Basi cicliche (Cappellini-Casulli)

<u>Teorema:</u> Sia $\mathbb{K}$ un campo. Sia $\mathbf{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Siano $k \in \{1, ..., n\}$, $a_1, ..., a_k \in \{1, ..., n\}$, tali che $a_1 + ... + a_k = n$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$, tali che $\forall i, j \in \{1, ..., k\}, i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.
Sia $f \in End(\mathbf{V})$ tale che $m_f = (t - \lambda_1)^{a_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_k)^{a_k}$.
Allora detta $B = \{v_{1,1}, ..., v_{a_1,1}, v_{1,2}, ..., v_{a_2,2}, ..., v_{1,k}, ..., v_{a_k,k}\}$ una base di $\mathbf{V}$ di Jordan per f, $v = v_{a_1,1} + v_{a_2,2} + ... + v_{a_k,k}$ genera una base di $\mathbf{V}$ ciclica per f.

<u>DIMOSTRAZIONE:</u> Sia $I(f, v) = \{q \in \mathbb{K}[t] | q(f)(v) = 0\}$ un ideale di $\mathbb{K}[t]$ e sia $m_{f,v}$ il suo generatore. v genera una base di $\mathbf{V}$ ciclica per $f \Leftrightarrow m_{f,v} = m_f$.
Poiché $m_{f,v}(f)$ è un endomorfismo,

$$m_{f,v}(f)(v) = 0 \Rightarrow m_{f,v}(f)(v_{a_1,1}) + ... + m_{f,v}(f)(v_{a_k,k}) = 0.$$

$v_{a_1,1} \in V'_{\lambda_1}, ..., v_{a_k,k} \in V'_{\lambda_k}$; $V'_{\lambda_1}, ..., V'_{\lambda_k}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ f-invarianti, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ $i \neq j$ $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = 0$, allora

$$m_{f,v}(f)(v_{a_1,1}) + ... + m_{f,v}(f)(v_{a_k,k}) = 0 \Leftrightarrow m_{f,v}(f)(v_{a_i,i}) = 0 \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

$\forall i \in \{1, ..., k\}$.
Poichè $(f - \lambda_i id)^{a_i}(w) = 0$ $\forall w \in V'_{\lambda_i}$ in particolare $(f - \lambda_i id)^{a_i}(v_{a_i,i}) = 0$.
Poichè $v_{a_i,i}, (f - \lambda_i id)(v_{a_i,i}), ..., (f - \lambda_i id)^{a_i - 1}(v_{a_i,i})$ sono linearmente indipendenti (base di Jordan)

$$(f - \lambda_i id)^{\alpha}(v_{a_i,i}) = 0 (\alpha \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow \alpha \geq a_i \Rightarrow (t - \lambda_i id)^{a_i} \mid m_{f,v}.$$

Quindi $m_f = (t - \lambda_1 id)^{a_1} \cdot (t - \lambda_2 id)^{a_2} \cdot ... \cdot (t - \lambda_k id)^{a_k} | m_{f,v}$.
Poichè $I(f) \subseteq I(f, v) m_{f,v} | m_f \Rightarrow m_{f,v} = m_f$. Tesi.