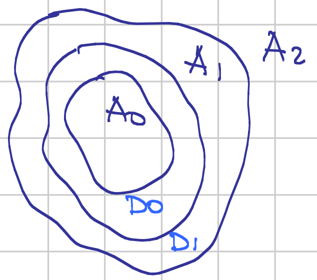
Allora

$$\mu(A_\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

(Beppo Levi a distanza)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Intanto il lim. esiste (in $[0, +\infty]$) perché $\mu(A_n)$ è monotona.

$\mu(A_\infty) \geq \mu(A_n)$ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché $A_\infty \supseteq A_n$



Basta dim. quella opposta.

Pongo

$$D_n := A_{n+1} \setminus A_n$$

Allora

$$A_\infty = A_0 \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \right) \leftarrow \text{unione disgiunta}$$

$$= \mu(A_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu(D_n)$$

σ-add.

$\mu(D_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)$

$A_{n+1} = A_n \cup D_n$

$$= \mu(A_0) + \sum_{n=0}^{\infty} [\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)]$$

$\mu(A_{n+1}) = \mu(A_n) + \mu(D_n)$

$$= \mu(A_0) + \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} [\mu(A_{k+1}) - \mu(A_k)]}_{\text{telescopica}}$$

$$= \mu(A_0) + \lim_{n\to+\infty} [\mu(A_{n+1}) - \mu(A_0)]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n+1})$$

Imprecisione: per dire che $\mu(D_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)$ serve che le 2 misure al RHS siano finite.
Come me la cavo?

Devo dim. che $\mu(A_\infty) \le \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

Se RHS $= +\infty$, è facile. Altrimenti, tutte le misure sono finite.

— o — o —

<u>Oss.</u> La proposizione vale nel contesto ① e anche per misure vettoriali (nel contesto ③ basta la seconda parte della dim. perché non ci sono $+\infty$)

— o — o —

<u>Prop.</u> Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ come prima. Sia A_n succ. decrescente di elementi di $\mathcal{M}$, cioè $A_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che $\mu(A_1) < +\infty$.

Allora $$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

<u>Oss.</u> L'ipotesi $\mu(A_1) < +\infty$ serve, altrimenti metto in $X = \mathbb{N}$ la misura che conta gli elementi, cioè

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \\ \underset{\text{numero elem.}}{|A|} & \text{se } A \text{ è finito} \end{cases} \qquad A_n = \{n, n+1, \dots\}$$

$\boxed{\text{Dim. Prop.}}$ Analoga alla precedente (vedere dove serve l'ipotesi)

— o — o —

COSTRUZIONE DI CARATHEODORY

Sia X insieme, e sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna. Considero l'insieme dei sottoinsiemi $M \subseteq X$ tali che

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) \qquad \forall A \subseteq X$$

(Dico che M "divide bene ogni A")

Allora l'insieme degli M che dividono bene ogni A è una sigma algebra $\mathcal{M}_\mu$, e la restrizione di μ ad $\mathcal{M}_\mu$ è una misura nel senso ①.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Osservazioni preliminari.

- M divide bene A se e solo se $\mu(A) \geq \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M)$
- se $\mu(M) = 0$, allora M divide bene ogni A. Infatti

$$\mu(A) \underset{\text{monot.}}{\geq} \mu(A \setminus M) = \mu(A \setminus M) + \underbrace{\mu(A \cap M)}_{\mu(A \cap M) \underset{\text{monot.}}{\leq} \mu(M) = 0}$$

- Se M divide bene ogni A, allora M^c divide bene ogni A. Basta osservare che la richiesta è simmetrica

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) = \mu(A \cap M) + \mu(A \cap M^c)$$

Ora chiamiamo con $\mathcal{M}_\mu$ l'insieme degli M che dividono bene ogni A e mostriamo che è stabile per unioni numerabili.

$\boxed{\text{Step 1}}$ Se $M \in \mathcal{M}_\mu$ e $N \in \mathcal{M}_\mu$, allora $M \cup N \in \mathcal{M}_\mu$

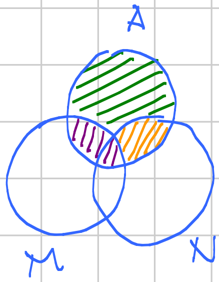
$$\mu(A) \geq \mu(A \cap M) + \mu(A \cap M^c)$$

M divide bene

$$\geq \underbrace{\mu(A \cap M)} + \underbrace{\mu(A \cap M^c \cap N)} + \underbrace{\mu(A \cap M^c \cap N^c)}$$

N divide bene $A \cap M^c$

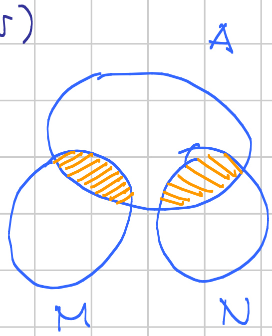
$$\geq \mu(A \cap (M \cup N)) + \mu(A \cap (M \cup N)^c)$$



e quindi $M \cup N$ divide bene ogni A.

$\boxed{\text{Step 2}}$ Se $M \in \mathcal{M}_\mu$, $N \in \mathcal{M}_\mu$, $M \cap N = \emptyset$, $A \subseteq X$ qualunque, allora

$$\mu(A \cap (M \cup N)) = \mu(A \cap M) + \mu(A \cap N)$$



Uso che M divide bene $A \cap (M \cup N)$

$$\mu(A \cap (M \cup N)) =$$

$$= \mu(\underbrace{A \cap (M \cup N) \cap M}_{A \cap M}) + \mu(\underbrace{A \cap (M \cup N) \cap M^c}_{A \cap N})$$

$\boxed{\text{Step 2.5}}$ Stessa cosa con una unione finita

$$\mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A \cap M_k)$$

se gli $M_k \in \mathcal{M}_\mu$ e sono disgiunti

Si fa per induzione su n.

$\boxed{\text{Step 3}}$ Sia ora M_n una succ. di el. di $\mathcal{M}_\mu$
Voglio dim. che la loro unione sta in $\mathcal{M}_\mu$.

Intanto wlog posso supporre che siano disgiunti.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ so che $\bigcup_{k=1}^{n} M_k \in \mathcal{M}_\mu$, quindi divide bene ogni A, quindi

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right)\right) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right)^c\right)$$

(monot.) $$\geq \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right)\right) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right)^c\right)$$

(Step 2.5) $$= \sum_{k=1}^{n} \mu(A \cap M_k) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup^{\infty} M_k\right)^c\right)$$

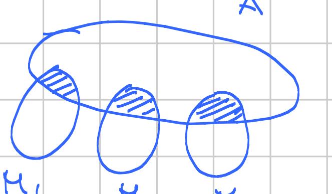
Questa è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi passando al lim. ottengo

$$\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap M_k) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right)^c\right)$$

$$\geq \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right)\right) + \mu(\ldots)$$

vera perché $A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap M_k)$

+ subadditività numerabile.



Questo mostra che $\bigcup M_n \in \mathcal{M}_\mu$.
Ci sarebbe da dim. che

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) \quad \text{se } M_n \text{ sono disgiunti}$$

$\leq$ è banale. Per il $\geq$ uso che $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \supseteq \bigcup_{k=1}^{n} M_k$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \underset{\text{step 2.5 con } A = X.}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k)$$ e poi passo al limite

Teoria della Misura – LEZIONE 3 (AM2-133)

Titolo nota 17/05/2016

Esempi di misura

① La misura che conta i punti $\mu(A)$ = numero di el. di A
Misura di tipo 1 con $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

② Delta di DIRAC. Scelgo $x_0 \in X$ a piacere e pongo

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

Misura di tipo 1 con $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

③ La somma di 2 misure di tipo N ($N = 1, 2, 3$) è una misura di tipo N (nei casi 1 e 3 serve che la σ-alg. sia la stessa). Il prodotto di una misura di tipo N per un certo $\lambda > 0$ è ancora una misura.
La differenza tra 2 misure vettoriali è ancora una misura vettoriale.

—o—o—

Costruzione di misure: → Metodo I
→ Metodo II
→ Metodo III (dualità con C_0^0)

$\boxed{\text{METODO I}}$ Sia X insieme, sia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un sottoinsieme qualunque (non vuoto), sia

$$m : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

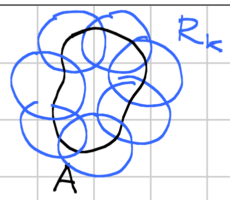
qualunque con $m(\emptyset) = 0$. ↑ incluso o escluso cambia poco

Pongo per ogni $A \subseteq X$

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) : A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k, \ R_k \in \mathcal{R} \right\}$$

se è possibile ricoprire A con el. di $\mathcal{R}$ e

$\mu(A) = +\infty$ se non riesco a ricoprire o la serie diverge sempre.



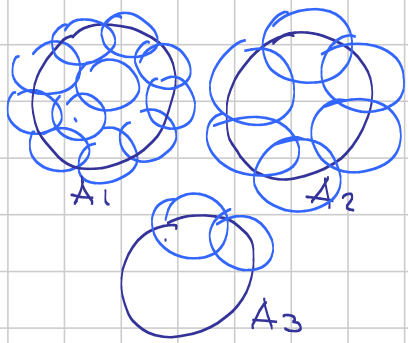
<u>Prop.</u> La μ costruita sopra è una misura esterna

$\boxed{\text{Dim.}}$ Banale o quasi.

- $\mu(\emptyset) = 0$ facile
- monotonia: se $A \subseteq B$, allora ogni ricoprimento di B è anche ric. di A.
- numerabile sub-additività

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

Basta considerare il caso in cui $\mu(A_k)$ sono finiti e la serie converge.



ricopro A_1 con $R_{1,k}$ in modo tale che

$$A_1 \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_{1,k}$$

e $$\mu(A_1) \geq \sum_{k=0}^{\infty} m(R^{\varepsilon}_{1,k}) - \frac{1}{2}\varepsilon$$

... ricopro A_i con $R_{i,k}$ in modo tale che

$$A_i \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R^{\varepsilon}_{i,k} \quad \text{e} \quad \mu(A_i) \geq \sum_{k=0}^{\infty} m(R^{\varepsilon}_{i,k}) - \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Allora $R_{i,k}$ al variare di i e k ricoprono $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ e quindi

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{i,k} m(R^{\varepsilon}_{i,k}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon$$

<u>Esempio</u> $\mathbb{X} := \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{R}$ = intervalli $[a,b]$

(decido come mi pare con gli estremi)

$$m : \mathcal{R} \to [0,+\infty) \qquad m([a,b]) = b-a$$

$\rightsquigarrow$ con il metodo I ottengo una misura esterna μ che è la misura di Lebesgue.

<u>Oss.</u> A livello di teoria astratta nulla garantisce che

$$\mu(R) = m(R) \qquad \forall R \in \mathcal{R}.$$

Questo è vero per Lebesgue se dimostro un lemma che dice che

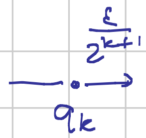
$$\boxed{[a,b] \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} [a_k, b_k] \implies b-a \leq \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - a_k)}$$

Più in generale in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^n$ considero $\mathcal{R}$ = prodotto di intervalli e definisco m come in Riemann caso banale.

<u>Oss.</u> La misura di $\mathbb{Q}$ è 0. Per ogni $\varepsilon > 0$ posso ricoprire $\mathbb{Q}$ con intervalli chiusi la somma delle cui lungh. è $\leq \varepsilon$.

(Numero i razionali $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right]$$



—o— —o— —

$\boxed{\text{METODO II}}$ $(\mathbb{X}, d)$ metrico, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ e $m : \mathcal{R} \to [0,+\infty)$ come prima.

Per ogni $\delta > 0$ e per ogni $A \subseteq \mathbb{X}$ pongo

$$\mu_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) \ : \ A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k, \ R_k \in \mathcal{R}, \ \operatorname{diam}(R_k) \leq \delta \right\}$$

Fissato $A \subseteq X$, vale $\mu_{\delta_1}(A) \le \mu_{\delta_2}(A)$ se $\delta_2 \le \delta_1$

quindi ha senso porre

$$\boxed{\mu(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mu_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(A)}$$

Prop. Tutte le μ_δ sono misure esterne

(μ_δ è costruita con il metodo I a partire da un opportuno $\mathcal{R}_\delta$)

Inoltre anche μ è una misura esterna

(sublemma: il limite crescente di misure esterne è una misura esterna).

Esempio (X, d) metrico, $\mathcal{R} =$ tutti i sottoinsiemi limitati / palle (chiuse o aperte non cambia)

$m(R) = (\text{diam } R)^\lambda$ dove $\lambda \geq 0$ è un esponente fisso.

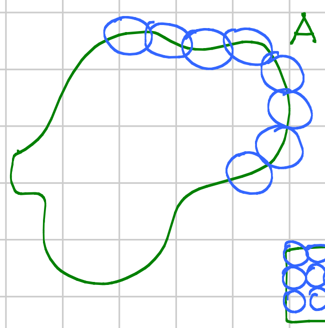
La μ che ottengo è detta $\boxed{\text{misura di HAUSDORFF}}$ λ-dimensionale.

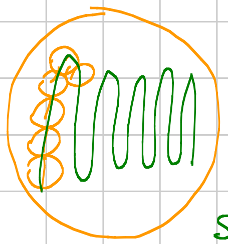
Esempio più esempio $(X, d) = \mathbb{R}^2$ euclideo

$\lambda = 1$ otteniamo una misura H^1. Moralmente cos'è?

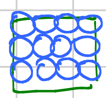
Preso A, lo ricopro con palle di raggio $\leq \delta$ e sommo i diametri

Ottengo circa la lunghezza





Il δ piccolo costringe a seguire bene l'insieme A.



Se A ha parte interna, diciamo $A =$ quadrato $[0,1]^2$

quando ho $\delta = \frac{1}{n}$ servono n^2 cerchi e pago $n^2 \cdot \text{diam} = n \to +\infty$

Esempio $(X, d) = \mathbb{R}^2$ $\lambda = 2$: ottengo Lebesgue a meno di un fattore di molteplicità

In $\mathbb{R}^2$ faccio metodo II a partire dai rettangoli
$m(R)$ = area rettangolo
ma ho vincolo del δ nel ricoprire.

Non cambia nulla, perché posso sostituire ogni rettangolo grande con tanti rettangoli piccoli, pagando UGUALE.

— o — o —

Teoria della misura — LEZIONE 4 (AM2-134)

Titolo nota 18/05/2016

$\boxed{\text{Riassunto puntata prec.}}$ (via alta alla misura di Lebesgue)

- Definisco m sull'insieme $\mathcal{R}$ degli intervalli (in $\mathbb{R}$ oppure dei prodotti di intervalli se sono in $\mathbb{R}^n$)

- Estendo m a tutto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con il metodo I. Ottengo una misura esterna

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$$

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) : A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k, \ R_k \in \mathcal{R} \right\}$$

- Restringo μ ad una σ-algebra $\mathcal{M}$ definita alla Carathéodory

$$\mathcal{M} = \{ M \subseteq \mathbb{R} : \mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) \ \forall A \subseteq \mathbb{R} \}$$

- Si ottiene che $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ è una misura nel senso della Def 1, cioè numerabilmente additiva sui disgiunti

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(M_k)$$

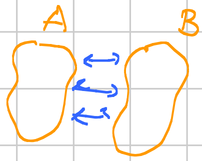
per ogni $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ con $M_i \cap M_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Da questa seguiva il passaggio al limite di μ sulle succ. crescenti o decrescenti di insiemi

succ. cresc. di insiemi $\rightsquigarrow$ teo. di Beppo Levi
succ. decresc. di insiemi con $\mu(M_1) < +\infty$ $\rightsquigarrow$ teo. di conv. dominata.

Domanda: $\mathcal{M}$ è abbastanza ricco?

Def. Sia (X, d) metrico. Dico che due sottoinsiemi $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$ sono DISTANTI se



$$\inf \{ d(a,b) : a \in A, b \in B \} > 0$$

Dico che una misura esterna $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ è additiva sui distanti se

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall A \text{ e } B \text{ distanti}$$

Def. Sia (X, d) metrico. Si indica con $\mathcal{B}(X)$ la sigma algebra generata dagli aperti (o dai chiusi, o dalla topologia). Gli elementi di $\mathcal{B}(X)$ si dicono boreliani.

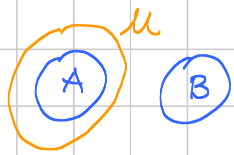
Esercizio Quanti sono i boreliani in $\mathbb{R}$? o in $\mathbb{R}^n$?

Teorema Sia (X, d) metrico e sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna. Sia $\mathcal{M}$ la σ-algebra alla Carath. Allora

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M} \iff \mu \text{ è additiva sui distanti.}$$

Dim. $\boxed{\Longrightarrow}$ Facile. Siano A e B distanti. Allora esiste un aperto $\mathcal{U}$ tale che $A \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \cap B = \emptyset$.
(Prendo $\delta_0 > 0$ la distanza, cioè l'inf... e considero

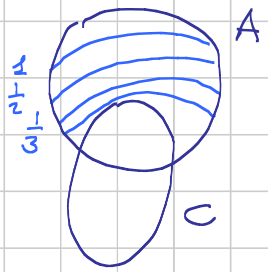
$$\mathcal{U} := \bigcup_{a \in A} B_{\frac{\delta_0}{2}}(a) \qquad)$$



Allora
$$\mu(A \cup B) \underset{\mathcal{U} \in \mathcal{M}}{=} \mu((A \cup B) \cap \mathcal{U}) + \mu((A \cup B) \cap \mathcal{U}^c)$$
$$= \mu(A) + \mu(B).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Basta dim. che tutti i chiusi sono misurabili.

Sia $C \subseteq X$ un chiuso e sia $A \subseteq X$ qualunque. Voglio che



$$\underbrace{\mu(A)}_{\text{posso assumere } \in \mathbb{R}} \geq \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C)$$

Definisco, per ogni $i \geq 1$ intero

$$A_i := \left\{ x \in A : \frac{1}{i+1} \leq \operatorname{dist}(x, C) < \frac{1}{i} \right\}$$

$$L_i := \left\{ x \in A : \operatorname{dist}(x, C) \geq \frac{1}{i} \right\} \quad \text{" lontani "}$$

$$V_i := \left\{ x \in A : 0 < \operatorname{dist}(x, C) < \frac{1}{i} \right\} \quad \text{" vicini "}$$

Allora $V_i = \bigcup_{k=i}^{+\infty} A_k$ e $A \setminus C = L_i \cup V_i$

qui sto usando che C è chiuso
quindi se $x \notin C$, allora
$\operatorname{dist}(x, C) > 0$

$\boxed{\text{Step 1}}$ Dico che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$$

$A_1, A_3, A_5, \ldots$ sono a 2 a 2 distanti, quindi

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{2i-1} \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_{2i-1}) \qquad \text{(facile induzione)}$$

quindi $$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{2i-1}) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i-1} \right) \leq \mu(A) < +\infty$$

Analogamente sui pari

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_{2i}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{2i} \right) \leq \mu(A) \quad \text{per ogni } n$$

da cui la tesi

$\boxed{\text{Step 2}}$ Conclusione

$$\mu(A\cap C)+\mu(A\setminus C) = \mu(A\cap C)+\mu(L_i\cup V_i)$$

(sub-add.) $\leq \mu(A\cap C)+\mu(L_i)+\mu(V_i)$

$A\cap C$ e L_i sono distanti $= \mu((A\cap C)\cup L_i)+\mu(V_i)$

$(A\cap C)\cup L_i \subseteq A$ $\leq \mu(A)+\mu(V_i)$

(sub-add. numer.) $\leq \mu(A)+\sum_{k=i}^{\infty}\mu(A_i)$

quindi per ogni $i \geq 1$ vale

$$\mu(A\cap C)+\mu(A\setminus C) \leq \mu(A)+\underbrace{\sum_{k=i}^{\infty}\mu(A_i)}$$

$\downarrow$ 0 per $i\to+\infty$ perché coda di serie convergente

— o — o —

<u>Oss.</u> Tutte le misure esterne ottenute con il metodo 2° sono additive sui distanti

$$\mu(A) := \lim_{\delta\to 0^+}\mu_\delta(A) \quad \text{con}$$

$$\mu_\delta(A) := \sup\left\{\sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) : \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k \supseteq A,\ R_k\in\mathcal{R},\ \operatorname{diam}(R_k)\leq\delta\right\}$$

Facile vedere che $\mu_\delta(A\cup B)=\mu_\delta(A)+\mu_\delta(B)$ non appena $2\delta < \operatorname{dist}(A,B)$

<u>Corollario</u> Tutti i boreliani sono misurabili secondo Lebesgue!

<u>Esercizio</u> In $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ tutti gli insiemi numerabili hanno misura nulla (in particolare $\mathbb{Q}$)

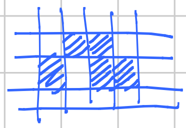
Basta ricoprirli così: detto $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$

$$A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right]}_{m \text{ è } \frac{\varepsilon}{2^k}}$$

— o — o —

Via bassa alla misura di Lebesgue.

- Definisco come sempre la misura dei plurirettangoli (unioni di pluriintervalli). Bastano unioni FINITE



- Per ogni APERTO Ω definisco

$$m(\Omega) := \sup\{m(P) : P \subseteq \Omega, P \text{ plurirettangolo}\}$$

- Per ogni COMPATTO K definisco

$$m(K) := \inf\{m(P) : P \supseteq K, P \text{ plurirettangolo}\}$$

- Per ogni A qualunque definisco

$$m^*(A) := \inf\{m(\Omega) : \Omega \supseteq A \text{ e } \Omega \text{ aperto}\}$$ misura "esterna"

$$m_*(A) := \sup\{m(K) : K \subseteq A \text{ e } K \text{ compatto}\}$$ misura "interna"

<u>Prop.</u> $m_*(A) \leq m^*(A)$ per ogni A

Def. Se per caso vale il segno di $=$, allora dico che A è misurabile secondo Lebesgue e il valore comune è la misura.

Altro modo di dire la stessa cosa:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{\text{cpt.}}{K_\varepsilon} \subseteq A \subseteq \underset{\text{aperto}}{\Omega_\varepsilon} \quad \text{t.c.} \quad m(\Omega_\varepsilon) - m(K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Teorema Gli insiemi misurabili in questo senso sono una σ-algebra e la misura ristretta a loro è numerabilmente additiva.

In realtà è la stessa dell'altra costruzione.

— o — o —

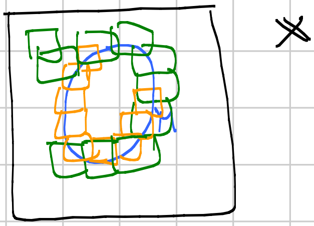
Teoria della misura – LEZIONE 5 (AM2 135)

Titolo nota 18/05/2016

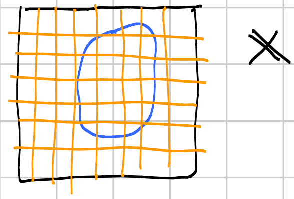
C'è la misura interna in Carathéodory?

Pensiamo $\mu(X) < +\infty$ e pensiamo μ ottenuta con il metodo I.

$$\mu(X) = \underbrace{\mu(M)}_{\text{misura esterna di } M} + \mu(X \setminus M) \qquad (\text{caso speciale } A = X)$$



$$\mu(X) - \mu(X \setminus M) = \text{specie di misura interna di } M$$



<u>Esercizio</u> Fare vedere che, anche se $\mu(X) < +\infty$, non basta imporre

$$\mu(X) = \mu(M) + \mu(X \setminus M)$$

per ottenere una σ-algebra su cui μ è σ-additiva.

— o — o —

<u>Domanda</u> X, $\mathcal{R}$, m come nel metodo 1°. Costruisco μ ed $\mathcal{M}$. Qualcosa garantisce che

(1) $\mu(R) = m(R)$ per ogni $R \in \mathcal{R}$

(2) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$.

La risposta è SI se siamo nelle ipotesi di HAHN–KOLMOGOROV

Ipotesi: (i) $\mathcal{R}$ è un'algebra (chiusa per complementare ed unione finita)
(ii) $m: \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ è una pre-misura, cioè numerabilmente additiva su $\mathcal{R}$, cioè se $R_n \in \mathcal{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \in \mathcal{R} \qquad R_i \cap R_j = \emptyset \text{ per } i \neq j.$$

allora $$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(R_n)$$

Oss. Si applica a Lebesgue usando come $\mathcal{R}$ l'algebra generata dagli intervalli, cioè $\mathcal{R}$ contiene le unioni finite di intervalli e i loro complementari e m è quello che ci aspettiamo sulle unioni finite e $+\infty$ sui complementari

— o — o —

$\boxed{\text{ESEMPIO DI VITALI}}$ Esempio di insieme non misurabile secondo Lebesgue.

Oss. La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni (basta traslare i ricoprimenti del metodo 1°)

Considero $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, cioè metto su $\mathbb{R}$ la relazione di equiv. $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$ e quoziento.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in [0,1]$ t.c. $x \sim y$. (ne esistono tantissimi)

Grazie all'assioma di scelta ottengo un insieme $V \subseteq [0,1]$ che contiene un elemento per ogni classe di equivalenza.

Dico che V NON è misurabile. Servono due osservazioni

- Numero i razionali $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ e pongo

  $V_n := V + q_n$. Allora $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} V_n$ disgiunta

  e quindi se fosse misurabile

$$\underbrace{\mu(\mathbb{R})}_{+\infty} = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \underbrace{\mu(V_n)}_{\text{hanno tutti la stessa misura, e questa è } \neq 0.}$$

- Numero i razionali $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ in $[0,1]$ e pongo

  $V_n := V + r_n$. Allora $\bigcup_{n \geq 1}^{\infty} V_n \subseteq [0,2]$ e quindi

$$2 \geq \mu\left(\bigcup_{n \geq 1}^{\infty} V_n\right) \underset{\text{sono disgiunti}}{=} \sum_{n \geq 1}^{\infty} \underbrace{\mu(V_n)}_{\text{sono } = \text{ e } \neq 0 \text{, quindi la serie è } +\infty.}$$

— o — o —

FUNZIONI MISURABILI Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura

Sia

$$f : X \to [-\infty, +\infty] \quad \text{(estremi compresi)}$$

Si dice che f è <u>misurabile</u> se

$$\{x \in X : f(x) < \lambda\} \in \mathcal{M} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Proposizione}}$ Nello stesso setting della def. sono fatti equiv.

$$\{x \in X : f(x) < \lambda\} \in \mathcal{M} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\leq \lambda \qquad \text{"}$$
$$> \lambda \qquad \text{"}$$
$$\geq \lambda \qquad \text{"}$$
$$\{x \in X : f(x) \in A\} \in \mathcal{M} \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\{x \in X : f(x) \geq \lambda\} = \{x \in X : f(x) < \lambda\}^c$

$$\{x \in X : f(x) > \lambda\} = \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq \lambda + \tfrac{1}{n}\}$$

Le controimmagini degli intervalli stanno in $\mathcal{M}$ e facilmente si arriva ai Boreliani.

— o — o —

$\boxed{\text{Proprietà dell' insieme delle funzioni misurabili}}$

(1) f misurabile $\Rightarrow$ $|f|$ misurabile

(2) f misurabile, c costante $\Rightarrow$ cf misurabile

(3) se non ci sono problemi di $\pm\infty$, la somma di 2 misurabili è misurabile

$$\{x \in X : f(x) + g(x) > \lambda\} = \bigcup_{\substack{a+b>\lambda \\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2}} \underbrace{\{x \in X : f(x) > a, g(x) > b\}}_{\cap\, \mathcal{M}}$$

(4) analogo per il prodotto (anche via quadrato
$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$

$\boxed{\text{PROPRIETÀ IMPORTANTI}}$

① Se $f_n(x)$ è una successione $\boxed{\text{crescente}}$ di funzioni misur., cioè $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ per ogni $x \in X$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f_\infty(x) := \underset{(\lim)}{\sup}\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ è misurabile

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\{x \in X : f_\infty(x) > \lambda\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > \lambda\}$

vera perché c'è il $> \lambda$

La crescenza serve per avere $\supseteq$

② Se f_n è una succ. qualunque di funz. mis., allora

$$\liminf_{n \to +\infty} f_n(x) \qquad \limsup_{n \to +\infty} f_n(x)$$

sono funzioni misurabili

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\displaystyle \liminf_{n \to +\infty} f_n(x) = \underbrace{\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\underbrace{\inf_{k \geq n} f_k(x)}_{\text{misurabile come prima}}\}}_{\text{misurabile come prima}}$

③ Il limite puntuale di funzioni misurabili è misurabile (se esiste)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Coincide con il liminf.

Teoria della misura – LEZIONE 6 (AM2 136)

Titolo nota 18/05/2016

DEF. DI INTEGRALE

Def. (Step function) Sia $(\mathfrak{X}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una step function è una comb. lineare (finita) di funzioni caratteristiche, quindi del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

dove

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

e $A_1, \dots, A_k$ sono misurabili.

Oss. (solita seccatura) Ogni step function $\varphi(x)$ si può scrivere in modo unico usando A_i disgiunti

se ho $7\mathbb{1}_{[0,2]} + 5\mathbb{1}_{[1,3]}$

$$= 7\mathbb{1}_{[0,1)} + 12\mathbb{1}_{[1,2]} + 5\mathbb{1}_{(2,3]}$$

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda \in \varphi(\mathfrak{X})} \lambda \mathbb{1}_{\{x \in \mathfrak{X} : \varphi(x) = \lambda\}}(x)$$

Equivalente Una step function è una $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ misurabile con immagine finita.

Def. $$\int_{\mathfrak{X}} \varphi(x)\, d\mu := \sum_{\lambda \in \varphi(\mathfrak{X})} \lambda \mu\{x \in \mathfrak{X} : \varphi(x) = \lambda\}$$

Def. bis Ammettiamo step function a immagine numerabile e definiamo l'integrale con la serie, almeno se la serie converge assolutamente.

Def. di integrale per funzioni positive

Dato $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura, e data $f : X \to [0, +\infty]$ (incluso) misurabile, poniamo

$$\int_X f(x)\, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi(x)\, d\mu : \begin{array}{l} \varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X \\ \varphi(x) \text{ step function} \end{array} \right\}$$

Def. alternativa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $f : X \to [0, +\infty]$ come sopra.

$$\int_X^* f(x)\, d\mu := \inf \left\{ \int_X \varphi(x)\, d\mu : \begin{array}{l} \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in X \\ \varphi(x) \text{ s.f. numerabile} \end{array} \right\}$$

$$\int_{*X} f(x)\, d\mu := \sup \left\{ \int \quad \ldots \qquad \varphi(x) \leq f(x) \ldots \right\}$$

Questo lo posso fare anche se $f(x)$ non è misurabile.

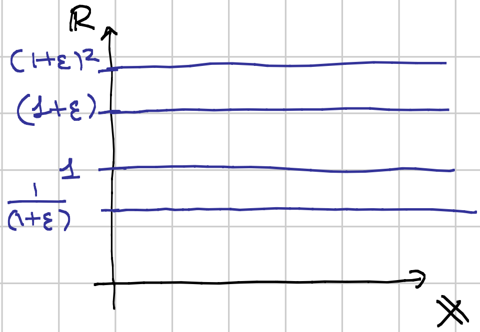
Teorema Se $f : X \to [0, +\infty]$ è misurabile, allora

$$\int_X f(x)\, d\mu = \int_{*X} f(x)\, d\mu = \int_X^* f(x)\, d\mu$$

Dim. Molto facile: prima uguaglianza (quello che raggiungo con le serie, lo raggiungo anche con le somme parziali).
Resta da dimostrare la seconda uguaglianza.

È banale il caso in cui $\int_{*X} f(x)\, d\mu = +\infty$ (l'altro è + grande).

Quindi supp. $\int_{\mathbb{X}} < +\infty$.



Fisso $\varepsilon > 0$ e facciamo a fette l'immagine.
Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ poniamo

$$A_k := \{ x \in \mathbb{X} : (1+\varepsilon)^k \le f(x) < (1+\varepsilon)^{k+1} \}$$

Ora posso costruire step functions sopra e sotto $f(x)$:

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$$

$$\varphi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^k \mathbb{1}_{A_k}(x), \quad \psi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^{k+1} \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

Vorrei che $\int_{\mathbb{X}} (\psi(x) - \varphi(x))\, d\mu$ fosse piccolo

$$\int_{\mathbb{X}} (\psi(x) - \varphi(x))\, d\mu = \int_{\mathbb{X}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^k \varepsilon \mathbb{1}_{A_k}(x)\, d\mu$$

$$= \varepsilon \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^k \mu(A_k)}_{\int_{\mathbb{X}} \varphi(x)\, d\mu}$$

$$= \varepsilon \int_{\mathbb{X}} \varphi(x)\, d\mu \le \varepsilon \underbrace{\int_{*\mathbb{X}} f(x)\, d\mu}_{\text{supposto finito}}$$

— o — o —

<u>Domanda</u>: la prima uguaglianza vale anche se f non è misurabile.
E la seconda? Se $\int_* f = \int^* f \in \mathbb{R}$, posso dedurre che f è misurabile?

— o — o —

<u>Def.</u> Sia ora $(X, \mathcal{M}, \mu)$ come prima e $f : X \to [-\infty, +\infty]$
(non più positiva)

Allora si definisce integrale di $f(x)$ come

$$\int_X f(x)\, d\mu = \int_X f^+(x)\, d\mu - \int_X f^-(x)\, d\mu$$

tranne nel caso in cui sono $+\infty - \infty$

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\} \quad , \quad f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}$$
$$= -\min\{0, f(x)\}$$

Insomma: $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

<u>Achtung!</u> A differenza dell'integrale di RIEMANN, ora accade che

$$\int_X f(x)\, d\mu \in \mathbb{R} \iff \int_X |f(x)|\, d\mu \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ sarebbe la solita assoluta integrabilità

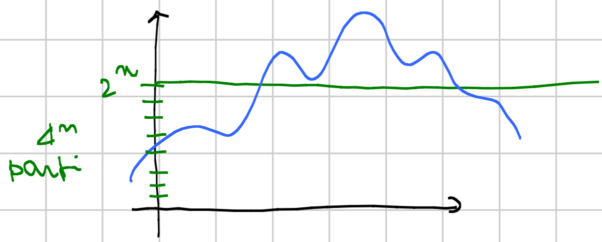
$\boxed{\Rightarrow}$ $\int_X f \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_X f^+ \in \mathbb{R}$ <u>e</u> $\int_X f^- \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_X |f| \in \mathbb{R}$.

Con questa def. l'integrale della somma non è ovvio...

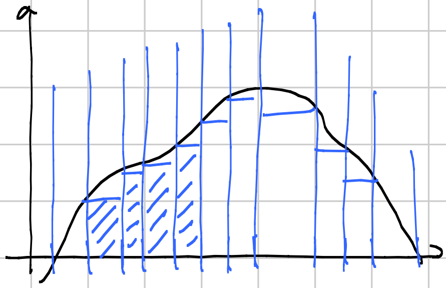
$$h(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

<u>Proposizione</u> Data $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile.
Allora esiste una successione $\varphi_n(x)$ crescente di step functions che convergono ad f puntualmente.

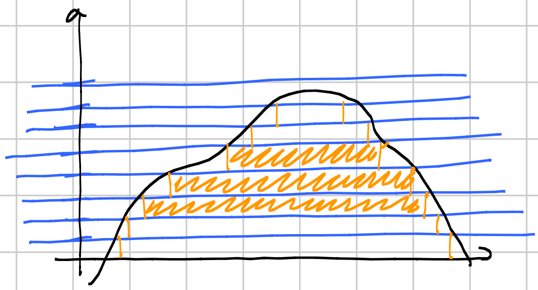
Fisso n e divido $[0, 2^n]$ in 4^n parti e poi faccio come sopra



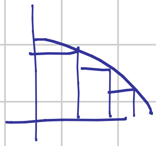
L'integrale di Lebesgue parte dall'asse y



Riemann: sommiamo rettangoli verticali



Lebesgue: sommiamo rettangoli orizzontali



Teoria della misura — LEZIONE 7 (AM2 137)

Titolo nota 19/05/2016

Riassunto puntate precedenti

Definizioni mis. Lebesgue: due vie possibili (equivalenti)

1 – via metodo I + costruzione di Caratheodory + misura additiva sui distanti (o teorema Hahn–Kolmogorov) $\leadsto$ i boreliani sono misurabili

2 – Si definisce prima sugli aperti e sui compatti, poi misura interna ed esterna, poi misurabile $\Leftrightarrow$ interna ed esterna coincidono.

Definizioni di integrale: due vie possibili (equivalenti)

1 – si definisce sulle $f: \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ approx da sotto con step functions finite; poi si estende a $f: \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ usando f^+ ed f^-

2 – si definisce subito sulle $f: \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ l'integrale inferiore e superiore mediante approx da sotto e da sopra con step functions con immagine numerabile; se coincidono ...

— o — o —

$\boxed{\text{TRE TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE}}$

$\boxed{\text{TEOREMA DI BEPPO LEVI}}$ (Teorema di Lebesgue di convergenza monotona)

Sia $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ spazio di misura. Siano $f_n: \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ misurabili una successione crescente, cioè

≥0 incluso

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

Allora

$$\int_{\mathbb{X}} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{X}} f_n(x)\, d\mu$$

(teorema di scambio)

Oss. LHS e RHS possono valere $+\infty$

Oss. Se $f_n(x) = \mathbb{1}_{A_n}(x)$, allora $A_{n+1} \supseteq A_n$ ed è il teorema già visto di passaggio al limite della misura

$\boxed{\text{LEMMA DI FATOU}}$ Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura e siano $f_n : X \to [0, +\infty]$ misurabili (≥ 0, ma non nec. monotone).
Allora

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

Oss. Può valere il < stretto $X = [0,2]$ oppure $X = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) & \text{se } n \text{ pari} \\ \mathbb{1}_{[1,2]}(x) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\boxed{\text{TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA}}$ (Lebesgue)

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura, e siano $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ funzioni misurabili (no vincoli di segno o monotonia)
Supponiamo che
(i) esiste il limite $\boxed{\text{PUNTUALE}}$

$$f_\infty(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X$$

(ii) esiste $g : X \to [0, +\infty]$ tale che

$$\int_X g(x)\, d\mu < +\infty$$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

"Dominazione"

Allora vale lo scambio

$$\int_X f_\infty(x)\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

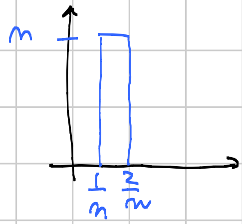
Oss. La dominazione SERVE. Ad esempio

$$f_n(x) := \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \qquad f_\infty(x) \equiv 0$$

$$\int_X f_n(x)\, dx = 1 \qquad \int_X f_\infty(x) = 0$$

Lebesgue in $\mathbb{R}$

$$f_n(x) := n\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]} \qquad f_\infty(x) \equiv 0$$



$$\int_X f_n(x)\, dx = 1 \qquad \int_X f_\infty(x) = 0$$

— o — o —

Oss. Beppo Levi non vale con l'inf nel caso di $f_n : X \to [0, +\infty]$ decrescenti

$$f_n(x) := \mathbb{1}_{[n, +\infty)}(x) \quad \text{sono decrescenti}$$

$$\int_X f_n(x)\, dx = +\infty \quad \text{ma} \quad \int_X \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\, dx = 0$$

Se ce ne fosse uno finito, sarebbe la convergenza dominata

Oss. Beppo Levi vale con l'inf. nel caso di $f_n : X \to [-\infty, 0]$ decrescenti.

Oss. Fatou vale per $f_n : X \to [-\infty, 0]$ nella forma

$$\int_X \limsup_{n \to +\infty} f_n(x)\, d\mu \geq \limsup_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

$\boxed{\text{Dim. Fatou dato Beppo Levi}}$ Poniamo

$$g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_k(x) \qquad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora $g_n(x) \leq f_k(x)$ $\forall x \in X$ e per ogni $k \geq n$, quindi

$$\int_X g_n(x)\, d\mu \leq \int_X f_k(x)\, d\mu$$

e facendo l'inf su k

$$\int_X g_n(x)\, d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x)\, d\mu \qquad (\star)$$

Osservo che $g_n(x)$ è una successione crescente e

$$\liminf_{n \to +\infty} f_n(x) \underset{\text{def. di liminf}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

Allora

$$\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n(x)\, d\mu \overset{\text{def. liminf}}{=} \int_X \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)\, d\mu$$

$$\text{(Beppo Levi)} \quad = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X g_n(x)\, d\mu$$

$$(\star) \quad \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} \int_X f_k(x)\, d\mu$$

$$\text{(def. di liminf)} \quad = \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

— o — o —

<u>Variante di Beppo Levi per succ. decrescenti</u>

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura, $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ decrescenti e misurabili.

Supponiamo che $\int_X f_1(x)\, d\mu < +\infty$.

Allora

$$\int_X \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\, d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x)\, dx$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta fare le differenze, cioè porre

$$\varphi_n(x) := f_1(x) - f_n(x).$$

Allora le $\varphi_n : X \to [0, +\infty]$ sono una succ. crescente e

$$\int_X \varphi_n(x)\, d\mu = \underbrace{\int_X f_1(x)\, d\mu}_{\text{numero}} - \int_X f_n(x)\, d\mu$$

Applico Beppo Levi

$$\int_X \varphi_\infty(x)\, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu$$

Ma $\quad \text{RHS} = \int_X f_1(x)\, d\mu - \inf_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x)\, d\mu$

e $\quad \text{LHS} = \int_X \left[f_1(x) - \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \right] d\mu$

$$= \int_X f_1(x)\, d\mu - \int_X \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\, d\mu$$

Semplificando $\int_X f_1(x)\, d\mu$ ho la tesi.

Variante di Fatou per il limsup

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura, $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$.
Supponiamo che esista
$$g : X \to [0, +\infty]$$
tale che

$$f_n(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_X g(x)\, dx < +\infty$$

Allora
$$\int_X \limsup_{n \to +\infty} f_n(x)\, d\mu \geq \limsup_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Considero le differenze

$$\varphi_n(x) := g(x) - f_n(x) \qquad \varphi_n : X \to [0, +\infty]$$

e applico il Fatou classico alla $\varphi_n \geq 0$ dopo aver osservato che

$$\liminf_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = g(x) - \limsup_{n \to +\infty} f_n(x)$$

— o — o —

Teoria della misura — LEZIONE 8 (AM2 138)

Titolo nota 19/05/2016

$\boxed{\text{Dim. convergenza dominata dato Fatou}}$

Ipotesi $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\int_X g(x)\, d\mu < +\infty$

Si dimostra più in generale che

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

ovvia $\rightarrow$ $$\leq \limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

$$\leq \int_X \limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu$$

Se esiste il $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (PUNTUALE), allora RHS e LHS coincidono, quindi coincide tutto.

Le due disuguaglianze "laterali" sono quasi Fatou.

- Quella con il limsup è la variante di Fatou e sfrutta la dominazione

$$f_n(x) \leq g(x) \quad \text{(Dominaz. dall'alto)}$$

- Quella con il liminf è il Fatou classico applicato a

$$\varphi_n(x) := f_n(x) + g(x)$$

Queste sono ≥ 0 perché $f_n(x) \geq -g(x)$ (Dom. dal basso).

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. convergenza monotona}}$ $f_n(x) \geq 0$ $f_n(x) \nearrow$

Tesi: $$\int_X \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)}_{f_\infty(x)} \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)\, d\mu$$

$\boxed{\geq}$ Facile perché $f_\infty(x) \geq f_n(x)$ $\forall x \in \ldots$ $\forall n \in \ldots$
quindi

$$\int_X f_\infty(x)\, d\mu \geq \int_X f_n(x)\, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e ora basta fare il sup in $\mathbb{N}$.

$\boxed{\leq}$ Volendo posso supporre che RHS $< +\infty$ (altrimenti è banale)
Sia $\varphi : X \to [0, +\infty]$ una qualunque step function con immagine finita con $\varphi(x) \leq f_\infty(x)$. Diciamo

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

per opportuni c_k e $A_k \subseteq X$ disgiunti misurabili.
Voglio dimostrare che

$$\int_X \varphi(x)\, dx \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)\, dx .$$

In realtà mi basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\int_X \varphi(x)\, dx \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\varepsilon) \int_X f_n(x)\, dx$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ pongo

$$A^\varepsilon_{k,n} := \{ x \in A_k : (1+\varepsilon) f_n(x) \geq c_k \}$$

Osservo che $A^\varepsilon_{k,n}$ è crescente rispetto ad n (f_n sono $\nearrow$)

e

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^{\varepsilon}_{k,m} = A_k$$

(basta osservare che $\leq$ è banale e inoltre ogni $x \in A_k$ finisce definitivamente in $A^{\varepsilon}_{k,m}$ perché
$(1+\varepsilon) f_m(x) \longrightarrow (1+\varepsilon) f_\infty(x) > c_k$ per $x \in A_k$)

Ora pongo $\varphi^{\varepsilon}_m(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{A^{\varepsilon}_{k,m}}(x)$

e osservo che $\varphi^{\varepsilon}_m(x) \leq (1+\varepsilon) f_m(x)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$

banale per def. di $A^{\varepsilon}_{k,m}$

Concludo

disug. sopra

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (1+\varepsilon) \int_X f_n(x)\, d\mu \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \int_X \varphi^{\varepsilon}_m(x)\, d\mu$$

(def. di int.) $$= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k \mu(A^{\varepsilon}_{k,m}) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu(A^{\varepsilon}_{k,m})$$

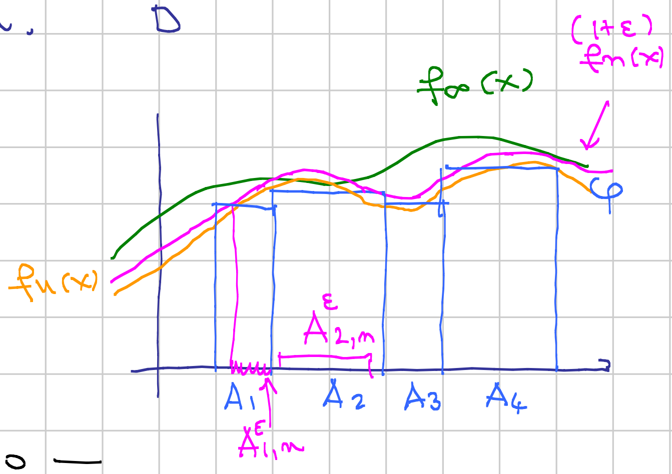
(teo. passaggio al limite sulla misura) $$= \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(A_k)$$

$$= \int_X \varphi(x)\, d\mu. \qquad \square$$

Disegno spero esplicativo

Rialzo le $f_n(x)$ di $(1+\varepsilon)$

φ_m usano stesse altezze c_k ma basi ristrette.



—o—o—

$\boxed{\text{Back to analisi 2}}$ Teoremi di continuità e derivabilità per integrali dipendenti da parametro.

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura, $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$f : (a,b) \times X \to \mathbb{R}$$

e poniamo $\varphi(t) := \int_X f(t,x)\, \underbrace{d\mu(x)}_{\uparrow \text{ integro in } X}$

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ (Continuità) Setting come sopra

Supponiamo che

(i) per ogni $t \in (a,b)$ la funzione $x \to f(t,x)$ è misurabile,

(ii) per ogni $x \in X$ la funzione $t \to f(t,x)$ è continua in (a,b),

(iii) esiste $g : X \to [0,+\infty]$ tale che

$$\int_X g(x)\, d\mu < +\infty$$

$$|f(t,x)| \le g(x) \qquad \forall t \in (a,b) \quad \forall x \in X$$

Allora $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo una qualunque succ.

$$(a,b) \ni t_n \to t_\infty \in (a,b)$$

e mostro che $\varphi(t_n) \to \varphi(t_\infty)$, cioè

$$\int_X \overbrace{f(t_n,x)}^{f_n(x)}\, d\mu(x) \to \int_X \overbrace{f(t_\infty,x)}^{f_\infty(x) = \text{ limite puntuale}}\, d\mu(x)$$

e questo è vero per conv. dominata $\square$

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ Stesso setting.

Supponiamo che

(i) stesso (i) di prima

(ii) per ogni $x \in \mathbb{X}$ la funzione $t \to f(t,x)$ è derivabile in (a,b)

(iii) per ogni $t \in (a,b)$ l'integrale $\int_{\mathbb{X}} f(t,x)\, d\mu(x) \in \mathbb{R}$

(iv) esiste $g : \mathbb{X} \to [0,+\infty]$ t.c.

$$\int_{\mathbb{X}} g(x)\, d\mu < +\infty$$

$$|f_t(t,x)| \le g(x) \qquad \forall t \in (a,b) \ \forall x \in \mathbb{X}$$

Dominazione della derivata

Allora $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile e vale

$$\varphi'(t) = \int_{\mathbb{X}} f_t(t,x)\, d\mu(x) \qquad \forall t \in (a,b)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Prendo $t_0 \in (a,b)$, prendo una succ. $h_n \to 0$ e mostro che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(t_0+h_n) - \varphi(t_0)}{h_n} = \int_{\mathbb{X}} f_t(t_0,x)\, d\mu(x)$$

L'argomento del LHS è

$$\int_{\mathbb{X}} \underbrace{\boxed{\frac{f(t_0+h_n,x) - f(t_0,x)}{h_n}}}_{g_n(x)}\, d\mu(x)$$

e $g_n(x) \to f_t(t_0,x)$ PUNTUALMENTE

Se trovo una dominazione per $g_n(x)$ sono ok

$$|g_n(x)| = |f_t(\text{qualche parte}, x)| \le g(x) \text{ per la dominazione}$$

—o —o —

Per il futuro, cito 2 teo. importanti

$\boxed{\text{Teo 1}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziana.
Allora esiste $E \subseteq \mathbb{R}$ con misura di Lebesgue nulla tale che

$f'(x)$ esiste per ogni $x \notin E$.

$\boxed{\text{Teo 2}}$ Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrabile (localmente).
Allora esiste $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con misura di leb. nulla t.c.

$$\lim_{r \to 0^+} \underbrace{\frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x)\, d\mu}_{\text{media di } f \text{ in } B_r(x_0)} = f(x_0) \quad \forall x_0 \notin E.$$

Corollario facile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile.

Definisco $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$.

Allora $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \notin E$ (come sopra)