Il Centro di un
Prodotto Semidiretto

SIMONE CAPPELLINI
http://poisson.phc.unipi.it/~cappellini

24 novembre 2016

Proviamo a caratterizzare in modo più generale possibile il centro di un prodotto semidiretto di gruppi utilizzando meno strumenti possibili, dopo aver fissato qualche notazione preliminare.

DEFINIZIONE: Dati H, K gruppi, si definisce il prodotto semidiretto $G = H \rtimes_\varphi K$ come il prodotto cartesiano di H per K dotato della struttura di gruppo con la seguente operazione: data

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & K & \to & Aut(H) \\ & k & \mapsto & \varphi_k \end{array}$$

si ha

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) := (h_1\varphi_{k_1}(h_2), h_2k_2)$$

DEFINIZIONE: Si dice centro di un gruppo G il sottogruppo

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \forall g \in G\}$$

DEFINIZIONE: Dato un omomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & K & \to & Aut(H) \\ & k & \mapsto & \varphi_k \end{array}$$

si definisce $\text{Fix}(\varphi) = \{x \in H \mid \varphi_k(x) = x \forall k \in K\}$.

Ricordiamo inoltre che $\text{Ker}(\varphi) = \{k \in K \mid \varphi_k(h) = h \forall h \in H\}$.

PROPOSIZIONE: Sia $G = H \rtimes_\varphi K$ un prodotto semidiretto con H gruppo abeliano. Allora

$$Z(G) = \text{Fix}(\varphi) \times (Z(K) \cap \text{Ker}(\varphi))$$

Dimostrazione. Mostriamo $\supseteq$:
Sia (x, y) con $x \in \text{Fix}(\varphi)$ e $y \in (Z(K) \cap \text{Ker}(\varphi))$.

Per ogni $(a,b) \in G$ vale

$$(x,y)(a,b) = (x\varphi_y(a), yb)$$
$$(a,b)(x,y) = (a\varphi_b(x), by)$$

Poiché $y \in Z(K)$ allora $by = yb$; poiché $x \in$Fix(φ) si ha che $\varphi_b(x) = x$ e dal fatto ceh $y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ si deduce che $\varphi_y(a) = a$. Infine, dato che $x \in Z(H)$ (essendo H abeliano), si ha che $x\varphi_y(a) = xa = ax = a\varphi_b(x)$.
Dunque $(a,b)(x,y) = (x,y)(a,b)$, ovvero $(x,y) \in Z(G)$.

Mostriamo ora $\subseteq$:
chiamando con e_H ed e_K le unità dei gruppi H e K, se $(x,y) \in Z(G)$ allora si deve avere per ogni $a \in H$:
$(ax, y) = (a\varphi_{e_K}(x), e_K y) = (a, e_K)(x,y) = (x,y)(a,e_K) = (x\varphi_y(a), ye_K) = x\varphi_y(a), y)$. Dunque si deve avere $ax = x\varphi_y(a)$ in H. Poiché H è abeliano, ciò è equivalente a richiedere che $a = \varphi_y(a) \forall a \in H$, ovvero che $y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Inoltre si deve avere anche che $(e_H, b)(x,y) = (x,y)(e_H,b)$ per ogni $b \in K$: $(\varphi_b(x), by) = (e_H,b)(x,y) = (x,y)(e_H,b) = (x\varphi_y(e_H), yb) = (x, yb)$. Dunque si deve avere che $yb = by \forall b \in K$, cioè $y \in Z(K)$ e che $x = \varphi_b(x) \forall b \in K$, cioè $x \in$Fix(φ).
Rimettendo insieme le condizioni si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione. Più in generale, nel caso in cui H non sia abeliano, è ancora vero che

$$Z(G) \supseteq (Z(H) \cap \mathrm{Fix}(\varphi)) \times (Z(K) \cap \mathrm{Ker}(\varphi))$$

con le stesse argomentazioni di cui sopra, ma non vale l'altra inclusione.

Infatti:

Esempio: Sia H un gruppo avente centro banale, e sia $x \in H$ un elemento di ordine p primo. Consideriamo $G = H \rtimes_\varphi K$ con $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle y \rangle$ e $\varphi_y(h) = xhx^{-1}$.
Avendo H centro banale, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e_K\}$, e dunque

$$(Z(H) \cap \mathrm{Fix}(\varphi)) \times (Z(K) \cap \mathrm{Ker}(\varphi)) = \{(e_H, e_K)\}$$

Ma $(x, y^{-1}) \in Z(G)$: infatti per ogni $(a, y^i) \in G$

$$(x, y^{-1})(a, y^i) = (x\varphi_{y^{-1}}(a), y^{-1}y^i) = (xx^{-1}ax, y^{i-1}) = (ax, y^{i-1})$$

$$(a, y^i)(x, y^{-1}) = (a\varphi_{y^i}(x), y^{i-1}) = (ax^i x x^{-i}, y^{i-1}) = (ax, y^{i-1})$$

Esempio: $G = S_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con la φ definita sopra è un pratico esempio in cui il contenimento in $Z(G)$ è stretto.