Teoremi di unicità di Cartan e Automorfismi di B^n

Simone Cappellini
http://poisson.phc.unipi.it/~cappellini

8 novembre 2018

Introduzione

Lo studio degli automorfismi del disco di Poincaré, vale a dire dei biolomorfismi $f\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ è un mattone fondamentale per lo studio ad esempio della geometria iperbolica. Risultati come quelli del caso 1-dimensionale possono essere generalizzati senza troppi intoppi anche in dimensione superiore: le trasformazioni di Moebius si estendono anche su B^n, e continuano (assieme alle trasformazioni unitarie) a generare il gruppo $\mathrm{Aut}(B^n)$; una generalizzazione della nozione di "semipiano superiore" e di conseguenza della trasformazione di Cayley permette di scrivere esplicitamente altre famiglie di biolomorfismi che presentano particolari insiemi di punti fissi (automorfismi parabolici e iperbolici).
Prima però di studiare in dettaglio la struttura del gruppo $\mathrm{Aut}(B^n)$ enunceremo e dimostreremo due risultati dovuti a Cartan che riguardano la rigidità delle mappe olomorfe su domini limitati e circolari, utili poi nel seguito del seminario.

1 Teoremi di unicità di Cartan

Prima di studiare in dettaglio gli automorfismi di B^n, vale a dire i biolomorfismi da B^n in sé, è opportuno riportare e dimostrare due risultati dovuti a Cartan riguardanti la rigidità delle mappe olomorfe.
Ricordiamo che

Definizione 1.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto e sia $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^m$ olomorfa. Per ogni $z \in \Omega$ possiamo definire la *derivata* di F come l'unica applicazione lineare $F'\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ tale che per ogni h vicino all'origine di $\mathbb{C}^n$ valga

$$F(z+h) = F(z) + F'(z)h + o(|h|^2).$$

Il primo dei due teoremi di Cartan afferma che mappe olomorfe su domini limitati sono completamente determinate al primo ordine, vale a dire:

Teorema 1.2 (Primo Teorema di unicità di Cartan)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio (cioè un aperto connesso) limitato, $F\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ una mappa olomorfa e supponiamo che esista un $p \in \Omega$ tale che $F(p) = p$ e $F'(p) = I$. Allora vale che $F(z) = z$ per ogni $z \in \Omega$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo $p = 0$. Esistono allora $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ tali che $r_1 B^n \subseteq \Omega \subseteq r_2 B^n$. Per $|z| < r_1$, F ha una espansione omogenea

$$F(z) = z + \sum_{s=2}^{+\infty} F_s(z)$$

dove ogni $F_s(z)$ è una mappa da $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^n$ le cui componenti sono polinomi omogenei di grado s.
Sia F^k la $k-$esima iterata di F; dimostriamo per induzione che per ogni $m \geq 2$ vale $F_s = 0$ per ogni $2 \leq s < m$. Il passo base è vero a vuoto. Supponiamo allora per m generico che valga l'ipotesi induttiva: F^k ha dunque espansione omogenea del tipo

$$F^k(z) = z + kF_m(z) + \ldots$$

(banale induzione su k), e l'omogeneità delle mappe F_s implica che

$$kF_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^k(e^{i\theta} z) e^{-im\theta} d\theta.$$

Poiché F^k mappa Ω in sé, abbiamo $|F^k(e^{i\theta} z)| < r_2$ per ogni $z \in r_1 B^n$ e per ogni θ. Dunque $k|F_m(z)| < r_2$ per ogni k fissato e $z \in r_1 B^n$. Questo implica $F_m = 0$, da cui la tesi induttiva.
Per concludere la dimostrazione, è sufficiente osservare che Ω è connesso e $F(z) = z$ per ogni $z \in r_1 B^n$. □

Ricordando inoltre cosa sia un insieme circolare, si ottiene un ulteriore vincolo per l'esistenza di applicazioni biolomorfe tra domini di $\mathbb{C}^n$.

Definizione 1.3. Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice *circolare* se $e^{i\theta} z \in E$ ogniqualvolta $z \in E$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.4 (Secondo Teorema di unicità di Cartan)**.** *Siano Ω_1 e Ω_2 domini circolari di $\mathbb{C}^n$ entrambi contenenti lo zero e con Ω_1 limitato, e sia $F\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un biolomorfismo con $F(0) = 0$. Allora F è una applicazione lineare.*

Dimostrazione. Siano $G = F^{-1}$ e $A = F'(0)$. Poiché $G(F(z)) = z$, vale $G'(0)A = I$ e perciò $G'(0) = A^{-1}$. Fissiamo adesso un θ reale e definiamo

$$H(z) = G(e^{-i\theta} F(e^{i\theta} z)), \qquad \text{per } z \in \Omega_1.$$

Poiché Ω_1 e Ω_2 sono circolari, $H(z)$ è ben definita e H è una applicazione olomorfa da Ω_1 in sé che soddisfa $H(0) = 0$ e $H'(0) = I$. Per il teorema precedente $H(z) = z$.
Applicando F a questa e moltiplicando per $e^{i\theta}$ otteniamo

$$F(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} F(z)$$

per ogni $z \in \Omega_1$ e θ reale. Il termine lineare nell'espansione omogenea di F è quindi l'unico ad essere diverso da 0. $\square$

2 Il gruppo $\mathrm{Aut}(B^n)$

Come già detto, l'insieme dei biolomorfismi da B^n in sé forma un gruppo con l'operazione di composizione chiamato $\mathrm{Aut}(B^n)$. Nel caso 1-dimensionale essi sono tutti ottenuti da rotazioni e trasformazioni di Moebius, vale a dire automorfismi φ_α per ogni $\alpha \in B \subseteq \mathbb{C}$ che scambiano α e 0, definiti come

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Se $n > 1$, possiamo allo stesso modo definire un automorfismo $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(B^n)$ che scambia $a \in B^n$ con l'origine.
Per fare ciò, fissato $a \in B^n$, siano P_a la proiezione ortogonale di $\mathbb{C}^n$ sul $\mathbb{C}-$sottospazio generato da a e sia $Q_a = I - P_a$ la proiezione sul complemento ortogonale di $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(a)$. In altre parole, $P_0 = 0$ e per ogni $a \neq 0$ si ha

$$P_a(z) = \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a.$$

Poniamo inoltre $s_a = \sqrt{1 - |a|^2}$ e definiamo infine

$$\varphi_a(z) := \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

Tale applicazione è olomorfa su $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \langle z, a \rangle \neq 1\}$, e poiché abbiamo scelto a di modulo strettamente minore di 1 vale che $\overline{B^n} \subseteq \Omega$. Per alleggerire le notazioni, spesso scriveremo P, Q, s al posto di P_a, Q_a, s_a.

Osservazione. Se $n = 1$, essendo $P = I$ e $Q = 0$, le due definizioni precedenti di φ_a coincidono. Inoltre, osserviamo che $\varphi_0 = -I$.

Elenchiamo adesso delle proprietà di semplice verifica a proposito delle applicazioni appena descritte:

Teorema 2.1. *Per ogni $a \in B^n$, per φ_a valgono le seguenti proprietà:*

(i) $\varphi_a(0) = a$ *e* $\varphi_a(a) = 0$*;*

(ii) $\varphi_a'(0) = -s^2P - sQ$ *e* $\varphi_a'(a) = -P/s^2 - Q/s$*;*

(iii) *La seguente identità vale per ogni* $z, w \in \overline{B^n}$*:*

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w) \rangle = \frac{(1 - \langle a, a \rangle)(1 - \langle z, w \rangle)}{(1 - \langle z, a \rangle)(1 - \langle a, w \rangle)};$$

(iv) *La seguente identità vale per ogni* $z \in \overline{B^n}$*:*

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2};$$

(v) φ_a *è una involuzione;*

(vi) φ_a *è un omeomorfismo da* $\overline{B^n}$ *in sé, e* $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(B^n)$*.*

Dimostrazione. Tutte le proprietà sono pressoché immediate, ci limitiamo a dimostrare (v): l'applicazione $\psi := \varphi_a \circ \varphi_a$ è olomorfa da B^n in sé, con $\psi(0) = 0$, e con

$$\psi'(0) = \varphi_a(a)'\varphi_a(0)' = (-P/s^2 - Q/s)(-s^2P - sQ) = P + Q = I$$

(utilizzando il punto (ii) e che $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$). Per il primo teorema di unicità di Cartan, $\psi(z) = z$, e dunque (v) è provato. □

Come immediata conseguenza di queste proprietà, si ottiene che

Teorema 2.2. $\mathrm{Aut}(B^n)$ *agisce transitivamente su* B^n*.*

Dimostrazione. Scelti $a, b \in B^n$ si ha che $\varphi_b \circ \varphi_a$ è un automorfismo di B^n che porta a in b. □

Combinando questo con il teorema di unicità di Cartan, possiamo mostrare che il teorema della mappa di Riemann fallisce su $\mathbb{C}^n$ con $n > 1$:

Teorema 2.3. *Sia* $\Omega \ni 0$ *un dominio circolare di* $\mathbb{C}^n$*, e sia* $F \colon B^n \longrightarrow \Omega$ *un biolomorfismo. Allora esiste una trasformazione lineare* G *di* $\mathbb{C}^n$ *tale che* $G(B^n) = \Omega$*.*

Dimostrazione. Sia $a = F^{-1}(0)$. Allora $G := F \circ \varphi_a$ è un biolomorfismo da B^n in Ω che fissa l'origine. Per il secondo teorema di unicità di Cartan, G è lineare. □

Corollario 2.4 (Teorema di Poincaré)**.** *Se* $n > 1$*, non esistono biolomorfismi da* B^n *nel polidisco* Δ^n*.*

Dimostrazione. Isomorfismi lineari trasformano sempre palle in ellissoidi. □

Osserviamo che il Teorema 2.3 vale con la stessa dimostrazione anche rimpiazzando B^n con un generico dominio circolare contenente l'origine e con gruppo degli automorfismi transitivo.

Finora abbiamo definito soltanto una famiglia di automorfismi, quelli di scambio φ_a. Mostriamo adesso che in realtà tutti gli automorfismi della palla si possano ottenere a partire da questi e dalle trasformazioni unitarie (che rientrano in modo ovvio in $\mathrm{Aut}(B^n)$):

Teorema 2.5. *Se $\psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$ e $a = \psi^{-1}(0)$, allora esiste una unica trasformazione unitaria U tale che*

$$\psi = U\varphi_a.$$

Dimostrazione. L'applicazione $\psi \circ \varphi_a$ è un automorfismo di B^n che fissa l'origine, dunque è lineare, per il secondo teorema di unicità di Cartan. Poiché le trasformazioni unitarie sono le uniche applicazioni lineari di $\mathbb{C}^n$ che preservano B^n, esiste una U unitaria tale che $\psi \circ \varphi_a = U$. Essendo φ_a una involuzione, si ottiene $\psi = U\varphi_a$. L'unicità di U è anch'essa conseguenza del ragionamento sopra. $\square$

Una domanda che a questo punto viene spontaneo porsi è se ci siano relazioni tra $\mathrm{Aut}(B^n)$ e $\mathrm{Aut}(B^N)$ con $1 \leq n < N$ generici valori naturali.
Considerando la decomposizione in somma diretta ortogonale $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{N-n}$ e identificando B^n nel modo naturale, una interessante proprietà degli automorfismi di scambio a tal proposito è che possono sempre essere estesi ad automorfismi di palle in dimensione maggiore:

Teorema 2.6. *Ogni $\psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$ si estende ad un $\Psi \in \mathrm{Aut}(B^N)$.*

Dimostrazione. Poiché operatori unitari possono sempre essere estesi, è sufficiente provare la tesi per $\psi = \varphi_a$ con $a \in B^n$. Ricordando che $s = \sqrt{1 - |a|^2}$, per ogni $z = z' + z'' \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{N-n}$ definiamo

$$\Phi_a(z) := \varphi_a(z') - \frac{sz''}{1 - \langle z', a\rangle}.$$

Poiché $a \in B^n$, vale che $\langle z, a\rangle = \langle z', a\rangle$, da cui Φ_a coincide con l'involuzione di scambio definita ad inizio sezione, ma su B^N invece che B^n. Infatti:

$$\begin{aligned}\Phi_a(z) &= \frac{a - P_a(z') - sQ_a(z')}{1 - \langle z', a\rangle} - \frac{sz''}{1 - \langle z', a\rangle} = \\ &= \frac{a - P_a(z) - s(Q_a(z') + z'')}{1 - \langle z, a\rangle} = \frac{a - P_a(z) - sQ_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle}.\end{aligned}$$

$\square$

3 Trasformazione di Cayley in $\mathbb{C}^n$ e punti fissi di automorfismi

Spesso nel caso 1-dimensionale risulta utile trasferire problemi dal disco unitario al semipiano superiore tramite la cosiddetta trasformazione di Cayley $w = i(1+z)/(1-z)$. Uno strumento molto simile può essere usato anche in dimensione maggiore, dopo aver capito in che modo generalizzare la nozione di "semipiano superiore".

Definiamo allora *semispazio superiore* in $\mathbb{C}^n$ il dominio Ω costituito da tutti i $w = (w_1, w') \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{n-1}$ tali che

$$\operatorname{Im} w_1 > |w'|^2$$

dove $w' = (w_2, \dots, w_n)$ e $|w'|^2 = |w_2|^2 + \dots + |w_n|^2$.

Definizione 3.1. La trasformazione di Cayley è la mappa Φ che manda $z \in \mathbb{C}^n$ (con $z_1 \neq 1$) in $w \in \mathbb{C}^n$ tramite

$$w = i\frac{e_1 + z}{1 - z_1}$$

dove $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Semplici calcoli mostrano che

$$\operatorname{Im} w_1 - |w'|^2 = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z_1|^2} \qquad \text{e} \qquad z = \frac{2w}{i + w_1} - e_1.$$

Di conseguenza si ha che Φ è un biolomorfismo tra B^n e il semispazio superiore Ω.

Considerando $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ e la sua compattificazione di Alexandroff $\overline{\Omega} \cup \{\infty\}$, definendo $\Phi(e_1) = \infty$ vale anche che Φ è un omeomorfismo della palla chiusa $\overline{B^n}$ su di essa.

Come su B^n risulta semplice la scrittura degli automorfismi di scambio φ_a, allo stesso modo su Ω risulta comodo scrivere altre famiglie di automorfismi, chiamate dilatazioni non-isotropiche δ_t e traslazioni h_a, che vedremo in quanto esempi di automorfismi con particolari insiemi di punti fissi.

Ricordiamo le seguenti definizioni:

Definizione 3.2. Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice affine se per ogni $x_1, \dots, x_k \in E$ (con $k \in \mathbb{N}$) e $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ dove $\sum c_i = 1$, vale che $\sum c_i x_i \in E$.

Definizione 3.3. Data $f \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, l'insieme dei *punti fissi* di f è quello costituito da tutti gli $x \in \mathbb{C}^n$ tali che $f(x) = x$.

Citiamo inoltre il seguente risultato, che segue da fatti di validità generale per spazi vettoriali su campi generici:

Proposizione 3.4. *Se $\psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$ e E è un sottoinsieme affine di B^n, vale a dire $E = E' \cap B^n$ con E' un sottoinsieme affine di $\mathbb{C}^n$, allora lo è anche $\psi(E)$.*

Come possiamo notare dal teorema seguente, gli automorfismi di B^n hanno insiemi di punti fissi molto semplici:

Teorema 3.5. *Se $\psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$ fissa almeno un punto di B, allora l'insieme dei suoi punti fissi è affine. Viceversa, ogni sottoinsieme affine di B^n è l'insieme dei punti fissi di un qualche automorfismo $\psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\psi(a) = a$ per un qualche $a \in B^n$. Allora $\varphi_a \circ \psi \circ \varphi_a$ fissa l'origine, da cui è una trasformazione unitaria. Quindi l'insieme dei suoi punti fissi è un sottospazio vettoriale E di $\mathbb{C}^n$, da cui i punti fissi di ψ sono $\varphi_a(E \cap B^n)$.
Viceversa, fissato un E affine di B^n e scelto $a \in E$, per la proposizione sopra esiste un sottospazio $Y \subseteq \mathbb{C}^n$ tale che $\varphi_a(E) = B^n \cap Y$. Scegliendo una trasformazione unitaria avente come luogo dei punti fissi esattamente Y e definendo $\psi = \varphi_a U \varphi_a$ si ottiene quanto voluto. $\square$

Come conseguenza del Teorema del punto fisso di Brouwer, ogni automorfismo $\psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$ fissa almeno un punto di $\overline{B^n}$ (sia esso interno o sul bordo). Gli automorfismi di scambio hanno un punto fisso interno, mentre gli esempi seguenti forniscono famiglie di automorfismi che fissano esattamente uno e due punti nella chiusura senza tuttavia avere punti fissi in B^n. Questo è il massimo che possiamo ottenere, poiché:

Teorema 3.6. *Se $\psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$ fissa tre punti distinti in ∂B^n, allora ψ fissa almeno un punto in B^n.*

Dimostrazione. Siano z_1, z_2, z_3 punti fissi distinti di ψ in ∂B^n. Dall'identità (iii) del Teorema 2.1 si ottiene

$$1 - \langle z_i, z_k \rangle = \frac{(1 - |a|^2)(1 - \langle z_i, z_k \rangle)}{(1 - \langle z_i, a \rangle)(1 - \langle a, z_k \rangle)}$$

dove $a = \psi^{-1}(0)$ e $i, k = 1, 2, 3$. Se $i \neq k$ allora $\langle z_i, z_k \rangle \neq 1$ (calcolando $\langle z_i - z_k, z_i - z_k \rangle$), da cui

$$1 - \langle z_i, a \rangle = \frac{1 - |a|^2}{1 - \langle a, z_k \rangle}.$$

Scegliendo ad esempio $k = 3$ e $i = 1, 2$ questo implica che $\langle z_1, a \rangle = \langle z_2, a \rangle$. Poniamo adesso $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \in B^n$. Poiché vale l'uguaglianza sopra si ottiene

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{2} \left(\varphi_a(z_1) + \varphi_a(z_2) \right).$$

Infine, essendo $\psi = U\varphi_a$ con U lineare (unitaria), vale $\psi(z) = \frac{1}{2}(\psi(z_1)\psi(z_2)) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = z$. $\square$

Abbiamo già caratterizzato tutti gli automorfismi involutivi che fissano esattamente un punto all'interno di B^n. Infatti:

Teorema 3.7. (i) *Ogni* φ_a *fissa esattamente un punto in* B^n *e nessun punto sul suo bordo;*

(ii) *Se* $b \in B^n$ *e* $a = 2b/(1+|b|^2)$*, allora* φ_a *è l'unica involuzione di* $\mathrm{Aut}(B^n)$ *che ha* b *come unico punto fisso. In particolare vale che*

$$\varphi_a = \varphi_b \circ \varphi_0 \circ \varphi_b.$$

Definizione 3.8. Scelto $0 < t < +\infty$, definiamo la *dilatazione non-isotropica* $\delta_t \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ come

$$\delta_t(w) = (t^2 w_1, tw').$$

Quando $t \neq 1$, l'applicazione appena definita fissa soltanto 0 e ∞ su $\overline{\Omega} \cup \{\infty\}$.

Di conseguenza $\Phi^{-1} \circ \delta_t \circ \Phi$ è un automorfismo di B^n i cui unici punti fissi in $\overline{B^n}$ sono $\pm e_1$.

Definizione 3.9. Scelto $a \in \partial\Omega$, definiamo la *traslazione* $h_a \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ come

$$h_a(w) = (w_1 + a_1 + 2i\langle w', a'\rangle, w' + a').$$

Quando $a \neq 0$, l'applicazione appena definita non fissa nessun punto di $\overline{\Omega}$.

Di conseguenza, $\Phi^{-1} \circ h_a \circ \Phi$ è un automorfismo di B^n il cui unico punto fisso in $\overline{B^n}$ è e_1.