Def: Sia X insieme. Sia τ una famiglia di sottoinsiemi tale che:

1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$
2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
3) $\{A_i\}_{i\in I} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$

Allora τ è detto TOPOLOGIA.

Es: Gli aperti (veri e propri) sono una topologia.

Def: (X, τ) viene detto SPAZIO TOPOLOGICO.

Def: $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ è continua se $\forall \Omega \in \sigma$ allora $f^{-1}(\Omega) \in \tau$

Un elemento di una topologia si chiama aperto.

Una topologia indotta da una distanza è fatta "con le palle" (quella euclidea ne è un esempio).

[redacted]

Def: Dato un insieme X e una topologia τ, si definisce base di τ una sottofamiglia $\mathcal{B}$ tale che ogni $A \in \tau$ si scrive come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente affinché una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{B}$ sia base di una topologia τ è

1) $X = \bigcup_{i\in I} B_i \;:\; B_i \in \mathcal{B}$ (il $\emptyset$ è unione vuota)
2) $\forall A, B \in \mathcal{B} \wedge \forall x \in A \cap B \;\exists C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$

DIMOSTR: [...] [redacted]

GEOMETRIA II - LEZIONE 2 -

$\mathbb{R}^+$ ammette una struttura di spazio vettoriale (completamente diversa da quella indotta da $\mathbb{R}$).

Def: (Y, σ) è un sottospazio topologico di (X, τ) se e solo se $Y \subseteq X$ e $\forall \Omega \in \sigma \;\exists A \in \tau : \Omega = A \cap Y$

EQUIVALENTEMENTE:

Def: (Y, σ) è un sottospazio topologico di (X, τ) se e solo se la funzione immersione (l'identità) $i : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ è continua e σ è la topologia meno fine che rende i continua.

Def: 2 spazi topologici (X, σ) e (Y, τ) sono omeomorfi (equivalenti) se esiste $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ tale che:

a) f è bigettiva;
b) f è continua;
c) f^{-1} è continua.

f si dice omeomorfismo.

Es: (X, τ) con τ topologia discreta ($\mathcal{P}(X) = \tau$). Allora ogni f è continua (ma f^{-1} è continua solo se anche $\sigma = \mathcal{P}(Y)$)

Def: Date 2 topologie τ e σ. τ si dice più fine di σ se $\sigma \subseteq \tau$.

Analogamente se l'identità $id : (X,\tau) \to (X,\sigma)$ è continua.

RETTA DI SORGENFREY

Def: È l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia i cui aperti sono tutti del tipo $\bigcup [a, b[$

La retta di Sorgenfrey è più fine di quella euclidea, perché $]a, b[= \bigcup_{c > a} [c, b[$ (ogni aperto topologicamente euclideo è un aperto nella topologia di Sorgenfrey)

Def: Dato A insieme, si definisce chiusura di A, $\overline{A}$, il più piccolo chiuso che contiene A.

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supseteq A} F$$

(insieme dei punti aderenti)

se $x \in \overline{A}$ allora $\forall U$ intorno $\ni x$ $U \cap A \neq \emptyset$

__Def__: Dato A insieme, si definisce la sua parte interna $\mathring{A}$ l'unione di tutti gli aperti contenuti in A.

$$\mathring{A} = \bigcup_{\Omega \subseteq A} \Omega$$ (insieme dei punti interni)

__Def__: Si definisce frontiera di A l'insieme

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$ (è un chiuso perché intersezione di chiusi)

__Def__. Si definisce intorno di un punto un insieme che contiene un aperto che contiene il punto.

Oss:
- A intorno e $B \supseteq A$. Allora B intorno
- A, B intorni di x. $A \cap B$ intorno di x.

__Def__: Si definisce sistema fondamentale di intorni di x un insieme di intorni di x tale che $\forall$ intorno di x $\exists$ uno elemento del sistema che vi è contenuto.

Es: $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ è sist. fond. per $\{0\}$

__Prop__: Sia $f: X \to Y$ allora

$$f \text{ continua} \iff \forall A \subseteq X \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ $\overline{f(A)}$ è un chiuso $\Rightarrow f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso (complementari di aperti)

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq \overline{A} \qquad \Rightarrow \overline{f(A)} \supseteq f(\overline{A})$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dimostro che C chiuso $\Rightarrow f^{-1}(C)$ chiuso

Sia $A = f^{-1}(C)$

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) = f(\overline{A}) \subseteq \overset{\overline{f(A)}}{\cancel{\quad}} = \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C} = C$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C) \qquad \Rightarrow f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$$

__Def__: f si dice aperta se trasforma aperti in aperti

__Def__: f si dice chiusa se trasforma chiusi in chiusi.

Oss: f omeomorfismo è aperto e chiuso.

__Def__: Un insieme D con $D \subseteq X$ si dice denso se $\overline{D} = X$

Es: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (ipotizzando l'altra accezione di denso)

Dim: Sia $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, che è aperto.

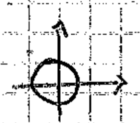
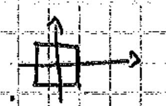
Supponiamo $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$. Allora contiene tutta una palletta. Ma vicino quanto voglio a $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ (sviluppo decimale fino ad un certo ordine) esiste un $q \in \mathbb{Q}$.

Assurdo perché $q \in \mathbb{Q}$ ma $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \begin{cases} q \in \mathbb{Q} \\ q \notin \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$

__Def__: Uno spazio metrico è uno spazio (un insieme) dotato di una distanza definita positiva, simmetrica e per cui vale la proprietà triangolare.

Oss: Uno spazio metrico è uno spazio topologico con una topologia indotta dalla distanza.

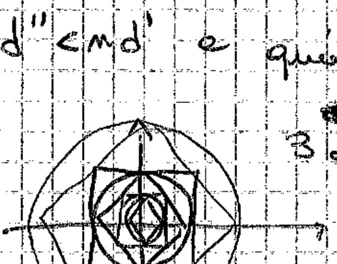
Fatti:
1) Palle aperte sono aperti
2) Palle chiuse $= \{x \mid d(x, \overline{x}) \leq r\}$
3) d_1 e d_2 sono equivalenti se $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ (τ topologia)

Esempi di distanze: (in $\mathbb{R}^2$)
- $d_E = \sqrt{\Sigma (x_i - y_i)^2}$ le palle sono 
- $d' = \sup(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ le palle sono 
- $d'' = \Sigma |x_i - y_i|$ le palle sono 

Quale delle 3 è più fine?

(Se $d_1(x,y) \leq d_2(x,y)$ allora $B_2(\overline{x}, r) \subseteq B_1(\overline{x}, r)$)

Quindi $d' < d_E < d'' < n d'$ e quindi la topologia indotta dalle 3 distanze sono equivalenti.



Oss. Sia d una distanza e sia $d' = \inf(d, 1)$. Allora d e d' sono equivalenti

GEOMETRIA II - LEZIONE 3

RIASSUNTO:

- Dato un insieme e una topologia si definisce la continuità di funzioni (continuità rispetto alla topologia)
- Se scelgo una classe decente di sottoinsiemi allora esiste una topologia "generata"

[illegible]

TEOREMA Sia $Y \subseteq X$

$$Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} X$$

f è continua $\Leftrightarrow$ $i \circ f$ è continua

DIM: $\textcircled{\Leftarrow}$ banale

$\textcircled{\Rightarrow}$ Per ip. $\forall A \subseteq Y$ aperto $f^{-1}(A)$ aperto

$\exists \Omega \subseteq X$
$\Omega \cap Y = A$ $\quad (i \circ f)^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\underline{i^{-1}(\Omega)}) = f^{-1}(\underline{A})$ aperto per ip.

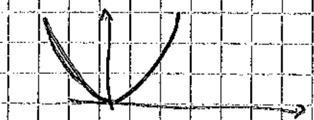
TEOREMA: $Y \subseteq X$ Allora $\forall A \subseteq Y$ $\quad \overline{A}^{Y} = \overline{A}^{X} \cap Y$

DIM: $\textcircled{\subseteq}$

$\textcircled{\supseteq}$

LEMMA 3.57

Esempi:
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
  $t \mapsto (t, t^2)$



applicazione immersiva chiusa

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
  $t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^2}{1+t^4}\right)$

applicaz. immersiva non chiusa

Infatti, scelto $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus (-a,a)$ è un chiuso
L'immagine non è un chiuso, perché manca il punto di accumulazione

PRODOTTI TOPOLOGICI

Idea: Dati 2 sp. topologici $(X, \tau)(Y, \sigma)$, voglio definire una topologia in $X \times Y$. Voglio che

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

di modo che $Z \xrightarrow{f} X \times Y$ sia continua sse è continua sulle componenti $[(p \circ f) \text{ e } (q \circ f)]$ le proiezioni siano continue

Def La topologia prodotto (definito) è la topologia <u>meno</u> fine tale che p e q siano continue.

GEOMETRIA II - LEZIONE 5 - ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1: Sia X insieme e sia $x_0 \in X$. Sia

$$\tau = \{ A \subseteq X \mid x_0 \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito} \}$$

Dimostra che è una topologia.

- $\emptyset \in \tau$ perché $x_0 \in \emptyset$;
- $X \in \tau$ perché $X \setminus X$ è finito;
- $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B$: → se $x_0 \notin A$, $x_0 \notin B \Rightarrow x_0 \notin A \cap B$
  → se $x_0 \notin A$, $x_0 \in B \Rightarrow x_0 \notin A \cap B$
  → se $x_0 \in A$, $x_0 \notin B \Rightarrow x_0 \notin A \cap B$
  → se $x_0 \in A \cap B$ allora sappiamo che $X \setminus A$ è finito e $X \setminus B$ è finito
  Quindi $X \setminus (A \cap B) = X \setminus A \cup (X \setminus B)$ che è finito
- $\bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \tau$. → se $x_0 \notin A_i \ \forall i \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i \in I} A_i$
  → se $x_0 \in A_i$ per qualche i
  $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap (X \setminus A_i)$
  Ma $\exists A_i : x_0 \notin A_i \Rightarrow X \setminus A_i$ è finito
  e l'intersezione resta finita

ESERCIZIO 2: X, $\tau = \{ A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ oppure } X \setminus A \text{ è numerabile} \}$

- $\emptyset$ e $X \in \tau$
- Stessa dimostrazione di sopra
  ($X \setminus A \cap B$ è unione di 2 insiemi numerabili e
  $X \setminus \bigcup A_i = \bigcap (X \setminus A_i)$ è certamente numerabile)

ESERCIZIO 3: X insieme ordinato.

$$M_x = \{ y \in X \mid x \leq y \} \qquad \tau = \{ M_x \mid x \in X \}$$

È una topologia? Sì

Se $X = \mathbb{R}$ questa topologia contiene tutti gli aperti della topologia della semicontinuità superiore (generata da semirette destre aperte), cioè è più fine di quella.

RETTA DI SORGENFREY:

Topologia generata dagli intervalli $[a,b[$

$$M_{a,b}=[a,b[\qquad a\in M_{a,b} \Rightarrow \bigcup M_{a,b}=\mathbb{R}$$

$$(M_{a,b}\cap M_{a',b'}\neq\emptyset) \qquad M_{a,b}\cap M_{a',b'}=M_{\max\{a,a'\}\,\min\{b,b'\}}$$

È più fine di quella euclidea.

ESERCIZIO 4: Descrivere 2 sottoinsiemi $A,B\subseteq\mathbb{R}$ tali che

$$A\cap B=\emptyset \qquad \overline{A}\cap B\neq\emptyset\neq A\cap\overline{B}$$

- $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$
  $B=\{0,\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots\}$

Oppure

- $A=\{0\}\cup(1,2)$
  $B=(0,1]$

Oppure

- $A=[0,1)$
  $B=\mathbb{R}\setminus A$

ESERCIZIO 5: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

($\subseteq$) $\overline{A}\cup\overline{B}$ è un chiuso, contiene A, contiene B, quindi contiene la chiusura di $A\cup B$

($\supseteq$) $\left.\begin{array}{l}A\subseteq A\cup B\\ B\subseteq A\cup B\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}\\ \overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}\end{array}$

ESERCIZIO 6: $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$

Si fa da quello sopra passando al complementare.

ESERCIZIO 7: Se X è T_1 allora i punti sono chiusi.

$x\in X$, $\forall y\neq x$ c'è un aperto U tale che $y\in U_y$ e $x\notin U_y$

$$\Rightarrow X\setminus\{x\}=\bigcup_{y\neq x}U_y$$

Viceversa se i punti sono chiusi X è T_1.

$x,y\in X$ $\qquad U_y=X\setminus\{x\}$

$\qquad\qquad U_x=X\setminus\{y\}$

Oss. I soli connessi di $\mathbb{Q}$ sono i punti. Infatti, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, scelto un reale $\alpha\notin\mathbb{Q}$,

$$]-\infty,\alpha[\;\cup\;]\alpha,+\infty[\;=\mathbb{Q} \quad \text{(unione di 2 aperti disgiunti)}$$

Oss. Sottoinsiemi discreti di $\mathbb{R}$. (un sottoins. è discreto se ha indotta la top. discr.)
Se vogliamo un discreto CHIUSO bisogna chiederlo esplicitamente

ESERCIZIO 8: D denso in X.

- Se U è aperto non vuoto, $U\cap D\neq\emptyset$
  Altrimenti $X\setminus U$ sarebbe un chiuso che contiene D.
- $\overline{D\cap U}=\overline{U}$

($\subseteq$) ovvia perché $D\cap U\subseteq U$

($\supseteq$) Sia $V=U\cap X\setminus(\overline{D\cap U})$

V è aperto ma $V\cap D=\emptyset$

perché se $x\in V\cap D$ allora

$x\in U$ e $x\notin\overline{D\cap U}$ Assurdo $\Rightarrow V\cap D=\emptyset$

$\Rightarrow V=\emptyset \Rightarrow \overline{D\cap U}\supseteq U \Rightarrow \overline{D\cap U}\supseteq\overline{U}$

Def: X. A e B sono aderenti se

$$(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\neq\emptyset$$

ESERCIZIO 9: Se $f:X\to Y$ è continua porta insiemi aderenti in insiemi aderenti. Vale il viceversa se i punti sono chiusi (cioè e spazi T_1).

. Sia $x\in(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

Supponiamo $x\in\overline{A}\cap B$

Ogni intorno di x interseca A e interseca B

$f(x)\in f(\overline{A})\cap f(B)$

Sia V un intorno aperto di $f(x)$, c'è U intorno di x tale che $f(U)\subseteq V$.

$U\cap B$ e $U\cap A$ sono $\neq\emptyset$

$f(U)\cap f(A)\neq\emptyset$
$f(U)\cap f(B)\neq\emptyset$ $\Rightarrow V\cap f(A)$ e $V\cap f(B)$ sono $\neq\emptyset$

$$\Downarrow$$

$$f(x)\in(\overline{f(A)}\cap f(B))\cup(f(A)\cap\overline{f(B)})$$

Viceversa: · Sia $C \subseteq Y$ un chiuso (Considero $\overline{f^{-1}(C)}, \{x\}$)
$x \in \overline{f^{-1}(C)} \Rightarrow x$ è aderente a $f^{-1}(C)$

?

$\Rightarrow f(x)$ deve essere aderente a C, che è chiuso, quindi
$f(x) \in C \Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ che quindi è chiuso

ESERCIZIO 10: $f: X \to Y$ continua, D denso in X
Allora $f(D)$ denso in $f(X)$

$$\cdot\ \underset{\overset{\|}{f(X)}}{f(\overline{D})} \subseteq \overline{f(D)}$$

$f(X) \subseteq \overline{f(D)}$ Facendo la chiusura rispetto a $f(X)$

$$\overline{f(D)} \underset{(?)}{\not\supseteq} \overline{f(D)}^{f(X)} = \underset{\overset{\cup}{f(X)}}{\overline{f(D)}} \cap f(X) = f(X)$$

ESERCIZIO 11: Se D è denso in Y, e f è aperta, $f^{-1}(D)$ è denso in X

$D \cap f(X) \neq \emptyset$
$f^{-1}(D) \neq \emptyset$
$V \subseteq X$ aperto. $V \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset$ perché $f(V) \cap D \neq \emptyset$

$x \in X \setminus f^{-1}(D)$ x ha un sist. fond. di intorni aperti e ciascuno interseca $f^{-1}(D)$.

ESERCIZIO 12: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua
$\{t \in \mathbb{R} \mid f^{-1}(t) \neq \emptyset$ è numerabile$\}$ ha al più 2 elementi

Def: $f: [0,1] \to X$ si dice arco continuo tra $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice connesso per archi se $\forall x_0, x_1 \in A$ c'è $f: [0,1] \to A$ continua tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$.

CONN. PER ARCHI $\Rightarrow$ CONNESSO

· Supponiamo A non connesso

$A = A_1 \cup A_2$ con A_1 e A_2 disgiunti aperti $\neq \emptyset$
Sia $x_1 \in A_1$ $x_2 \in A_2$

$f: [0,1] \to A$

Unione disgiunta di aperti non vuoti $\Rightarrow$ non connesso

$$\overset{\text{connesso}}{\Gamma = f([0,1])} = \overbrace{\Gamma \cap \underset{\overset{\cup}{x_1}}{A_1}} \cup \overbrace{\Gamma \cap \underset{\overset{\cup}{x_2}}{A_2}}$$

CONSEGUENZA: $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ è connesso

L'immagine di f è connesso. Se prendo $x \in \text{Int}(f(\mathbb{R}^2))$ mi sconnette l'immagine ma per sconnettere la controimmagine ho bisogno che $f^{-1}(x)$ sia non numerabile.
Al massimo ci sono quindi gli estremi del connesso di $\mathbb{R}$ (che sono 2)

GEOMETRIA II - LEZIONE 6

TEOREMA In $\mathbb{R}$ i connessi sono tutti e soli gli intervalli (comprese le semirette)

DIM: un intervallo è connesso. Infatti è ovvio (!)

Vediamo che un connesso è un intervallo. Se ci sta un solo elemento, allora OK. Altrimenti prendo 2 punti. Se per assurdo $\exists$ un punto che non sta nel connesso. Ma allora ho 2 aperti disgiunti che mi generano, cioè non è connesso. Assurdo.

OSS.

$\mathbb{C}$ non è ordinabile come corpo (ovvero sia compatibile con le sue operazioni).

Esercizio: Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ non sono omeomorfi agli aperti di $\mathbb{R}$.

$$S^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad f \text{ continua} \quad (n \geq 0)$$

Allora $\exists x : f(x) = f(-x)$

DIM: Prendo $g(x) := f(x) - f(-x)$ $\qquad g : S^n \to \mathbb{R}$

$g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)$

Per thm. esistenza degli zeri $\exists x : g(x) = 0$

$\Downarrow$

$f(x) = f(-x)$

PROP: Siano X, Y connessi tali che $X \cap Y \supseteq \{x\}$

Allora $X \cup Y$ è connesso.

DIM: Siano A, B aperti : $A \cup B = X \cup Y$ (B complementare di A)

$x \in A$ (o $x \in B$) allora $X \subseteq A$. Ho allora anche $Y \subseteq A \Rightarrow B = \emptyset$

$\Downarrow$

$X \cup Y$ connesso

PROP: Siano Z_i connessi tali che $\exists x \in \bigcap_{i \in I} Z_i$. Allora $\bigcup_{i \in I} Z_i$ è connesso

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} \left(X \times \{y_0\} \cup \{x\} \times Y \right)$$

Allora, poiché $X \times \{y_0\}$ è omeomorfo a X e quindi è connesso (e analogamente per Y) anche $X \times Y$ è connesso

[illegible]

$\bigcap_{x \in X} \left((X \times \{y_0\} \cup \{x\} \times Y) \right) = \wedge$ tale che

$\Downarrow$ $X \times \{y_0\}$

Per la prop. precedente ho la tesi

Oppure: prendo $f : X \to Y$

1) f continua
2) $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ connesso
0) Y connesso

$\Bigg\} \Rightarrow X$ connesso

3) f aperta / chiusa
4) f surgettiva

DIM: Siano A, B aperti disgiunti non vuoti tali che $A \cup B = X$

f surg $\Rightarrow f(A) \cup f(B) = Y$

Y è connesso e f aperta $\Rightarrow f(A) \cap f(B) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in f(A) \cap f(B)$

Quindi $f^{-1}(y)$ è connesso e anche

$f^{-1}(y) \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ Assurdo.

Prendendo $X = X \times Y$ ho la tesi e la proiezione

DEF Una componente connessa è un connesso massimale cioè che sia:

- connesso;
- A connesso che la contiene $\Rightarrow$ sono uguali

LEMMA: Qualsiasi insieme che sta tra un connesso e la sua chiusura è connesso. Y connesso $\forall W : Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$ $\Rightarrow W$ connesso

DIM: Y è denso in W. Prendo A aperto di W. Allora $A \cap Y \neq \emptyset$. Sia B = compl. A (aperto anche lui e $A \cup B = W$). Allora A è chiuso

Ho quindi (essendo Y connesso) $Y \subseteq A$

Y denso in A e A chiuso in $W \Rightarrow A = W \Rightarrow B = \emptyset$

$\Downarrow$

W connesso

Def Uno spazio è totalmente sconnesso se le componenti connesse sono punti.

Def Comp. connessa di un punto è l'unione di tutti i connessi che contengono il punto.

OSS. Le componenti connesse formano una partizione dello spazio

TEOREMA: Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora è connesso sse è connesso per archi.

DIM. CONNESSO ⇒ connesso per archi

Sia $P \in \Omega$ Chiamo $\Omega_P = \{q \in \Omega \mid$ possono essere uniti a P con un arco $\}$

Ω_P è unione di connessi quindi è connesso

Dimostro che $\Omega_P = \Omega$ perché Ω_P è aperto e chiuso in Ω

Ω_P è aperto:

Prop. 10.5 Manetti → Supponendo che ci sia la connessione ~~locale~~, posso collegare con un arco punti in una palla. Allora componendo archi ho che tutta la palla sta in Ω_P. Quindi è aperto.

Analogamente facendo il ragionamento sul complementare si ha che è chiuso

Sia $A \cup B = \Omega$ (A aperto, B aperto)

Sia $P \in A$, $Q \in B$ e prendo l'arco $\widehat{PQ}$.

A e B sconnettono l'arco, quindi quello non è connesso. Assurdo.

• CONNESSO PER ARCHI ⇒ CONNESSO

PROBLEMA: $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$

$\beta : [0,1] \longrightarrow X$

$\alpha(1) = \beta(0)$

$$\gamma = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{in } [0,\frac{1}{2}] \\ \beta(1-2t) & \text{in } [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Va dimostrato che γ è continua.

GEOMETRIA III - LEZIONE 7

RICOPRIMENTI (="COVERING" = RIVESTIMENTO)

Def Un ricoprimento di uno spazio X è una famiglia di sottoinsiemi $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che l'unione degli U_i sia X.

Def Un ricoprimento è aperto se gli U_i sono aperti.

Def Un ricoprimento è chiuso se gli U_i sono chiusi.

Def Un ricoprimento è finito se il numero degli U_i è finito

Def Un ric. è puntualmente finito se ogni punto è in un numero finito di U_i.

Def Un ric. è localmente finito se per ogni punto esiste un intorno che interseca un numero finito di U_i.

Oss. LOCALM. ⇒ PUNTUALM.

Def Un sottoricoprimento $\mathcal{U}$ di $\mathcal{V}$ è un ricoprimento: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Def Un restringimento è un ricoprimento tale che ogni $U_i \subseteq V_i$

Def Un raffinamento è un ricoprimento t.c. $\forall i \; \exists j : U_i \subseteq V_j$

Def Uno sp. top. è compatto se $\forall$ ricopr. $\exists$ sottoric. finito.

Def Un ric $\mathcal{U}$ si dice fondamentale se $\forall \Omega \subseteq X$ ~~⇔~~ Ω aperto in X ⇔ $\Omega_i = \Omega \cap U_i$ è aperto in U_i $\forall i$.

PROP. $f : X \to Y$ tra sp. topologici e $\mathcal{U}$ ric. fond. di X. Allora f è continua ⇔ $f|_{U_i}$ è continua $\forall i$.

Detto altrimenti: Siano $U_i, U_j \subseteq \mathcal{U}$ ric. fond., $f_i : U_i \to Y$, $f_j : U_j \to Y$, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Allora f continua ⇔ $f : \begin{cases} f_i & \text{se } x \in U_i \\ f_j & \text{se } x \in U_j \end{cases}$ continua

DIM: Farlo da solo (Attenzione all'intersezione)

Oss. RIC. APERTO ⇒ FONDAM. (se U_i aperto, essere aperto in U_i è come essere aperto)

RIC. CHIUSO e LOC. FINITO ⇒ FONDAM. ⊛

Se dimostro ⊛ posso risolvere il problema degli archi nel teorema della lezione precedente

● Sia $\{V_i\}$ un ric. finito di chiusi di X. Allora è fondamentale in X.
Infatti sia F ~~chiuso~~ in X. $F \cap V_i$ chiuso in V_i V_i
Ma $F = \bigcup_{\text{finita}} (F \cap V_i) \Rightarrow F$ chiuso

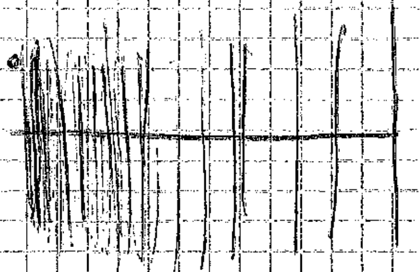
DIM: ⊛ $\forall p$ $\exists$ aperto che interseca in un numero finito di chiusi C_i
$\Rightarrow$ Gli C_i inducono un ricoprimento finito dell'aperto
Prendo $\Omega \subseteq X$ [illegible] tale che $\Omega \cap C_i$ aperto $\Rightarrow \Omega$ aperto
$\Omega \cap C_i$ aperto $\overset{\text{Ma}}{\Rightarrow}$ A è aperto quindi Ω aperto in A
perché ... e cioè $\Omega \cap A$ aperto in A
Ma A ric. aperto, $\Rightarrow$ fond. $\Rightarrow \Omega$ aperto.

Def Uno spazio si dice loc. conn. per archi se $\forall p$ $\exists$ sist. fond. di intorni connesso per archi.

Prop: Ω [illegible] aperto e connesso è connesso per archi.
in uno sp. loc. connesso per archi

DIM: $\Omega_p = \{ y \in \Omega \mid \text{connettibile per archi con } p \} \neq \emptyset$
Dimostro che è aperto e chiuso
$\forall q \in \Omega_p$ $\exists$ aperto $\subseteq \Omega$ perché esiste sist fond. connettibile per archi connettibile a Q. Quindi tutto l'aperto è connettibile a P. $\Rightarrow \Omega$ è aperto.
Dimostro che il complementare è aperto allo stesso modo (se P non connettibile e Q connettibile a P allora tutto un aperto non è connettibile a P)
$\Rightarrow \Omega_p$ aperto e chiuso $\Rightarrow \Omega_p = \Omega$

Per i chiusi non vale il teorema. Un chiuso può essere connesso ma non essere connesso per archi.



Pettine e la pulce

[È chiuso (Unione di rette e un punto)] - Anche NO
È connesso, perché ∃ W tale che $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$
pettine senza pulce (~~chiuso~~ connesso)
pettine senza pulce, ma con $x=0$ (~~chiuso~~ connesso)
$\Rightarrow W$ ~~chiuso~~ connesso

Ma non è connesso per archi.

Def Uno sp. top. si dice compatto se $\forall \mathcal{U}$ ric. aperto $\exists\, \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ sottoric. finito.

TEOREMA: $[0,1]$ è compatto.
DIM: Sia U_i ric. di $[0,1]$
$X = \{ t \mid [0,t] \text{ è ricopribile con un numero finito di } U_i \} \neq \emptyset$
perché $t=0 \in X$
Sia $d = \sup X$
Se $d \geq 1$ ho finito.
Se $d < 1$ [illegible]
Mmh... "Leggo alla rovescia"
Allora $\exists\, h < d$ tale che $[0,h]$ è ricopribile
Sia $d \in B_r(d)$ con r tale che $h \in B_r(d)$
Ma allora anche $\text{Ric}([0,t]) \cup B_r(d)$ è un ric. finito del tipo $[0,t]$ che però contiene un el. $d' > d$. Assurdo

Prop: L'immagine di un compatto è un compatto (tramite f continua).
DIM: K compatto. Prendo $f(K)$. Prendo un ric. aperto di $f(K)$
$f^{-1}(\text{ric. } f(K))$ è un ric. aperto di K $\Rightarrow$ Ne bastano un numero finito $\Rightarrow$ Ne bastano un num. finito per ricoprire $f(K)$

GEOMETRIA II - LEZIONE 8 - ESERCITAZIONE

Esercizio 1: Un chiuso in un compatto è compatto.

DIM: X sp. comp. $C \subseteq X$ chiuso

$\{U_i\}_{i \in I}$ ricopriment aperto di C.

$\{U_i\}_i \cup \underbrace{X \setminus C}_{\text{aperto}}$ è un ric. aperto di X.

Ma allora ne basta un numero finito

Togliendo $X \setminus C$ si ha un ric. finito di C.

Esercizio 2: In uno sp. di Hausdorff X i compatti sono chiusi.

DIM: Sia $K \subseteq X$ un cpt. $\forall y \in K$ $x \notin K$

$\exists V_y$ $\exists U_x$: $V_y \cap U_x = \emptyset$

$\bigcup_{y \in K} V_y$ sono un ric. ~~[illegible]~~ aperti di K. Ne basta un num. finito

$V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_k} \supseteq K$

Prendendo $\underbrace{U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}}$ $\subseteq X \setminus K$

(?) Quindi $\forall x \notin K$ $\exists$ aperto che lo contiene ⇒ [illegible]

$X \setminus K$ aperto ⇒ K chiuso.

Esercizio 3: I compatti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i chiusi e limitati

DIM: • $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cpt ⇒ chiuso e limitato

K chiuso perché $\mathbb{R}^n$ è T_2

proiez. coord. ↗ $x_i : K \to \mathbb{R}$ ⇒ $K \subseteq \bigotimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$

$f(\text{cpt}) = \text{cpt}$

⇒

~~f~~$(K) =$ intervalli

• K chiuso e limitato ⇒ K cpt.

$K \subseteq \overline{B_r(0)}$

c'è un prodotto di intervalli chiusi che contiene $\overline{B_r(0)}$

è (cpt)

K chiuso nel cpt. (il prod. di intervalli) ⇒ K è cpt.

Esempio di compatto in $\mathbb{R}$: insieme di Cantor

$[0, 1]$

⇒ ⇒ … ecc.

è ovviamente limitato; il complementare è unione di aperti (quindi è aperto), quindi l'ins. di Cantor è chiuso. ⇒ è cpt.

Esercizio 4: X, Y sp. compatti

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

la top. su $X \times Y$ è la meno fine che rende continue p_1 e p_2.

Una base per questo sp. top. è dato dagli aperti $U \times V$ dove U è aperto in X e V è aperto in Y

Allora $X \times Y$ è compatto.

DIM: Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ric. aperto di $X \times Y$

Ogni U_i è unione di aperti del tipo $U \times V$ (rettangolari)

L'unione di tutti questi rettangoli ricopre $X \times Y$.

Se il ric. in rettangoli ha un sottoric. finito allora ne esiste uno finito anche per $\mathcal{U}$ (ogni $U \times V$ è contenuto in un U_i)

Prendiamo $x \in X$ Consideriamo $\{x\} \times Y$ è compatto

Ci saranno un num. finito di aperti del ricoprimento

$U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \supseteq \{x\} \times Y$ con $U_{i_j} = A_{i_j} \times B_{i_j}$

$p_1(U_{i_j}) = A_{i_j} \ni x$

Sia $A_x = A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \ni x$

Ma allora $p_1^{-1}(A_x) \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$

Dato che $\bigcup_{x \in X} A_x = X$ che è compatto, allora $\exists_{x_1, \ldots, x_n} \in X$

$X = A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_n}$

⇒ $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} p_1^{-1}(A_{x_i})$

Ma ogni $p_1^{-1}(A_{x_i})$ è contenuto in un numero finito di $A_i \times B_i$

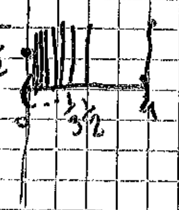
⇒ Un numero finito di rettangoli ricopre $X \times Y$

Esercizio 5: TEOREMA DI TYCHONOFF

$\prod_{i\in I} X_i$ è compatto (con X_i compatti)

[..]

Esercizio 6: La pulce e il pettine



$P=(0,\frac{1}{2})$ punto

$Y=\bigcup_{n\geq 2}^{\infty}\{x=\frac{1}{n},\ 0\leq y\leq 1\}\cup(0,1)\times\{0\}$

$X=P\cup Y$

Y è connesso per archi

$Y\subseteq X\subseteq\overline{Y}\ \Rightarrow X$ è connesso. Ma X non è connesso per archi

Infatti, se per assurdo $\exists$ arco continuo $\alpha:[0,1]\to X$

$\alpha(0)=P$
$\alpha(1)=x\in Y$

Sia $c=\max\{t\in[0,1]:\alpha_1(t)=0\}$

$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t))$

C'è un unico punto in X con $x=0$ ed è P

Poiché α_2 è continua esiste $\delta>0$ tale che $c<t<c+\delta$ allora $\alpha_2(t)>\frac{1}{4}$

L'arco α: $\alpha(t)=P\quad 0\leq t\leq c$
$\alpha(t)\subset\{y>\frac{1}{4}\}\quad c\leq t<c+\delta$
$\alpha(c+\delta)\neq P$ (perché c è il max)

Ma $X\cap\{y>\frac{1}{4}\}$ non è connesso

$\left.\begin{array}{l}\alpha(c+\delta)\in\text{segmento di }Y\text{ con }y>\frac{1}{4}\\ \alpha(c)=P\end{array}\right\}$ stanno in aperti disgiunti che ricoprono tutto

$\Downarrow$

Non può esistere arco continuo che fa ciò.

Assurdo.

Esercizio 7: Altro esempio di connesso NON connesso per archi (Chiuso)

$Y=\{y=\operatorname{sen}\frac{1}{x},\ x>0\}$

$X=Y\cup\{x=0\ \ -1\leq y\leq 1\}\ \Rightarrow X$ è connesso ma non connesso per archi

$X=\overline{Y}\qquad Y$ connesso $\Rightarrow X$ connesso

Dobbiamo provare che $\nexists$ arco cont. tale che $\alpha(0)\in X\setminus Y$, $\alpha(1)\in Y$

Supponiamo che esista. Come prima $c=\max\{t:\alpha_1(t)=0\}$

$-1\leq\alpha_2(c)\leq 1$ e $\alpha(t)\in X\setminus Y\quad 0\leq t\leq c$

Prendiamo $\delta>0$ tale che se $c<t<c+\delta$ allora $|\alpha_2(t)-\alpha_2(c)|<d<1$

Ma $\alpha_1(c+\delta)\neq 0\ \Rightarrow\ \alpha(c+\delta)\in Y$

Allora $\underbrace{X\cap\{\alpha_2(c)-d<y<\alpha_2(c)+d\}}_{\text{sconnesso}}$

tale che $-1<\alpha_2(c)-d<\alpha_2(c)+d<1$

oppure una delle 2 è $\leq$

(Non possono essere entrambe uguaglianze dato che $d<1$)

$\Rightarrow$ Assurdo

LEMMA DI LEBESGUE

○ $[0,1]$ $\mathcal{A}=\{A_i\}$ = ric. di $[0,1]$

$\exists$ suddivisione di $[0,1]$ in pezzetti abb. piccoli

$0=t_0<t_1<\ldots<t_k=1$

in modo che $[t_i,t_{i+1}]\subseteq$ in un aperto del ricoprimento

○ X sp. compatto metrico $\{U_i\}_{i\in I}$ un ric. aperto $\exists\,\delta$ (dipendente dal ricoprimento) tale che ogni palla di raggio $\leq\delta$ è contenuta in un aperto del ric.

DIM: Per assurdo esistono palle arbitrariamente piccole che non sono contenute in nessun aperto del ric.

Sia $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ non contenuta in nessun aperto

a meno di sottosucc. $\to x_0=\lim x_n$ Lavorando con la diseg. triang.

Da un certo n_0 in poi $|x_n-x_0|=d\qquad B(x_0,r)\subseteq U_0$

$P\in B_{\frac{1}{n}}(x_n)\ \overset{d(P,x_0)}{\leq}\ d+\frac{1}{n}<r$

CONNESSO PER CONNESSI $\Rightarrow$ CONNESSO

CONNESSO [illegible] $\not\Rightarrow$ CONNESSO PER ARCHI

CONNESSO PER ARCHI $\Rightarrow$ CONNESSO PER COMPATTI (Arco è compatto)

CONNESSO PER COMPATTI $\not\Rightarrow$ CONNESSO PER ARCHI

CONNESSO PER ARCHI $\Rightarrow$ CONNESSO

GEOMETRIA II _ LEZIONE 9

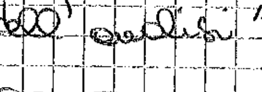
COMPITINO FINE DICEMBRE
- TOPOLOGIA
- PROIETTIVA

"La topologia è l'algebra dell'analisi" - Cit.

FUNZIONI PROPRIE

Def. 1 Un'appl. si dice propria $f: X \to Y$ (f continua) se $\forall$ cpt $K \subseteq Y$ $f^{-1}(K)$ è cpt.

Esempio (contro-esempio)

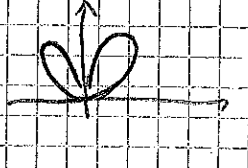


Non propria

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
  $t \mapsto (t, t^2)$

Questa è propria

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
  $t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^{10}}, \frac{t^2}{1+t^{10}}\right)$



Non propria
(NB: La controimmagine di rette che vanno a 0 ...

Def. 2 Un'appl. si dice propria $f: X \to Y$ (f continua) se $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ è compatto e f è chiusa.

Al momento Def 1 e Def 2 non sono equivalenti!

$\boxed{\text{Def 2}} \Rightarrow \boxed{\text{Def 1}}$

Prendiamo K cpt di Y $y \in K$ Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ $f(K)$

(?) Per ip. $f^{-1}(y)$ è cpt. $\Rightarrow \exists$ numero finito di U che ricoprono $f^{-1}(y)$ A_y

Compl. A_y è chiuso.

f chiusa $\Rightarrow f(cA_y)$ chiuso $\Rightarrow c f(cA_y)$ aperto $\Rightarrow \exists$ intorno V di y $V \subseteq cf(cA_y)$ cioè $f^{-1}(V) \subseteq A_y$

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ si ricopre in modo finito. K cpt, quindi prendendo gli intorni di ogni y ne ottengo un numero finito. Su $f^{-1}(K)$ bastano quindi n° finito × finito aperti

Per fare $\boxed{\text{Def 1}} \Rightarrow \boxed{\text{Def 2}}$ Non riesco con queste sole ipotesi

$\boxed{\text{Ipotizziamo in più } Y \ T_2 + \text{loc. cpt.}}$ ⊛

(?)

La curva di Peano (è surgettiva) va da un cpt in un T_2, quindi è chiusa. È continua e se fosse iniettiva sarebbe bigettiva e quindi un omeomorfismo.
Ma un punto interno sconnette $[0,1]$ e non sconnette l'immagine (il quadrato)

QUOZIENTI

Preso un insieme X, e scelta una relazione di equivalenza si ha che il quoziente $X/_R$ perde la topologia.

Def. Si dice saturazione (il saturato) di un elemento il sottoinsieme dello spazio contenente gli elementi equivalenti (la classe di equiv.)

$$X \xrightarrow{\pi} X/_R$$ π deve essere continua.

Scegliamo una topologia su $X/_R$

Def. Ω aperto in $X/_R$ se e solo se $\pi^{-1}(\Omega)$ è aperto in X.

Verifichiamo che formano una topologia.

[...]

Questa è detta topologia quoziente (e il quoziente con tale topologia è detto quoziente topologico).

Prop. La topologia quoziente è la topologia più fine che rende continua la proiezione π.

GEOMETRIA III. LEZIONE 10

QUOZIENTI

TEOREMA f costante sulle fibre e continua.
Allora esiste h continua che chiude il diagramma.

continua

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/R \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

- $h[x] = f(x)$
- $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$

Oss. Anche se f è surgettiva h non è detto che sia un omeomorfismo (serve anche che f sia chiusa)

Oss. Il quoziente di un connesso/cpt è connesso/cpt.

Esempi: ● $\mathbb{R}$ $\quad x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x \text{ e } y \in (0,1) \end{cases}$

Sia $\omega = \pi((0,1))$

$(0,1)$ è aperto in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ ω è un punto aperto

In $\mathbb{R}$ un punto è chiuso $\exists$ non aperto (per via della connessione)

Nel quoziente invece ω è un punto aperto.

Dunque il quoziente non è omeomorfo a $\mathbb{R}$

Se invece mandiamo a 0 $[0,1]$ allora c'è l'omeomorfismo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$$f = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

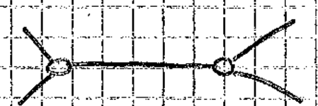
● $t \sim t' \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ f(t) = f(t') \end{cases}$ $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad t \longmapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

h è un omeomorfismo
Perché $\mathbb{R}$ omeomorfo a $[0,1]$,
$f([0,1]) = S^1$ e f è chiusa
(H chiuso in $[0,1]$; $[0,1]$ è cpt $\Rightarrow$ H cpt $\Rightarrow f(H)$ è cpt $\quad S^1$ è T_2 e cpt $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ cpt in cpt è chiuso $\Rightarrow f(H)$ chiuso)

● in $\mathbb{R}$ Prendiamo $y^2 - 1 = 0$

$(a,-1) \sim (b,1) \Leftrightarrow a = b$ e $|a|, |b| < 1$



$\pi(\overset{\text{Punto}}{(1,1)}) = \omega_1$
$\pi(\overset{\text{Punto}}{(-1,1)}) = \omega_2$

$\omega_1 \neq \omega_2$.

Lo sp. quoziente non è T_2: se lo fosse esisterebbero 2 intorni Ω_1 di ω_1 e Ω_2 di ω_2 disgiunti.
Ma per ogni aperto in Ω_1 e Ω_2 la controimmagine è un aperto che interseca l'intervallo $-1, 1$ aperto
Dunque $(\Omega_1) \cap (\Omega_2) \neq \emptyset$ Assurdo

● $\mathbb{R}$ $\quad x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ |x|, |y| > 1 \end{cases}$ $\qquad x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ |x|, |y| \geq 1 \end{cases}$

Uno è S^1, l'altro no.

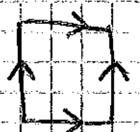
QUOZIENTI FACILI

→ in $\mathbb{R}$ identifico -1 e 1

Parametrizzazione: $x = t(t^2-1)$
$y = t^2 - 1$

Toro : $S^1 \times S^1$

→

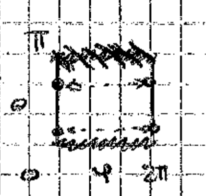


Parametrizzazione.
Scrivi funzione da quadrato a parametrizzazione
$\square/R \cong S^1 \times S^1$

$\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$ $[\ldots]$ Domani

$\begin{cases} x = R \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ y = R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}$

→



Scrivi funzione da quadrato a parametrizzazione

$\varphi, \theta \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$

● $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\quad x = (x_1, \ldots, x_n)$ $\qquad x \sim y \Leftrightarrow \exists m : x = 2^m y$

Dimostra che $\quad \mathbb{R}^n/R \cong S^1 \times S^{n-1}$

● $S^1 \ncong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

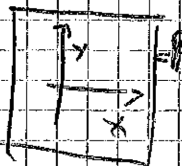
● Collassando $\mathbb{Z}$ a un punto $\overset{(\omega)}{}$ si ottiene un fiore con quantità numerabile di petali. È brutto perché non esiste un sistema fondamentale di intorni per ω. Non è immergibile in $\mathbb{R}^n$ per nessun $n \in \mathbb{N}$.

DIM: Sia U_n un sist. fond. di intorni di ω. $\pi^{-1}(U_n)$ è unione numer. di aperti in $\mathbb{R}$ che contengono $\mathbb{Z}$.

Ma $I \times U_k$

Processo diagonale di Cantor: Da $\pi^{-1}(U_i)$ prendo un intorno di i di ampiezza la metà. L'unione di questi è un aperto, quindi $\exists$ intorno di ω : $\pi^{-1}(I) = \ldots$

GEOMETRIA II _LEZIONE 11



$$\overset{P}{(x,y)} \sim \overset{Q}{(u,v)} \iff \begin{cases} P=Q \\ (0,y)\sim(0,-y) \end{cases}$$

È immergibile in $\mathbb{R}^3$?

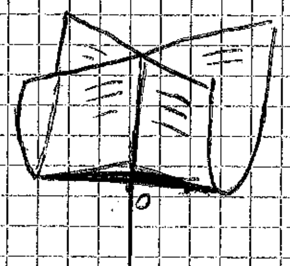
Devo costruire una $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ costante sulle fibre

$$x \longmapsto uv$$
$$y \longmapsto u$$
$$z \longmapsto v^2$$

L'immagine della funzione è contenuta in $x^2 - zy^2 = 0$

I punti della superficie ad altezza negativa non stanno nell'immagi

$x^2 - zy^2 = 0$



← Ombrello di Whitney

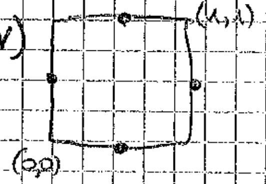
● R : $x \sim y \iff \begin{cases} x=y \\ x-y=n \end{cases}$

Definizione Un toro è $S^1 \times S^1$.

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$

$(u,v) \longmapsto (\cos 2\pi u, \text{sen} 2\pi u, \cos 2\pi v, \text{sen} 2\pi v)$

$$\overset{P}{(u,v)} \sim \overset{Q}{(x,y)} \iff \begin{cases} P=Q \\ u=x \text{ e } v=0, y=1 \\ v=y \text{ e } u=0, x=1 \end{cases}$$



Creiamo $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

dal quadrato al toro.

$$\begin{cases} x = (R + r\cos 2\pi u)\cos 2\pi v \\ y = (R + r\cos 2\pi u)\,\text{sen} 2\pi v \\ z = r\,\text{sen} 2\pi u \end{cases}$$

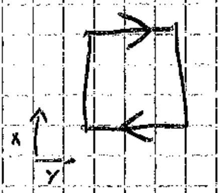
● $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \underset{\text{norma}}{\mathbb{R}^+} \times \underset{\text{posizione su sfera}}{S^{n-1}}$

Su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sia $v \overset{R}{\sim} v' \iff \begin{cases} v=v' \\ \exists m\in\mathbb{N} : v=2^m v' \end{cases}$

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} / R \cong S^1 \times S^{n-1}$$

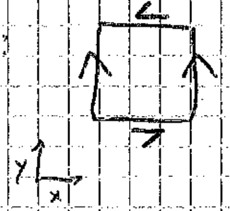
attraverso un omeomorfismo

Nastro di Möebius :



$$\overset{P}{(x,y)} \sim \overset{Q}{(u,v)} \iff \begin{cases} P=Q \\ x=1, u=0, v=1-y \end{cases}$$

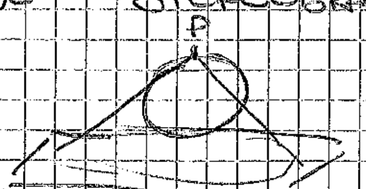
Bottiglia di Klein :



$$\overset{P}{(x,y)} \sim \overset{Q}{(u,v)} \iff \begin{cases} P=Q \\ x=0, u=1, y=v \end{cases}$$

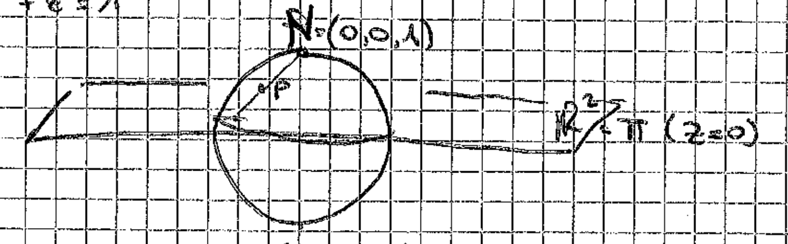
GEOMETRIA II - LEZIONE 12

PROIEZIONE STEREOGRAFICA



Proiettare una sfera meno il polo nord sul piano dal polo nord.

$x^2+y^2+z^2=1$



$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \longmapsto NP \cap \pi$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2+1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{1-\sqrt{1-x^2-y}} \\ \frac{y}{1-\sqrt{1-x^2-y}} \end{pmatrix}$$

Funzione inversa verso il polo sud : $(u, v, 0) = P$ (*)

$$\overset{(S)}{N} + t(\overset{(S)}{N} - P) \qquad (-tu, -tv, 1+t)$$
$$\left.\begin{matrix} \\ t^2u^2+t^2v^2+(1+t)^2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} t=0 \quad (S) \\ t=\frac{-2}{u^2+v^2+1} \end{matrix}$$

$$g \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$P \longmapsto SP \cap S^2$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{pmatrix}$$

OSS La composizione $(f \circ g)$ in realtà va da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Esercizio: $X =$

$$S \sim T \iff \begin{cases} S = T \\ S\,T = 1 \quad e \quad \begin{matrix} S \in \mathbb{R}_{(1)} \\ T \in \mathbb{R}_{(2)} \end{matrix} \end{cases}$$

Dimostra che $X/_{R} \cong S^1$ (hint: usa (*) con una e poi riporta sull'altra retta)

OSS. Abbiamo visto che S^2 è omeomorfa a $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ -

OSS. S^2 è compatto, $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ NO (importante!)

OSS. Prendendo un aperto su S^2 che non contiene il Polo Nord si ha che nella proiezione stereografica proviene da un aperto di $\mathbb{R}^2$. Se contiene il Polo Nord, allora proviene da un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ il cui complementare è compatto.

COMPATTIFICAZIONE

Prop: (X, τ) sp. topologico T_2. Sia $\hat{X} = X \cup \overset{\text{un punto}}{\infty}$

$\{\Omega_i\}_{i \in I}$ tali che:

- $\Omega \not\ni \infty$ aperto se $\Omega \in \tau$
- $\Omega \ni \infty$ aperto se $C\Omega \subseteq X$ è compatto.

Allora è una topologia, $\hat{X}$ è compatto e T_2. (denso)?

Def Una cptfcz è uno sp. compatto in cui posso immergere lo spazio.

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\quad v \sim w \iff \exists \lambda \neq 0 : v = \lambda w$

  i saturati sono rette

  ↳ Il quoziente è compatto (perché la proiezione di S^{n-1})

  $\Rightarrow$ Il quoziente è detto $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ (proiettivo di dim n-1 su $\mathbb{R}$)

- Stessa cosa su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

  $P_{n-1}(\mathbb{C})$ è compatto? sì : $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \Rightarrow \pi(S^{2n-1}) = $ Quoz.

  i saturati sono $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (piani)

  ↳ si identificano le circonferenze massime.

GEOMETRIA II . LEZIONE 13 . ESERCITAZIONE

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \sim$ $\qquad u \sim v \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{K}^* : v = ku$

$\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ è :
- connesso
- compatto (quoziente della sfera)
- T_2

Sia $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$

Voglio scrivere $\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \ni [x_0, \dots, x_n]$ dove
- $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$
- $[x_0, \dots, x_n] = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]$

$\mathbb{K}^{n+1} \supseteq H_i = \{x_i = 1\}$

$\pi\big|_{H_i} : H_i \longrightarrow \pi(H_i) = U_i = \{P \mid x_i \neq 0\}$

$U_i = \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \setminus \pi(\{x_i = 0\})$ $\quad$ chiuso perché la sua controimm. è chiuso saturo

è detta una carta

$P \in \mathbb{P}_n$

$P = [v]$ $\quad v = (x_0, \dots, x_n)$ $\quad P = [x_0, \dots, x_n]$

$P = [\lambda v] = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]$

$\pi : H_i \longrightarrow U_i$ è omeomorfismo:
- continua
- biunivoca
- aperta

$A \subset H_i$ aperto

V cono su A

$\pi(V \setminus \{0\}) = \pi(A)$

$V \setminus \{0\}$ è aperto saturo $\Rightarrow \pi(A)$ è aperto.

$\mathbb{P}_n = U_0 \cup \dots \cup U_n$ $\qquad U_i$ è omeomorfo a $\mathbb{K}^n$

$P \in \mathbb{P}_n$ $\qquad P \in U_i \cap U_j \quad i < j$

$P = [x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n]$

$P = [x_0, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n]$

deve $\exists \lambda$ tale che

$x_0 = \lambda y_0$

$\vdots$

$1 = \lambda y_i$

$\vdots$

$x_j = \lambda 1$

$\vdots$

$x_n = \lambda y_n$

cioè $\begin{cases} x_k = \dfrac{y_k}{y_j} & (h \neq i, j) \\ x_i = 1 \\ x_j = \dfrac{1}{y_j} \end{cases}$

Costruzione del proiettivo di un qualsiasi sp. vett.

V sp. vett. di dim $n+1$ su $\mathbb{K}$

$\mathbb{P}_n(V) = V \setminus \{0\} \big/ \sim$ $\qquad v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : v = \lambda w \quad \binom{v \neq 0}{w \neq 0}$

Scegliamo una base di V $\{v_0, \dots, v_n\}$ Sia $P_i = [v_i]$

Def.: $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}_n(V)$ sono indipendenti se $P_i = [v_i]$ allora $v_1, \dots, v_k$ sono indip. in V.

$[\dots]$ è ben definito.

In particolare $P_0 = [v_0], \dots, P_n = [v_n]$ sono punti indipendenti

Li rimonto e scelgo dei rimontati $w_0, \dots, w_n$. Sono una base di V FORSE mi danno delle coordinate $[x_0, \dots, x_n]$. Se scelgo altri rappr. $\lambda_0 w_0, \dots, \lambda_n w_n$, anche questa è base, ma le coord. indotte non sono proporzionali a $[x_0, \dots, x_n]$.

Se scelgo $U \in \mathbb{P}_n(V)$ in modo che $(P_0, \dots, P_n, U)$ siano a $n+1$ a $n+1$ indipendenti posso scegliere una base di V $v_0, \dots, v_n$ e un rappresentante di U v in modo che $v = v_0 + \dots + v_n$ (punto unità) $\quad U = [v] = [1, \dots, 1]$

In questo modo posso trovare tutta una classe di basi di V che risultino buone in $\mathbb{P}_n(V)$

Def Un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}_n(V)$ è la scelta di una $n+2$-upla $P_0, \dots, P_n, U$ a $n+1$ a $n+1$ indipendenti

$$\left(\begin{array}{l} P_0 = [1, 0, \dots, 0] \\ P_n = [0, \dots, 0, 1] \\ U = [1, \dots, 1] \end{array}\right)$$

Def: $H \subseteq \mathbb{P}_n$ è un sottospazio lineare se è generato

$$H = \mathrm{Span}(P_0, \dots, P_k) \qquad P_0, \dots, P_k \text{ indipendenti}$$

$$H = \mathbb{P}(\pi^{-1}(H) \cup \{0\})$$

Vale anche la formula di Grassmann (con $\dim \emptyset = -1$)

Scriviamo $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$[x, y, 1]$$

Quindi $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \ni [x, y, z] = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2$

Esercizio: 2 rette

Vedere che questi 2 punti hanno intersezione all'infinito

GEOMETRIA II _ LEZIONE 14

GRASSMANN PROIETTIVO

$$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U \cup V)$$

L'analogo della somma diretta $\overset{\text{compl.}}{}$ di uno sp. vett. è

$$\dim U + \dim V = n - 1 \quad \text{se} \quad U \cap V = \emptyset$$

CAMBIAMENTO RIFERIMENTO PROIETTIVO

$P_0, \dots, P_n, U$ $\qquad$ $Q_0, \dots, Q_n, V$

classe di basi tra loro proporzionali $\qquad$ $\dots$

$w_0, \dots, w_n$ una di queste

$v_0, \dots, v_n$ una di queste

$\exists$ 1 e 1 sola matrice A in $GL(n+1)$ che manda la base $v_0, \dots, v_n$ in $w_0, \dots, w_n$.

- Il gruppo dei cambiamenti di rif. proiettivo in $\mathbb{P}^n$ è

  $PGL = \{\text{proiettività}\}$ + PGL è transitivo nelle $n+2$-uple di punti a $n+1$ a $n+1$ indipendenti.

Gli iperpiani in $\mathbb{P}^n$ sono immagini di iperpiani in V privati dello zero.

$$U_i = \pi(x_i = 1)$$

$\mathbb{P}^n \setminus U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i = 0\}$ è un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ perché immagine di $H = \{x_i = 0\}$

① Se $H = \{[x_0, \dots, x_n] \mid a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0 \ , a_i \text{ non tutti nulli}\}$
Vogliamo provare che H è un iperpiano.

② Se 2 equazioni rappresentano lo stesso iperpiano allora sono proporzionali

DIM①: supponiamo $a_0 \neq 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_n \\ 0 & & \\ \vdots & I & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ è invertibile e

rappresenta un cambiamento di coordinate proiettive $y_0, \dots, y_n$ con

$$y_0 = a_0 x_0 + \dots + a_n x_n$$
$$y_1 = x_1$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_n$$

$$\Rightarrow P \in H \iff y_0 = 0$$

DIM $\boxed{2}$: $a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$, $b_0x_0 + \ldots + b_nx_n = 0$ rappresentano lo stesso iperpiano H

$\Rightarrow \sum a_ix_i = 0 \Leftrightarrow \sum b_ix_i = 0$

Supponiamo $a_0 \neq 0$. Allora nell'iperpiano vale

$$x_0 = -\sum \frac{a_i}{a_0} x_i = -\sum \frac{b_i}{b_0} x_i$$

perché anche $b_0 \neq 0$. Infatti, se fosse $b_0 = 0$, allora $(1, 0, \ldots, 0)$ starebbe nel secondo iperpiano e non nel primo.

Scrivendo $x_1 = 0, \ldots, x_i = 1, \ldots, x_n = 0$

otteniamo un punto di H che ha coord $[\frac{a_i}{a_0}, 0, \ldots, 1, 0, \ldots 0]$
ma anche $[\frac{b_i}{b_0}, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]$

$\Rightarrow \frac{a_i}{a_0} = \frac{b_i}{b_0} \quad \forall i \Rightarrow$ i coefficienti sono proporzionali

OSS. I polinomi NON sono funzioni in $\mathbb{P}^n$.

In K^{n+1} $\quad p \in K[x_0, \ldots, x_n]$
omogeneo di grado ℓ.

$\{p = 0\} \subseteq K^{n+1}$ è un cono (il luogo di zeri è cono se e solo se p è omogeneo)

Ha senso parlare di $\{x \in \mathbb{P}^n \mid p(x) = 0\}$ ma p non è una <u>funzione</u> in $\mathbb{P}^n$

$\{p = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ è chiuso.

Perché $\pi^{-1}(\{p = 0\}) = \{z \in K^{n+1} \mid p(z) = 0\} \cap K^{n+1} \setminus \{0\}$

In realtà sono una circonferenza, che è chiusa.

MAPPA DI HOPF

$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ha forti conseguenze in top. alg.

$S^3 \xmapsto{\pi} S^2$

$\forall p \in S^2 \quad \pi^{-1}(p)$ è un S^1 di S^3

• U, W sottospazi di $\mathbb{P}^n$ con $U \cap W = \emptyset$ e $\dim U + \dim W = n-1$

Sia $U = \{p\}$ W iperpiano: $p \notin W$

$f_p : \mathbb{P}^n \setminus p \longrightarrow W$
$Q \longmapsto f_p(Q) = \{1 \text{ punto}\} = QP \cap W$

Voglio dire che f_p è continua

OSS. H iperpiano: $H = \{[x_0, \ldots, x_n] \mid a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0\}$
$H = [a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^{n*}$

$X = [x_0, \ldots, x_n]$, $Y = [y_0, \ldots, y_n]$ retta per X e Y: $\lambda X + \mu Y$ con $[\lambda, \mu] \neq [0, 0]$

Cosa significa fare una retta di iperpiani?

$\lambda A + \mu B \qquad A = [a_0, \ldots, a_n]$, $B = [b_0, \ldots, b_n]$ che rappresentano 2 iperpiani

Quali punti verificano $(\lambda A + \mu B)\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$? IO NON LO SO

R sottospazio di $\mathbb{P}^n$ di dim 1.

W ha dim $n-2$ che non incontra R.

$[\ldots]$

(Duale dello spazio proiettivo)

Rette ⟷ fasci di iperpiani
Punti ⟷ iperpiani
fasci di rette ⟷ stella di iperpiani

f_p è continua?

Basta provare che $f_p|_{U_i \cap \mathbb{P}^n \setminus \{p\}}$ è continua $\forall i = 0, \ldots, n$

Scegliamo un rif. $P_0, \ldots, P_n, U$ dove $P_0 = P$ $\quad W = \{x_0 = 0\}$

$$f_p(Q) = f_p([x_0, \ldots, x_n]) = PQ \cap W = (\lambda[1, 0 \ldots 0] + \mu[x_0, \ldots x_n]) \cap W =$$

$$\{[\lambda + \mu x_0, \mu x_1, \ldots, \mu x_n]\} \cap \{x_0 = 0\}$$

$\Rightarrow \lambda = -\mu x_0$

$\Rightarrow f_p(Q) = [0, \mu x_1, \ldots, \mu x_n] = [0, x_1, \ldots, x_n]$

Proiezione sghemba →

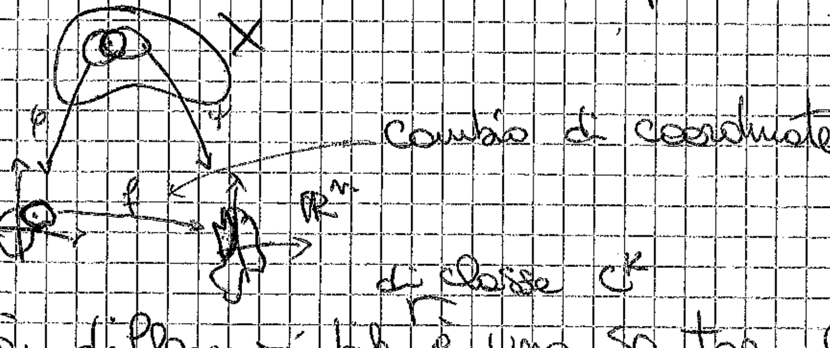
A questo punto, per le restrizioni, se $Q \in U_i$, $f_p(Q)$ ha coord. $[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_n}{x_i}]$ e $f|_{U_i \cap \mathbb{P}^n \setminus \{p\}}$ è continua ?

GEOMETRIA II _ LEZIONE 15

T_2 N_2

Def Una varietà topologica è uno spazio topologico localmente omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

aperti = "carte"



Def Una varietà differenziabile di classe C^k è uno sp. top. loc. omeom. ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ in cui f è un omeomorf. di classe C^k.
cambio di carte in $\mathbb{R}^n$

Def Un diffeomorfismo di classe C^k è un omeomorfismo di cl. C^k con inverso di classe C^k.

Def Successione: $f: \mathbb{N} \to X$
Sottosuccessione: $f': \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N} \xrightarrow{f} X$ con s strettamente crescente.

[pag. 100 cap. 6] N_1: "Primo numerabile"

N_1: Uno spazio è N_1 se ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

N_2: Uno spazio è N_2 se ammette una base numerabile di aperti.

"Più passa il tempo e meno ho voglia di insegnare Geometria 2"
- Cit.

GEOMETRIA II _ LEZIONE 16

Un punto limite è un punto di accumulazione, ma non è vero il viceversa. (Punto limite → definitivamente)
(Punto di accumulazione → frequentemente)

Per un punto di aderenza P esiste una sottosuccessione che vi converge se P ha un sistema fondamentale di intorni.

COMPATTEZZA PER SUCCESSIONI

Preso una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in un compatto, allora esiste un punto di accumulazione.

Dim: Fissato $m \in \mathbb{N}$, sia $C_m = \{a_n \mid n \geq m\}$
Prendo $\overline{C_m}$: l'intersezione finita è non vuota

X compatto: prendo una famiglia di chiusi la cui intersezione finita è non vuota. Allora $\cap C_m \neq \emptyset$
Se fosse $\cap C_m = \emptyset$ allora $\mathcal{C}(\cap C_m) = X$ e quindi $\overset{\shortparallel}{\cup}(\mathcal{C} C_m)$ sono aperti che ricoprono X

Ne estraggo un numero finito, quindi
$\mathcal{C} C_{m_1} \cup \ldots \cup \mathcal{C} C_{m_k} = X$, cioè l'intersezione finita dei C_{m_i} è vuota. Assurdo.

$x \in \cap \{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è evidentemente punto di accumulazione.

OSS. $\underset{\{x_0 \neq 0\}}{\overset{}{\mathbb{R}^n}}$ è denso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

COMPLETAMENTO di uno spazio

Prese tutte le successioni di Cauchy a valori nello spazio. 2 succ. sono equivalenti se convergono ad uno stesso valore dello spazio grosso. Il quoziente dello spazio metrico con questa relaz. di equivalenza è uno spazio completo.

TEOREMA DI BAIRE [...]

QUADRICHE IN $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Se $p \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ è un polinomio omogeneo, gli insiemi

$\{[x_0, \dots, x_n] \mid p(x_0, \dots, x_n) = 0\}$ sono ben definiti

$\{ - \dots \mid - - - \neq 0\}$ benché p non sia una funzione in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

CASO PARTICOLARE $\deg p = 2$

Def Una quadrica in $\mathbb{P}^n$ è il luogo di zeri di un polinomio omog. di grado 2.

Quante quadriche esistono a meno di proiettività?

Scrivendo matricialmente il polinomio, esiste una $M \in GL(n+1, \mathbb{C})$ che trasforma p in $x_0^2 + \dots + x_r^2$ con $r+1$ rango della forma bilineare

Una quadrica si dice non degenere se $r = n$

Quadriche degeneri di rango $1+r$:

Consideriamo il sottospazio H di equazioni $\begin{cases} x_{r+1} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$ di dim r

$A \in H \quad A = [x_0, \dots, x_r, 0, \dots, 0]$

$Q \cap H = \{x_0^2 + \dots + x_r^2 = 0\}$ è una quadrica non degenere di H.

$H' = \{x_0 = 0, \dots, x_r = 0\} \qquad H \cap H' = \emptyset \qquad H \cup H' = \mathbb{P}^n$

OSS. $H' \subseteq Q$

OSS. Se $B \in$ retta che unisce un punto di H' e un punto di $Q \cap H$ allora $B \in Q$

$B = \lambda C' + \mu C$ dove $C' = [0, 0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n]$
$C = [x_0, \dots, x_r, 0, \dots, 0]$ e $x_0^2 + \dots + x_r^2 = 0$

$\Rightarrow B = [\mu x_0, \dots, \mu x_r, \lambda x_{r+1}, \dots, \lambda x_n]$

Verifica l'eq. della quadrica perché $\mu^2 x_0^2 + \dots + \mu^2 x_r^2 = \mu^2 (x_0^2 + \dots + x_r^2) = 0$

- Se $r = n-1$, allora H è un iperpiano, H' è un punto e si riesce QUASI a visualizzare il cono.

- Se H è una retta, l'equazione di Q è $x_0^2 + x_1^2 = 0 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1)$
  $(i, 1, 0, \dots, 0)$ e $(1, -i, 0, \dots, 0)$ stanno in H.
- Se $H = [1, 0, \dots, 0] \quad H' = \{x_0 = 0\} \quad Q = \{x_0^2 = 0\}$ piano doppio

CASO REALE: $\mathbb{R}$

È ben definito $\{[x_0, \dots, x_n] \mid p(x_0, \dots, x_n) = 0\}$
$\{ - \dots \mid - - - > 0\}$
$\{ - \dots \mid - - - < 0\}$ ← p è omogeneo di grado 2.

Per Sylvester reale abbiamo $i_+ + i_- = r+1$

- p e $-p$ definiscono la stessa quadrica, quindi possiamo supporre $i_+ \geq i_-$

C'è una proiettività che porta p ad essere

$$x_0^2 + \dots + x_{i_+-1}^2 - x_{i_+}^2 - \dots - x_r^2 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{i_+-1} x_i^2 - \sum_{j=i_+}^{r} x_j^2 = 0$$

$H = \{x_{r+1} = \dots = x_n = 0\}$ $Q \cap H$ è una quadrica non degenere

$H' = \{x_0 = \dots = x_r = 0\}$ che è il vertice

OSS.
- Tra le quadriche non degeneri c'è quella $\emptyset$ $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 0$
- Se la quadrica è non degenere e $i_- = 1$
  $x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$
  allora $Q \cong S^{n-1}$

in $\boxed{\mathbb{P}^3(\mathbb{R})}$:

- quadrica $\emptyset$ $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
- sfera $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$
- altre cose come $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$
  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$
  $S^1 \times S^1$
  toro

GEOMETRIA II _ LEZIONE 17

QUADRICHE NON DEGENERI IN $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ $\left(e\ \mathbb{P}^3(\mathbb{C})\right)$

Il rango è 4

- $(4,0,0)$ ⇝ Quadrica vuota
- $(3,1,0)$ ⇝ Sfera S^2

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0 \qquad \{x_3=0\}\cap Q=\emptyset$$

Il complementare dell iperpiano è $\mathbb{R}^3$

Nelle coordinate di $\mathbb{R}^3$ Q ha eq:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

- $(2,2,0)$ ⇝ Toro $S^1\times S^1$

$$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$$
$$x_0^2-x_2^2=x_3^2-x_1^2$$

Cambio di coordinate: $\begin{cases} U_0=x_0+x_2 \\ U_1=x_3-x_1 \\ U_2=x_0-x_2 \\ U_3=x_3+x_1 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$U_0U_2-U_1U_3=0$$

- $\begin{cases} \lambda U_0-\mu U_1=0 \\ \mu U_2-\lambda U_3=0 \end{cases}$ $r_{[\lambda,\mu]}$ famiglia di rette parametrizzate da $[\lambda,\mu]$ omogee
- $\begin{cases} aU_0-bU_3=0 \\ bU_2-aU_1=0 \end{cases}$ $S_{[a,b]}$ famiglia di rette parametrizzate da $[a,b]$ omogenee

Vediamo che:

1) $r_{[\lambda,\mu]}\cap S_{[a,b]}=$ Punto

2) $r_{[\lambda,\mu]}\cap r_{[\lambda',\mu']}=\emptyset$ se $[\lambda,\mu]\neq[\lambda',\mu']$

3) $S_{[a,b]}\cap S_{[a',b']}=\emptyset$ se $[a,b]\neq[a',b']$

$\boxed{1}$ $\begin{cases} \lambda U_0-\mu U_1=0 \\ \mu U_2-\lambda U_3=0 \\ aU_0-bU_3=0 \\ bU_2-aU_1=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda \\ a & 0 & 0 & -b \\ 0 & -a & b & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3, quindi la soluz. è una quaterna $[c_0,c_1,c_2,c_3]$ non nulla (un punto)

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ Facendo la matrice in entrambi i casi vediamo che è invertibile.

Se questa è una fibrazione di Q $(Q=r_{[\lambda,\mu]}\times S_{[a,b]})$, poiché le famiglie sono parametrizzate da $[\lambda,\mu]$ (e $[a,b]$) che formano una retta $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (cioè una S^1) allora $Q\cong\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$Q\cong S^1\times S^1$$
TORO

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\xrightarrow{\varphi}Q$$
$$\overset{\cup}{[\lambda,\mu]} \qquad \overset{\cup}{[a,b]}$$

$$\varphi([\lambda,\mu],[a,b])=r_{[\lambda,\mu]}\cap S_{[a,b]}$$

Se φ è continua allora è anche chiusa, dunque se è bigettiva φ^{-1} è continua e φ è omeomorfismo.

① φ è iniettiva

$$([\lambda,\mu],[a,b])\neq([\lambda',\mu'],[a',b'])$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi([\lambda,\mu],[a,b])\neq\varphi([\lambda',\mu'],[a',b'])$$ per 1) e 2) di prima.

② φ è surgettiva

$P_0=[c_0,c_1,c_2,c_3]\in Q$ e quindi $c_0c_2=c_1c_3$

Prendendo $[\lambda,\mu]=[c_1,c_0]=[c_2,c_3]$

$[a,b]=[c_3,c_0]=[c_2,c_1]$

Si ha $r_{[\lambda,\mu]}\cap S_{[a,b]}=P_0$

③ φ è continua

Ci mettiamo in una carta affine di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dove $\lambda b\neq0$. $r_{[1,k]}\cap S_{[h,1]}=[c_0,c_1,c_2,c_3]$

Possiamo dire che

$c_0:\mu=c_1:\lambda$

$c_2:\lambda=c_3:\mu$ $\Rightarrow \begin{cases} c_0=kc_1 \\ c_3=kc_2 \\ c_3=hc_0 \\ c_2=hc_1 \end{cases}$

$c_3:a=c_0:b$

$c_2:a=c_1:b$

Se $c_1=0 \Rightarrow c_0=c_1=c_2=c_3=0$ impossibile

Quindi $c_1\neq0$ e $\begin{cases} c_2=hc_1 \\ c_3=hkc_1 \\ c_0=kc_1 \end{cases}$ Sono funzioni continue nei parametri h, k; dunque φ è continua su tutta la carta

Analogamente φ è continua in $\lambda a\neq0$, $\mu a\neq0$ e $\mu b\neq0$.

Poiché queste carte ricoprono $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ allora φ è continua.

Quindi $Q\cong S^1\times S^1$

Le quadriche non degeneri in $\mathbb{R}^3$ sono diverse in base al piano all'infinito della quadrica proiettiva.

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Sfera:
- ↳ piano tangente ⟼ paraboloide
- ↳ piano secante ⟼ iperboloide a 2 falde
- ↳ piano esterno ⟼ Sfera

Toro:
- ↳ piano secante ⟼ iperboloide a 1 falda
- ↳ piano tangente ⟼ Sella

Quadrica vuota ⟼ Quadrica vuota

Quadriche in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \text{Cambio coordinate} \begin{cases} x_0 = x_0' \\ x_1 = x_1' \\ x_2 = i\,x_2' \\ x_3 = i\,x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$u_0 u_2 = u_1 u_3 \quad \rightsquigarrow \text{Tutte le quadriche sono rigate}$$

→ Una quadrica non degenere in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è omeomorfa a

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2 \times S^2$$

QUADRICHE DEGENERI IN $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

• Cono su quadrica vuota (punto)	$(3,0,1)$
• Cono su conica non vuota:	$(2,1,1)$
• retta isolata:	$(2,0,2)$
• Coppia di piani:	$(1,1,2)$
• Piano doppio:	$(1,0,3)$

GEOMETRIA II - LEZIONE 18

(FORSE FACOLTATIVA?)

LEMMA DI URYSOHN:

"normalità", esistenza di aperti che contengono i 2 chiusi

In uno spazio topologico con certe proprietà, dati 2 chiusi disgiunti A e B esiste una funzione continua a valori in $\mathbb{R}$ che vale 0 in A e 1 in B.

TEOREMA DI BAIRE:

In uno spazio metrico X completo. Siano C_n dei chiusi senza parte interna. Allora $C = \bigcup C_n$ non ha parte interna.

DIM: Bisogna usare l'ip. della completezza.

Se per assurdo $\exists x_0 \in C \; \exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq C$

Essendo $\mathrm{Int}(C_1) = \emptyset$, $\mathrm{Int}(B_r(x_0) \cap C_1) = \emptyset$

Il complementare di $B_r(x_0) \cap C_1$, che è un aperto, e scelgo x_1 t.c. $B_{\frac{r}{3}}(x_1) \subseteq$ complementare di $B_r(x_0) \cap C_1$

Continuo con lo stesso procedimento con i C_i scegliendo x_i

A questo punto ho costruito $\{x_n\}$ tale che:

$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m)$$

... pezzo di serie telescopica ...

Quindi (essendo X completo) $x_n \to h \in C$ }.

Ma $h \notin C_i \; \forall i$, quindi $h \notin C$. Assurdo

OSS. Il complementare dei C_i sono Ω aperti densi.

Quindi Baire è equivalente a dire che

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_i \neq \emptyset \qquad ((?)\ \cap \dots = \text{denso})$$

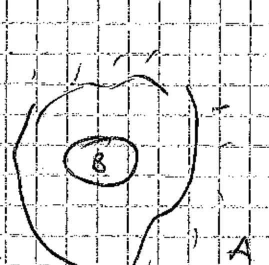
CONSEGUENZA: Sia $C^0(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ con una topologia in cui valga Baire. Siano $\{K_i\}$ una famiglia di sottoinsiemi che invadono $\mathbb{R}^n$. Sia G aperto denso di $C^0(K_i \to \mathbb{R})$ tale che la proprietà di essere in G sia aperta. Allora per Baire c'è una funzione che è G su tutto $\mathbb{R}^n$ (che sta nell'intersez di tutti i K_i con G)

URYSOHN:

- Se uno spazio metrico è semplice trovarla:

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

- Prendiamo 2 chiusi così:



Per sperare che la torta sia continua devo trovare tanti chiusi che contengono B che stanno proprìamente uno dentro l'altro

Se ci riesco vedo che la funzione limite è continua (la sup. degli scalini è differenza di chiusi, quindi aperti)

L'ipotesi della normalità di X è necessaria (X è T_4)

$\exists U_A, U_B$ aperti : $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$ e $U_A \cap U_B = \emptyset$

$\Rightarrow \overline{U_A} \subseteq cU_B$

Costruisco una successione di $\overline{U_A}$ (oppure su cU_B) ogni volta riportando dall'ultimo step.

tale che $f(\overline{U_{A_i}}) = \frac{1}{i}$

Def RESTRINGIMENTO: Un ricoprimento $\{V_i\}$ fatto con aperti contenuti negli aperti di prima: $\cup V_i = X$ $V_i \subsetneq U_i$

oss. Se uno sp. top. è normale ogni ric. ammette restringimento.

Def RAFFINAMENTO: Un ricoprimento tale per cui ogni aperto è contenuto negli aperti di prima, $\cup V_i = X$ $V_i \subseteq U_j$

GEOMETRIA II - LEZIONE 19

(FORSE FACOLTATIVA ?)

GOOGLE: JOHAN THIM - CONTINUOUS NOWHERE DIFFERENTIABLE FUNCTIONS pp. 74 - ...

TEOREMA:

Lo spazio delle funzioni continue su $[0,1]$ è metrico e completo, con distanza $d(f,g) = \sup(f-g)$.

Dunque su questo spazio vale Baire

(TEOREMA DI BANACH-MAZURKIEWICZ)

Per avere una funzione mai derivabile vogliamo che

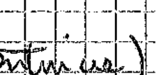
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = +\infty \quad \forall x \in \overset{[0,1]}{\mathbb{R}}$$

Vogliamo dire quindi che queste funzioni sono dense per usare Baire.

Sia $E_n = \{ f \mid \exists x \in [0, 1-\frac{1}{n}] : \forall h \quad f(x+h) - f(x) \leq nh \}$

Sia $E = \cup E_n$. Se vediamo che E_n è chiuso magro $\forall n$ abbiamo vinto, perché il suo complementare è ciò che ci interessa (ed è aperto denso).

PL = funzioni lineari a tratti (continue)



LEMMA: PL è denso in $C([0,1])$

Presa una g, si partiziona $[0,1]$ in $[0,t_1] \cup [t_1,t_2] \cup ... \cup [t_n,1]$ e si crea una spezzata su questi punti

$$h_i = g(t_i)\frac{t_{i+1}-x}{t_{i+1}-t_i} + g(t_{i+1})\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}$$ definita a tratti

Fissato un $\varepsilon > 0$, si può creare una suddivisione abbastanza piccola affinché $d(g - \sum h_i) < \varepsilon$.

LEMMA:

Comunque presa una palla di centro PL (che è denso) trovo un elemento nella palla che non sta in E_n.

DIM.

Fissata $g \in PL$, $\varepsilon > 0$, dimostro che $\exists h : \|g-h\| < \varepsilon$ e $h \notin E_n$

Consideriamo $\varphi(x) = d(x, \mathbb{Z})$ φ :

$$\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$$

Sia $M = \max_{x\in[0,1]} g'(x)$ ← siamo in un E_n fissato

Stabilisco m tale che $\varepsilon m > n + M$

Considero $g(x) + \varepsilon\varphi(mx) =: \psi(x)$

$$\psi'(x) = g'(x) + \varepsilon m \varphi'(mx)$$

$$|\psi'(x)| = |g'(x) + \varepsilon m \varphi'(mx)| \geqslant |M + M\varphi'(mx) + n\varphi'(mx)| > n$$

$\Rightarrow \psi \notin E_n$.

LEMMA: E_n è chiuso

DIM: Bisogna prendere una successione di funzioni in E_n che converge e vedere che il punto limite sta in E_n.

A questo punto abbiamo dimostrato che gli E_n sono magri. Allora il complementare su $[0,1]$ è denso. Dunque esiste una funzione mai derivabile e continua su $[0,1]$, e dunque su $\mathbb{R}$.

GEOMETRIA II - LEZIONE 20 - ESERCITAZIONE

- X cpt e Housdorff $\Rightarrow$ X è T_4 ossia 2 chiusi disgiunti in X hanno intorni disgiunti.

DIM: C_1, C_2 chiusi disgiunti in X (sono cpt)

Allora $\forall x \in C_1$ $\forall y \in C_2$ ci sono intorni disgiunti $x \in U_y$ e $y \in V_y$

$\{V_y\}_{y\in C_2}$ $\quad C_2 \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$

$U_x = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n} \ni x \quad \forall x \in C_1$

$\{U_x\}$ ricopre C_1 $\quad U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$ ricopre C_1.

?

- X è Housdorff $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono compatti e connessi t.c. $A_{n+1} \subseteq A_n$

$\Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ è connesso.

DIM: Se $\cap A_n$ non fosse connesso ci sono U e V aperti di X disgiunti t.c. $\cap A_n \subseteq U \cup V$ ma $\cap A_n \not\subseteq U$, $\cap A_n \not\subseteq V$

X sp. cpt, U aperto
$\{C_i\}_{i\in I}$ una famiglia di chiusi in X t.c. $\bigcap C_i \subseteq U$.
Allora $\bigcup_i (X \setminus C_i) \cup U = X$.
Ma quindi ne bastano un numero finito $\Rightarrow$
$(X \setminus C_1) \cup \dots \cup (X \setminus C_s) \cup U = X \Rightarrow C_1 \cap \dots \cap C_s \subseteq U$

A_1 è cpt. $\Rightarrow \exists A_{n_1} \dots A_{n_s}$ tali che $A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_s} \subseteq U \cup V$

$\Rightarrow A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_s} \subseteq U \Rightarrow \cap A_n \subseteq U$ e questo è vero $\forall U, V$ aperti disgiunti

- X cpt. chiuso e di Housdorff.

$A \subseteq X \quad \{Y \subseteq X \mid Y$ cpt connesso e contiene $A\}$

Questa famiglia ha elementi minimali

DIM: Basta prendere delle catene $\{Y_i\}$ linearmente ordinate per incl. Per l'esercizio precedente $\cap Y_i$ è cpt, connesso e contiene A, quindi è un minorante. Quindi per il lemma di Zorn esiste elemento minimale

● $G \overset{<}{\subseteq} \text{Omeo}(X)$

$x \sim y \iff \exists g \in G : x = g(y)$

Le classi di eq. si dicono orbite

$X/_G = \{\text{orbite}\}$ con la top. quoziente

1. $\pi : X \longrightarrow X/_G$ è aperta
2. Se G è finito π è anche chiusa.

dim. ① U aperto di $X \Rightarrow g(U)$ aperto in X

$\bigcup_{g \in G} g(U) = \pi^{-1}(\pi(U)) \Rightarrow \pi(U)$ è aperto

② Se C è chiuso e G è finito $\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g(C) \Rightarrow \pi(C)$ chiuso

TEOREMA:

Sia X di Hausdorff e G un gruppo di omeo di X. Se

1: $\exists$ aperto A che incontra tutte le orbite
2: $\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$ è finito

Allora $X/_G$ è separato (T_2)

dim: Fissiamo $p, q \in X/_G$. Ci sono $x, y \in A$ t.c. $\pi(x) = p$, $\pi(y) = q$

Siano $g_1, \dots, g_s$ gli elementi di G per cui $g_i(A) \cap A \neq \emptyset$

$\forall i = 1, \dots, s$ scegliamo intorni aperti disgiunti

$x \in U_i \qquad g_i(y) \in V_i \qquad U_i \cap V_i = \emptyset$

$U = A \cap (\bigcap_i^n U_i) \ni x$

$V = A \cap (\bigcap_i^n g_i^{-1}(V_i)) \ni y$

$U \cap g(V) = \emptyset \ \forall g \in G$ se g non è un g_i

Nel caso di g_i

$U \subseteq U_i$
$V \subseteq g_i^{-1}(V_i)$ $\qquad U \cap g_i(V) \subseteq U \cap V_i = \emptyset$

Saturiamo U e V

$\bigcup_{g \in G} g(U) \cap \bigcup_{h \in G} h(V) = \bigcup_{g, h \in G} (g(U) \cap h(V))$

Supponiamo $g(U) \cap h(V) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap g^{-1}h(V) \neq \emptyset$ Assurdo.

Quindi $X/_G$ è T_2

GEOMETRIA II LEZIONE 21

OMOTOPIA

Def Uno spazio è localmente connesso (per archi) se ogni suo punto ha un sist. fond. di intorni connesso (per archi).

Def Si definisce $\pi_0(X) = X/_\sim$ con $x \sim y \iff \exists \alpha : [0,1] \to X$ continua t.c. $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$ (arco).

Def 2 funzioni $f, g : X \to Y$ continue si dicono OMOTOPE se esiste $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continua t.c.

$F(x, 0) = f(x)$
$F(x, 1) = g(x)$

F viene detta omotopia.

OSS. $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_0"] \arrow[r, "f_1"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_0"] \arrow[r, "g_1"'] & Z \end{tikzcd}$$ $\left.\begin{matrix} f_0 \sim f_1 \\ g_0 \sim g_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g_1 f_1 \sim g_0 f_0$

Devo costruire $X \times [0,1] \longrightarrow Z$

Ho $\left.\begin{matrix} F : X \times [0,1] \longrightarrow Y \\ G : Y \times [0,1] \longrightarrow Z \end{matrix}\right\} \Rightarrow H : X \times [0,1] \longrightarrow Y \times [0,1]$

$(x, t) \longmapsto (F(x,t), t)$

cilindro di applicazione (orbita del punto x nella trasformaz. da f a g : $F(x,t)$)

$G \circ H$ è la funz. (cont.) cercata

Def $f : X \to Y$ si dice equivalenza omotopica se $\exists g : Y \to X$ continua tale che $fg \sim id_Y$ e $gf \sim id_X$

Def Se $Y \subseteq X$, $r : X \to Y$ si dice retrazione se $r|_Y = id_Y$.

Def Una retrazione si dice per deformazione se è omotopa all'identità. Per ogni $t \in [0,1]$ l'omotopia (che si dice deformaz.) lascia fissi tutti i punti di Y

GEOMETRIA II - LEZIONE 22 - ESERCITAZIONE

GEOMETRIA II -

Def X è contrattile se è omotopicamente equivalente a un punto

I convessi di $\mathbb{R}^n$ sono contrattili

OSS. $f: X \to Y$ continua. Se X è contrattile $f \sim$ costante.
Se Y è contrattile $f \sim$ costante.

X è contrattile
$X \to x_0 \in X$

$F: X \times I \to X$ $\qquad$ $G: X \times I \to Y$

$F(x,1) = x$ $\qquad$ $G(x,t) = f(F(t,x))$

$F(\cancel{x},\cancel{0}) = x_0$ $\qquad$ $G(x,1) = f(x)$

$F(\cancel{x},\cancel{t}) = x_0$ $\qquad$ $G(x,0) = f(x_0)$

- X, $a \in X$ Si costruisce un gruppo $\pi_1(X,a)$ che sia un invariante topologico.

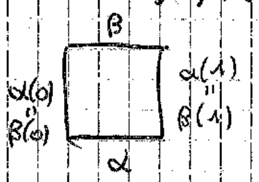
$\alpha: [0,1] \to X$ $\qquad$ $\beta: [0,1] \to X$

$\alpha(0)$ il punto iniziale
$\alpha(1)$ il punto finale $\qquad$ $\alpha(1) = \beta(0)$

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$i(\alpha) = \alpha(1-t)$ inversione

Se F è l'omotopia tra Y e $y_0 \in Y$, $F(f(x),t)$ è l'omotopia tra f e una mappa costante



Def $\alpha, \beta: [0,1] \to X$
$\alpha(0) = \beta(0)$
$\alpha(1) = \beta(1)$ $\qquad$ α è omotopo a β se c'è $F: I \times I \to X$
tale che
$F(t,0) = \alpha(t)$
$F(t,1) = \beta(t)$
$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0)$
$F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1)$

$\Omega(X,a,b) = \{$cammini α con $\alpha(0) = a$ $\alpha(1) = b\}$

$$\begin{tikzcd} * \; \Omega(X,a,b) \times \Omega(X,b,c) \arrow[d] \\ \Omega(X,a,c) \end{tikzcd}$$

$i: \Omega(X,a,b) \to \Omega(X,b,a)$ $\qquad$ $i^2 = id$

$i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha)$

Infatti: $F(t,s)$ omotopia tra α e α'
$F(1-t,s)$ omotopia tra $i(\alpha)$ e $i(\alpha')$
Se $F(t,s)$ è l'omotopia tra α e α'
e se $G(t,s)$ è l'omotopia tra β e β'

PROP. La relazione $\sim$ rispetta $*$ e i, cioè

- $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ $\Rightarrow$ $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$
- $\alpha \sim \alpha'$ $\Rightarrow$ $i(\alpha) \sim i(\alpha')$

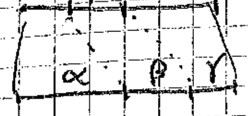
$$F * G(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & \text{per } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(2t-1,s) & \text{per } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

LEMMA: Se φ è una qualsiasi appl. continua $I \to I$ con $\varphi(0) = 0$ $\varphi(1) = 1$ allora $\forall \alpha: I \to X$ $\beta = \alpha(\varphi(t))$ è omotop ad α

$\alpha(st + (1-s)\varphi(t))$ $\qquad$ per $s=0$ $\overset{\text{viene}}{}$ $\alpha(\varphi(t)) = \beta(t)$
$\qquad$ Per $s=1$ $\alpha(t)$

$\alpha \in \Omega(X,a,b)$ $\quad 1_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * 1_b$ per il lemma.

COROLLARIO: $(\alpha * \beta) * \gamma$ è omotopo a $\alpha * (\beta * \gamma)$



L'omotopia è $$\phi(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & \text{se } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

COROLLARIO: $*/_\sim$ è un'operazione associativa.

ESEMPIO: Se abbiamo 2 archi α, β con $\alpha(0)=\beta(0)$, $\alpha(1)=\beta(1)$ e siano in un convesso ($C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $\alpha, \beta \in \Omega(C, a, b)$)

Allora $s\alpha(t) + (1-s)\beta(t)$ è un omotopia tra α e β.

Def $\pi_1(X, a) = \Omega(X, a, a) / \sim$

TEOREMA: $\pi_1(X, a)$ è un gruppo rispetto all'operazione

- $[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha * \beta]$
- l'elemento neutro è $[1_a]$
- $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$

Buona definizione: $\alpha' \sim \alpha$, $\beta' \sim \beta \Rightarrow \alpha' * \beta' \sim \alpha * \beta \Rightarrow [\alpha * \beta] = [\alpha' * \beta']$

$[1_a * \alpha] = [\alpha] = [\alpha * 1_a] \Rightarrow 1_a$ è l'elemento neutro

$[\alpha * i(\alpha)] \overset{?}{=} [1_a]$

$$(\alpha * i(\alpha))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ i(\alpha)(2t-1) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$F(t,s) = \alpha(st) * i(\alpha(st))$

per $s = 0$ $\quad 1_a * 1_a = 1_a$

per $s = 1$ $\quad (\alpha * i(\alpha))(t)$

COROLLARIO: $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ $p \in [0,1]$ $d = \alpha(p)$

Siano α_0 e α_1 i cammini $\alpha_0(t) = \alpha(t \cdot 0 + (1-t)p)$

$\alpha_1(t) = \alpha(tp + (1-t)1)$

Allora $\alpha|_{[0,p]} * \alpha|_{[p,1]} \sim \alpha_0 * \alpha_1 \sim \alpha$

COROLLARIO: $\forall c \in X$ e $\beta \in \Omega(X, d, c)$

$[\alpha_0 * \beta * i(\beta) * \alpha_1] = [\alpha]$

COROLLARIO: Si può fare $0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_m = 1$ ...

Allora $\alpha \sim \alpha_0 * \ldots * \alpha_{m-1}$

TEOREMA: $f: X \to Y$ continua $f(x_0) = y_0 \in Y$. Allora

f induce un omomorfismo di gruppi

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

DIM: • f_* è ben definito: se $\alpha \sim \beta$ e $F(t,s)$ è l'omotopia tra α e β $\quad f \circ F(t,s)$ è l'omotopia tra $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$

• f_* è un omomorfismo:

$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)]$ *

$$f \circ (\alpha * \beta) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \sim f \circ \alpha \\ f(\beta(2t-1)) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \quad \sim f \circ \beta \end{cases}$$

$\Rightarrow [f \circ (\alpha * \beta)] = [f \circ \alpha * f \circ \beta] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) f_*([\beta])$

TEOREMA: Ogni elemento γ di $\Omega(X, a, b)$ induce un isomorfismo

$$\gamma_\#: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, b)$$
$$[\alpha] \longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$$

la * funziona al contrario rispetto alla comp.

DIM: • $\gamma_\#$ è omo:

$\gamma_\#([\alpha]\cdot[\beta]) = [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma] = [i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma) * \beta * \gamma] =$

$= [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \cdot [i(\gamma) * \beta * \gamma] = \gamma_\#([\alpha]) \gamma_\#([\beta])$

$i(\gamma)_\#(\gamma_\#([\alpha])) = i(\gamma)_\#([i(\gamma) * \alpha * \gamma]) = [\gamma * i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma)] = [\alpha]$

Quindi $\gamma_\#$ è invertibile

COROLLARIO: X connesso per archi $\pi_1(X)$ è la classe di isomorfismi di $\pi_1(X, a)$ $\forall a \in X$

Def Uno spazio topologico X è semplicemente connesso se è connesso per archi e $\pi_1(X) = 0$

ESEMPI: • $\mathbb{R}^n$ è sempl. connesso

Scriviamo la retrazione per deformazione di $\mathbb{R}^n$ su 0.

$\underset{I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}{F}(t, u) = tu$ $\quad$ Questo è un omotopia tra α e 1_0 $\quad \alpha \in \Omega(\mathbb{R}^n, 0, 0)$

OSS.
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \\ S^1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
$\alpha(0)=\alpha(1)$

$\pi_1(X)$ sono le classi di omotopia di appl. continue $S^1 \longrightarrow X$

Analogamente possiamo definire quindi $\pi_n(X)$ come appl. continue $S^n \longrightarrow X$ a meno di omotopia.

Esempio di $[f] \in \pi_3(S^2)$ è la mappa di Hopf (non è banale)

$$f : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow S^2 = \mathbb{P}_1^*(\mathbb{C})$$
$$S^3 \longmapsto S^2$$

OSS. Se $f : X \longrightarrow Y$, $f(x_0) = y_0$ e $g \sim f$ allora non è detto che $g(x_0) = f(x_0) = y_0$. Se così fosse allora anche $f_* \sim g_*$, altrimenti NO.

COROLLARIO: Spazi omotopicamente equivalenti connessi per archi hanno gruppi fondamentali isomorfi.

DIM.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

1. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ perché $g_* \circ f_* = id_*$

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, \overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{g(f(x_0))}})$$

$id_* = id : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, a) \quad \forall a \in X$

Sapendo che $(g \circ f) \sim id_X$ allora $(g \circ f)_* \sim id_*$

Quindi g_* e f_* sono isomorfi.

COROLLARIO: Se $Y \subseteq X$ è un retratto per deformazione di X, allora $i : Y \longrightarrow X$ (l'inclusione) induce un isomorfismo tra il $\pi_1(Y, y_0)$ e $\pi_1(X, y_0)$

$$\left.\begin{array}{ll} (f \circ g)_* = id_{\pi_1(Y)} & \Rightarrow f_* \text{ surg}, \ g_* \text{ inj} \\ (g \circ f)_* = id_{\pi_1(X)} & \Rightarrow f_* \text{ inj}, \ g_* \text{ surg} \end{array}\right\} \Rightarrow f_* \text{ e } g_* \text{ isom.}$$

$$(g \circ f)_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)$$
$$[\alpha] \longmapsto [(g \circ f)(\alpha)] = [\alpha] \quad \text{perché } (g \circ f) \sim id_X$$

GEOMETRIA II - LEZIONE 23

PROPOSIZIONE: $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

DIM: Consideriamo
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$$

f è surgettiva ma non iniettiva.

Sia U un aperto in $S^1 \setminus \{p\}$ ← punto. Allora "aperto trivializzante" ("banalizzante")

$$f^{-1}(U) = \bigsqcup_j V_j$$

con V_j della forma (a_j, b_j). Su ogni V_j, f è bigettiva, continua e chiusa (perché $\bar{U}$ compatto $\Rightarrow$ $f(\bar{U})$ compatto $\Rightarrow$ $f(\bar{U})$ chiuso)
f continua S^1 è T_2

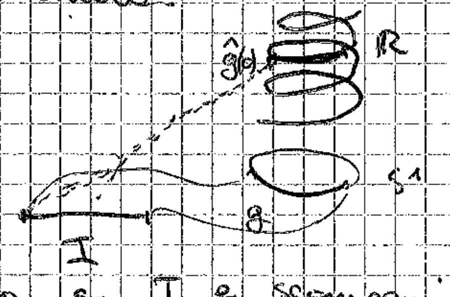
Dunque $f|_{V_j}$ è un omeomorfismo.

Sia $g : I \longrightarrow S^1$ un arco.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ I \arrow[ur, "\hat{g}"] \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\hat{g}$ esiste sempre e fissato $\hat{g}(0)$ è unica.

Infatti: $\forall x \in S^1 \ \exists U_x$ trivializzante (cioè $f^{-1}(U_x) = \bigsqcup_i V_i$ con V_i aperto omeomorfo a U_x). Prese le $g^{-1}(V_i)$, questi sono un ricoprimento di I: ne estraggo un num. finito (t_i, s_i). Prendo dei punti a_i all'interno di (t_i, s_i). L'applicazione che va da (a_1, a_2) ad S^1 con g e sale a un determinato V_i con $(f|_{V_i})^{-1}$ fa commutare il diagramma. Scelto dove va 0, è unico.



Consideriamo un'omotopia su I e scomponiamola in quadratini abbastanza piccoli da far sì che $F(\boxed{\cdot})$ stia tutto in un aperto trivializzante. Posso quindi sollevarlo, in modo unico scelto lo $(0,0)$.

Def. Un rivestimento è una coppia di spazi X, Y e un'appl. $\pi: X \to Y$ continua e surg. tale che $\forall y \in Y$ c'è un intorno aperto U la cui controimmagine è unione di aperti disgiunti omeomorfi tramite π a V.

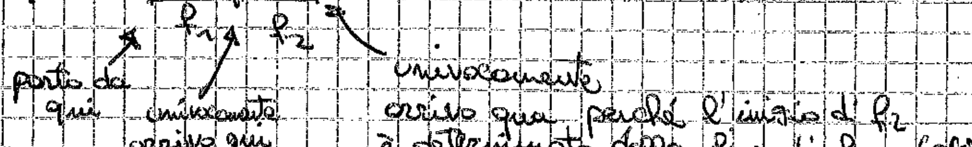
Potendo sollevare le omotopie, è ben definita l'applicaz. "grado" da $\pi_1(S^1)$ a $\mathbb{Z}$ (il numero di giri). Inoltre, è un isomorfismo

Infatti: surg. ovvio

inj. $f_1, f_2 \Rightarrow f_1 * f_2^{-1}$ chiuso, $\mathbb{R}$ retrattile $\Rightarrow f_1 * f_2^{-1} \sim id$

$\Rightarrow f_1 \sim f_2$

omeomorf.



GEOMETRIA III _ LEZIONE 24

GEOMETRIA II _ LEZIONE 25

GEOMETRIA II _ LEZIONE 26 ... 32

GEOMETRIA II LEZIONE 33 _ ESERCITAZIONE

- X sp. top. $x, y \in X$

$$\Omega(X, x, y) = \{ \text{cammini } \alpha : [0,1] \to X \mid \alpha(0) = x \quad \alpha(1) = y \}$$

$x \sim y$ se $\Omega(X, x, y) \neq \emptyset$

Le classi di equivalenza sono le componenti connesse per archi di X

Def X è loc. connesso per archi se $\forall x \in X$ x ha un sist. fond. di intorni connessi per archi.

Prop. Se X è loc. connesso per archi allora le comp. connesse per archi sono

1) aperte
2) coincidono con le comp. connesse

DIM? $x \in X$

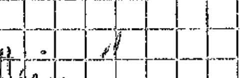
$A_x = \{ y \in X \mid \text{c'è un arco da } x \text{ a } y \}$

$\forall y \in A_x$ $\exists$ intorno U aperto connesso per archi $\Rightarrow U \subseteq A_x$

$\Rightarrow A_x$ è aperto

$A_x^c = \bigcup_{y \nsim x} A_y \Rightarrow A_x^c$ è aperto $\Rightarrow A_x$ è chiuso

Le comp. connesse ~~[illegible]~~ contengono gli A_x (che sono aperti e chiusi), ma allora coincidono.

OSS. "La pulce e il pettine" 

Comp. connesse : 1 (è connesso)

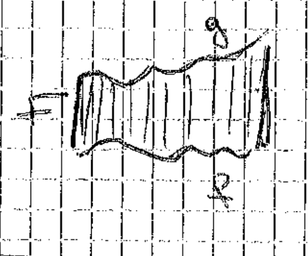
Comp. connesse per archi : 2 (pulce e pettine)

OSS Le funz. continue portano punti equivalenti in punti equivalenti per cui $\Omega(X, x, y) \neq \emptyset \Rightarrow \Omega(Y, f(x), f(y)) \neq \emptyset$

Def Omotopia tra funzioni continue $f, g : X \to Y$

f è omotopa a g se esiste un'appl. continua

$F : X \times I \to Y$



$F(x,0) = f(x)$

$F(x,1) = g(x)$

Def X si dice contrattile se id_X è omotopa a un'appl. costante $X \to x_0 \in X$

(la posso mandare a un punto)

Def $Y \subseteq X$

Una retrazione da X a Y è $r : X \to Y$ continua tale che $r(y) = y \ \forall y \in Y$

Esempio: $X = A \cup B$ $A \cap B = \{x_0\}$

$X \xrightarrow{r} A$

$r(x) = x$ se $x \in A$

$r(x) = x_0$ se $x \notin A$

Def. $f : X \to Y$ è un'equivalenza di omotopia se è "invertibile" modulo omotopia, cioè $\exists g : Y \to X$ tale che

$g \circ f \sim id_X$

$f \circ g \sim id_Y$

oss. X è contrattile vuol dire che la mappa costante $X \to x_0$ è omotopa a id_X

$r : X \to x_0$

$i : \{x_0\} \to X$

(è un caso particolare dell'equivalenza di omotopia)

- $f, g : S^n \to S^n$

$tf(x) + (1-t)g(x)$ è la corda tra $f(x)$ e $g(x)$

se $\| tf + (1-t)g(x) \| \neq 0$ allora $h(x,t) = \frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\| tf(x) + (1-t)g(x) \|}$ è un'omotopia

cioè $f(x) \neq -g(x)$

Se n dispari $S^n \subseteq R^{n+1}$ $n+1$ pari

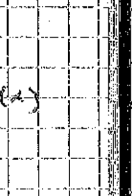
$x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n$

$\overline{x} = (x_1, -x_0, x_3, -x_2, \dots, x_n, -x_{n-1})$

$\langle x, \overline{x} \rangle = 0$

$\overline{x} = g(x)$ è continua

$\langle x, g(x) \rangle = 0 \Rightarrow g \sim id_{S^n}$



Ripetendo il ragionamento con $a = -id_{S^n}$

$a(x) = -x$

si ha che $a \sim g \Rightarrow a \sim id_{S^n}$

Def r si chiama retrazione per deformazione se r è omotopa a id_X. $r : X \to Y$

In particolare r è una equivalenza di omotopia

$i : Y \hookrightarrow X$ $r \circ g = id_Y$

$g \circ r = r \sim id_X$.

PROIEZIONE SGHEMBA (la pr. sghemba è una retraz. per deformaz.)

$\mathbb{P}^n(K)$ H, K sottospazi lineari di $\mathbb{P}^n$

$H \cap L = \emptyset$

$\dim H + \dim L = n-1$

$p : \mathbb{P}^n \setminus H \to L$ Esiste un rif. proiettivo $P_0, \dots, P_n, U$

$P_0, \dots, P_h \in H$ $P_{h+1}, \dots, P_n \in L$

$\dim H = h$ $\dim L = n-h-1$

$P \in H \Rightarrow P = [x_0, \dots, x_h, 0, \dots, 0]$

$Q \in L \Rightarrow Q = [0, \dots, 0, x_{h+1}, \dots, x_n]$

$R \notin H \Rightarrow R = [x_0, \dots, x_n]$ le ultime coord. di R da x_{h+1} a x_n non sono tutte nulle

$p(R) = [0, \dots, 0, x_{h+1}, \dots, x_n]$

p è omotopa a $id_{\mathbb{P}^n \setminus H}$; infatti è $F(x,t) = [tx_0, \dots, tx_h, x_{h+1}, \dots, x_n]$

• $f : X \to Y$ continua

$r : X \to x_0$ retrazione per deformazione

$\Rightarrow f \sim$ mappa costante

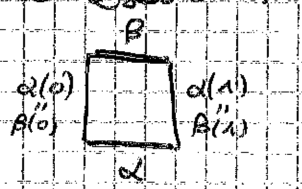
DIM: $f = f \circ id_X$ $\quad F$ omotopia tra id_X e r

$f \circ F$ è un'omotopia tra f e $x \to f(x_0)$

(Se X contrattile, allora $f \sim$ costante
Se Y contrattile a y_0 e c'è un punto y_1 di $f(X)$ tale che $\Omega(Y, y_0, y_1) \neq \emptyset$
$\Rightarrow f$ è omotopa $X \to y_0$)

Def: Se $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ con gli stessi estremi $\left(\begin{matrix}\alpha(0) = \beta(0)\\ \alpha(1) = \beta(1)\end{matrix}\right)$
allora sono omotopi se esiste $F : I \times I \to X$

$F : \square \to X$



$F(t,0) = \alpha(t)$
$F(~~t~~,1) = \beta(t)$
$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0)$
$F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1)$

È una relazione di equivalenza
in $\Omega(X, \alpha(0), \alpha(1))$

Dunque $\Omega(X, x_0, x_0)/_\sim$ con l'operazione $*$ ha:

- la proprietà associativa
- l'identità 1_{x_0} $\qquad 1_{x_0} * \alpha = \alpha * 1 = \alpha$
- l'inverso $i(\alpha) = \alpha^{-1}$

Dunque è un gruppo chiamato $\pi_1(X, x_0)$

Se $x_1 \in A_{x_0}$ (componente connessa per archi) e scegliamo $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_1)$

$$\begin{aligned}\pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{\gamma_\#} \pi_1(X, x_1)\\ [\alpha] &\longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma]\end{aligned}$$

è un isomorfismo con inverso $i(\gamma)_\#$

• $f : X \to Y$ $\quad f$ continua $\quad f(x_0) = y_0 \in Y$

allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ omomorfismo di gruppi

$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

• Siano $f, g : X \to Y$ omotope (e $f(x_0) = g(x_0)$)
(altrimenti sarebbero isomorfi)

allora $f_* = g_*$

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, shift left, "\gamma_\#"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr] & \\ & \pi_1(Y, g(x_0)) \arrow[u, shift left, "i(\gamma)_\#"] \end{tikzcd}$$

$\gamma(t) = F(t, x_0)$
$\uparrow$ omotopia tra f e g nel punto x_0

• Se X è contrattile a $x_0 \in X$ allora

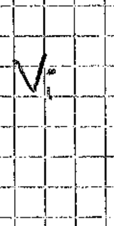
$$(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)} = (\text{mappa costante})_*$$

Dunque $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(\{x_0\}, x_0) \cong \{id\}$

• $\mathbb{R} \xrightarrow{e} S^1$ $\qquad$ (Dimostrazione che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$)
$t \longmapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) = e^{2\pi i t}$

$\forall u \in S^1 \quad e^{-1}(u) =$ successione u_n dove $|u_n - u_{n+1}| = 1$

Quindi se $u = 1 \quad e^{-1}(u) = \mathbb{Z}$



$\forall u \in S^1 \quad \exists\, \mathcal{U}_u$ aperto tale che $e^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} V_i$

tale che per ciascun $e^{-1}(u) \cap V_i = \{u_i\}$

$e|_{V_i} : V_i \to \mathcal{U}$ è omeomorfismo $\qquad$ Qualcosa non va

Considero $\pi_1(S^1, 1)$

Per compattezza di $[0,1]$ e lemma di Lebesgue posso prendere $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = 1$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\alpha \in \Omega(S^1, 1, 1) \qquad \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_i$
trivialmente

$\alpha([0,1]) \subseteq V_1$

U_0 la comp. conn. di $e^{-1}(V_1)$ che passa per $0 \in \mathbb{R}$

$\tilde{\alpha}|_{[0,t_1]} = e^{-1} \circ \alpha$ con $e^{-1} : V_1 \to U_0$

$\tilde{\alpha}(1)$ è un numero intero

Fatto fondamentale $\alpha \sim \beta$ in $\pi_1(S^1, 1) \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$

$$\pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[\alpha] \longmapsto \tilde{\alpha}(1)$$
$$[\alpha * \beta] \longmapsto \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)$$

iniettivo perché α va in cammino costante, che è omotopo a 0 quindi α era banale

GEOMETRIA II . LEZIONE 34

Def X è semplicemente connesso se
- è connesso per archi
- $\pi_1(X, a) = 0$

TEOREMA $\pi_1(X \times Y, (a,b)) \cong \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$

Dim: $\Omega(X \times Y, (a,b)) = \Omega(X, a) \times \Omega(Y, b)$

$$\underset{\alpha}{\cup} = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$F : I \times I \longrightarrow X \times Y$ $\quad F = (F_1, F_2)$

omotopia tra α e β

F_1 è omotopia tra α_1 e β_1

F_2 " " " α_2 e β_2

FUNTORIALITÀ DI π_1

$f : X \to Y$ cont.

$f_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$ omomorfismo di gruppi

$A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ non è detto che i_* sia iniettiva (ex. $A = S^1$, $X = \mathbb{R}^2$)

PERÒ
- Se A è un retratto di $X \Rightarrow i_*$ è iniettivo
- Se A è un retratto per deformazione $\Rightarrow i_*$ è isomorfismo

Dim: $\alpha \in \Omega(A, a, a)$ $\quad i_*[\alpha] = 0$

$F : X \times I \longrightarrow X$ omotopia tra $i_*[\alpha]$ e 1_a

Componendo F con la restrizione $r : X \to A$ t.c. $r|_A = id_A$ otteniamo un'omotopia tra α e 1_a

Se r è omotopo a id_X

$R : X \times I \longrightarrow X$ $\quad R(x,0) = r(x)$
$\quad R(x,1) = x$

$\beta \in \Omega(X, a, a)$

$F : I^2 \longrightarrow X$

$F(t,s) = R(\beta(t), s)$ è un'omotopia tra β e $r(\beta)$

$\Rightarrow i_*$ è surg.

OSS- $f, g : X \to Y$ omotope tra loro

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,a) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \pi_1(Y, f(a)) \arrow[d, "\gamma_\#"] \\
& \pi_1(Y, g(a))
\end{tikzcd}$$

Sia γ il cammino indotto dall' omotopia tra f e g $\Omega(Y, f(a), g(a))$
Allora il diagramma commuta con l' isomorfismo $\gamma_\#$

- $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ mappe tra insiemi

$g \circ f$ e $h \circ g$ sono bigettive $\Rightarrow$ f è bigettiva

Infatti
Poiché gf e hg sono iniettive $\Rightarrow$ f e g sono iniettive

Fissato $b \in B$ c'è un unico $a \in A$ tale che $g(f(a)) = g(b)$
Ma g è iniettiva $\Rightarrow f(a) = b$ $\Rightarrow$ f è surg.

TEOREMA $f : X \to Y$ equivalenza di omotopia, allora $\pi_1(X, a)$ e $\pi_1(Y, f(a))$ sono isomorfi.

DIM: $\exists g : Y \to X$ t.c. $fg \sim id_Y$
$gf \sim id_X$

$$\pi_1(X, a) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\cancel{X}, f(a)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(a))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, fgf(a))$$

$f_* g_*$ e $g_* f_*$ sono isomorfismi $\Rightarrow$ f_* è un isomorfismo

TEOREMA (DI VAN KAMPEN)

$X = A \cup B$ aperti connessi per archi : $A \cap B \neq \emptyset$

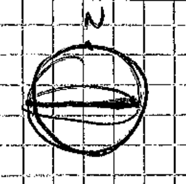
Sia $x_0 \in A \cap B$ e si conoscono $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$
allora si può calcolare $\pi_1(X, x_0)$

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A) \arrow[d, "b"] \arrow[dr, "\text{“immersione”}"] & \\
\pi_1(A \cap B) \arrow[ur, "a_*"] \arrow[dr, "b_*"'] & \pi_1(A) * \pi_1(B) \arrow[r, dashed, "f"] & \pi_1(X) \\
& \pi_1(B) \arrow[u] \arrow[ur, "\text{“immersione”}"'] &
\end{tikzcd}$$

Prodotto libero di gruppi: parole di lettere finite di A e B

1) f è surgettiva
2) Ker f si trova ~~trovando~~ i $\gamma \in \pi_1(A \cap B)$ tale che "immersione" a_* = "immersione" b_*

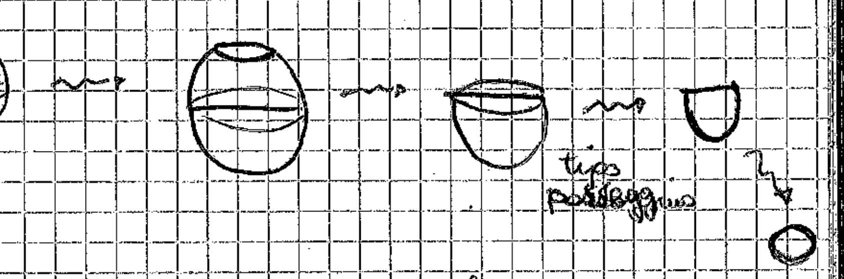
- $X = S^2 \cup \{\text{diametro}\}$



$A = X \setminus N$
$B = X \cap \left\{z > \frac{3}{4}\right\}$

$\pi_1(B) = 0$
$\pi_1(A \cap B) = \pi_1(\text{calotta senza un punto interno}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$\pi_1(A) = ?$



$\wr$

$\pi_1(A) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathbb{Z} * 0 = \mathbb{Z}$ va in $\pi_1(X)$ surgettivamente

troviamo il Ker :

Sia γ il generatore di $\pi_1(A \cap B)$
$b_*([\gamma]) = 0$ $a_*([\gamma]) = 0$ perché lo scelgo sotto

$\Rightarrow$ Ker è banale $\Rightarrow \pi_1(X) = \mathbb{Z}$

- S^n $n \geq 2$ è semplicemente connesso

$A = S^n \setminus \{N\}$ $N = (0, \dots, 0, 1)$
$B = S^n \setminus \{S\}$ $S = (0, \dots, 0, -1)$

Sia A che B sono sempl. connessi $(\cong \mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow \pi_1(S^n) = 0$

GRUPPO FONDAMENTALE DEGLI SPAZI PROIETTIVI

TEOREMA $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è sempl. connesso $\forall n$

DIM:
$n = 0$ o $n = 1$ OK

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = A \cup B$ $A = (\mathbb{P}^n \setminus \text{iperpiano } H) \cong \mathbb{C}^n$
$B = \mathbb{P}^n \setminus \{P_0\}$ $P_0 \notin H$

B si retrae per deformazione su H ma $H \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$
H è sempl. connesso per ip. induttiva $\Rightarrow$ B è sempl. connesso
$A \cong \mathbb{C}^n \Rightarrow$ A è sempl. connesso.

$\pi_1(A \cap B) \cong \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \{P_0\}) \cong 0$

TEOREMA $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=1 \\ \mathbb{Z}/_{(2)} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$

$n=1$ $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \sim S^1$ $\Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

$n=2$ $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \underset{A}{\underset{\parallel}{(\mathbb{P}^2 \setminus r)}} \cup \underset{B}{\underset{\parallel}{(\mathbb{P}^2 \setminus \{P_0\})}} \qquad P_0 \notin r$$

$A \cong \mathbb{R}^2$ è sempl. connesso $\pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$

B si retrae per deformazione su $r \sim \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ ~~è sempl. connesso~~

$A \cap B \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$ si retrae per deformazione su S^1 $\Rightarrow \pi_1(A \cap B) = \mathbb{Z}$

Sia γ generatore di $\pi_1(A \cap B)$ (è una circonferenza intorno a P_0)

r generatore di $\pi_1(B)$

Allora $[\gamma] = 2[r]$

(c'è un'omotopia tra la circonferenza e la retta doppia)

(r è la retta all'infinito, intorno ha un Möebius; la circonferenza si spalma sul bordo del Möebius, che è lungo il doppio della pancia)

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

Per induzione $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ $\forall n \geq 2$

LEMMA: Nel thm di Van Kampen f è surg.

DIM: $\gamma : I \longrightarrow X = A \cup B$

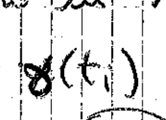
$\exists \delta$ tale che ogni intervallo di ampiezza $\leq \delta$ è contenuto o in $\gamma^{-1}(A)$ o in $\gamma^{-1}(B)$

$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$

$\gamma([t_i, t_{i+1}])$ è tutto in A o tutto in B

β_i è un arco che unisce $\gamma(t_i)$ con $x_0 \in A \cap B$

$i(\beta_i) * \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} * \beta_{i+1}$



$\Rightarrow \gamma \sim \gamma|_{[t_0,t_1]} * \beta_1 * i(\beta_1) * \gamma|_{[t_1,t_2]} * \beta_2 * \ldots * \beta_{n-1} * i(\beta_{n-1}) * \gamma|_{[t_{n-1},t_n]}$ * [illegible]

GEOMETRIA II - LEZIONE 35

- $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cup S^2$ t.c. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cap S^2 = \{P\}$

$\pi_1(X) = ?$

$A = S^2 \cup$ Disco su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$B = \mathbb{P}^2(\mathbb{R} \cup$ Calotta su S^2

$\pi_1(A) = 0$

$\pi_1(B) = \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ $\rightsquigarrow \pi_1(X) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

$\pi_1(A \cap B) = 0$

- $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/_C$ conica non degenere

$X = A \cup B$ $A = \mathbb{P}^2 \setminus D \cup$ Calotta di $D/_C$

$B = D/_C \cup$ un disco in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di centro $[C]$

$\pi_1(X) = \pi_1(B)$ B si retrae su un chiuso omeomorfo a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$= \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

<u>OSS</u>

- Se l'S^1 che si collassa è una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il quoziente è omeomorfo a S^2 $\Rightarrow \pi_1(X) = 0$
- $\mathbb{R}^2 \setminus$ un numero finito K di punti:

Se $K=1$; $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}) = \mathbb{Z}$

S^1 è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$

Se $K=2$ $\mathbb{R}^2 \setminus 2$ punti ha una figura omeomorfa a un wedge di 2 circonferenze ∞

$\pi_1(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$


$A =$
$B =$
si retraggono su S^1

Induzione:

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, \ldots, P_{K-1}\}) = \underbrace{\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{K \text{ volte}}$$

Se $P_0, \ldots, P_{K-1} \in$ Semipiano aperto H_+ $\Rightarrow \pi_1(H_+ \setminus \{P_0, \ldots, P_{K-1}\}) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, \ldots, P_{K-1}\})$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, \ldots, P_K\} = \underbrace{H_+ \setminus \{P_0, \ldots, P_{K-1}\}}_{A} \cup \underbrace{H_-' \setminus \{P_K\}}_{B'}$$

in modo che $H_+ \cap H_-'$ non contenga nessun P_j

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, \ldots, P_K\})$ è generato da $\pi_1(A) = \underbrace{\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{K \text{ volte}}$ e $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$

Essendo $\pi_1(A \cap B) = 0$ allora si ha la tesi.

- $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, allo stesso modo, è tale che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\ast} \mathbb{Z}$

  Questo si dimostra perché una parola di un gruppo (libero) è finita e sui finiti abbiamo dimostrato per induzione che funziona, e non essendoci relazioni (= Ker) sui finiti allora non ci sono neanche sugli infiniti

- Analogamente $\pi_1(\overset{n}{\underset{i=1}{W}} S^2) = 0$

  wedge

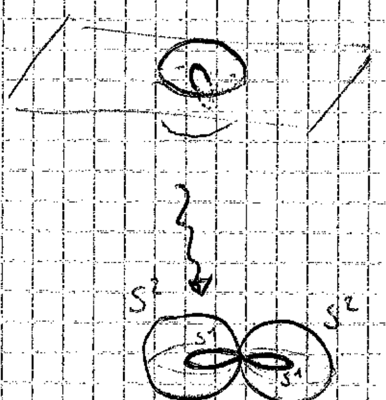
  Anche $\pi_1(\overset{\infty}{W} S^2) = 0$ Perché un laccio è immagine di $[0,1]$ quindi cpt.
  $\Rightarrow$ Passa da un numero finito di S^2 $\Rightarrow$ è omotopo a costante

- $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

  $X_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

  $X_2 = \{z = 0\}$

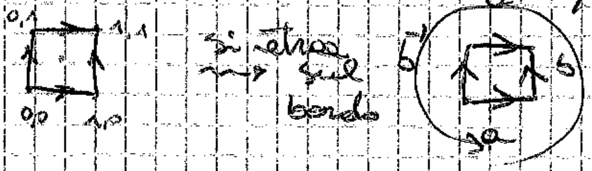
  $X_3 = \{y = 0,\ x^2 + z^2 = \frac{1}{2}\}$



  $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

- $\pi_1(S^1 \times S^1 \setminus \{P_0\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \pi_1(\overset{2}{W} S^1)$

  Lo posso vedere come $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a traslazioni intere



Mettere una toppa al buco (cioè rendere omotopo a costante il laccio intorno al punto) significa avere la relazione $aba^{-1}b^{-1} = 1$ cioè quozientare per il derivato, cioè si parte da $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e si rende abeliano facendolo diventare $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- $P(x_1, x_2, x_3)$ omogeneo di grado 2

  $V = \{[x_1, x_2, x_3] \mid P(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ luogo di zeri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

  $\pi_1(V) = ?$

  $V = \begin{cases} \text{quadrica vuota} & : \text{non ha } \pi_1 \\ S^1 & \pi_1 = \mathbb{Z} \\ \text{retta doppia} & \pi_1 = \mathbb{Z} \\ \text{coppia di rette} & \pi_1 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \end{cases}$

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$: $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ omo. di grado 2

V come sopra

$\pi_1(V) = \begin{cases} \text{non c'è} & \text{se } V = \text{quadrica vuota} \\ 0 & \text{se } V = S^2 \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \text{se } V = S^1 \times S^1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } V = \text{cono} \\ 0 & \text{se } V = 1 \text{ punto} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } V = \text{coppia di piani} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } V = \text{piano doppio} \\ \mathbb{Z} & \text{se } V = \text{retta doppia} \end{cases}$

(sarebbe ◎ toro strizzato)

rk = 4
rk = 4
rk = 4
rk = 3
rk = 2
rk = 1
rk = 2

GEOMETRIA III - LEZIONE 36

Def $f: X \to Y$ continua è omeomorfismo locale se $\forall x \in X$ esistono aperti $x \in A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $f|_A$ è omeomorfismo tra A e B.

OSS. Un omeo. loc. è :
- aperto
- fibra discreta

(se $x \in X$, $f(x) = y$ allora x ha un intorno aperto A tale che $A \cap f^{-1}(y) = x$)

Def Una sezione di $f: X \to Y$ continua è un'appl. $s: Y \to X$ che verifichi $f(s(y)) = y \ \forall y \in Y$ (continua? prob. no?)

LEMMA: $f: X \to Y$ continua e sia $s: Y \to X$ una sezione continua. Allora:
1) Y ha la top. quoziente
2) Se X è T_2 $s: Y \to X$ è un'immersione chiusa.

DIM: $\boxed{1}$ f è surg. (perché ha inversa dx/sx (non ricordo quale))

$A \subseteq Y$ t.c. $f^{-1}(A)$ aperto in X

$$\Downarrow$$

$$s^{-1}(f^{-1}(A)) = A \text{ è aperto}$$

$\boxed{2}$ s è certamente iniettiva

C chiuso in $Y \Rightarrow s(C)$ chiuso?

$s(C) = s(Y) \cap f^{-1}(C)$ Basta provare $s(Y)$ chiuso

$x \in s(Y)$ $x = s(f(x))$

$\{(a,b) \in X^2 \mid b = s(f(a))\}$ La diagonale Δ è chiusa in $\overset{2}{X \times X}$

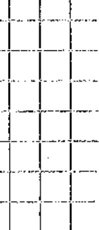
$s(Y) = g^{-1}(\Delta)$ con
$$\begin{aligned} g: X &\longrightarrow X \times X \\ x &\longmapsto (x, s(f(x))) \end{aligned}$$

Dunque è chiuso perché X è T_2

Esempio:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "{(\varphi, id)}"] \arrow[r, "\varphi"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

$t \qquad (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$



Ma non esiste una sezione continua di $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to S^1$ perché non esistono $s: S^1 \to \mathbb{R}$ iniettive continue

Def $p: E \to X$ è un rivestimento se $\forall x \in X$ esiste un aperto $V \ni x$ tale che $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ con queste proprietà:
1) $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$
2) $p|_{U_i}: U_i \longrightarrow V$ è omeo.

aperto banalizzante

Esempio: $e^{2\pi i t} = \cos 2\pi t + i \,\text{sen}\, 2\pi t$

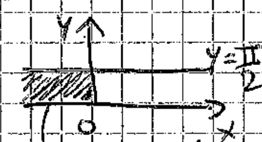
$e^{2\pi z} = e^{2\pi x}(e^{2\pi i y})$

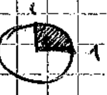
$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ vediamo che è un rivestimento

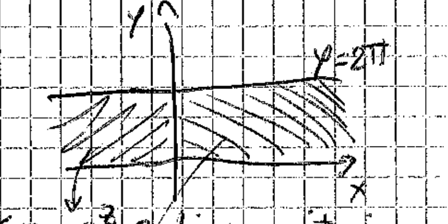
e^z è funzione periodica di periodo $2\pi i$

$e^z = e^x(\cos y + i \,\text{sen}\, y)$

Restringiamoci a $0 < y < \frac{\pi}{2}$



Per $x<0$ $e^z =$ 



Per $x<0$ $e^z \in$ disco unitario

Per $x>0$ $e^z \notin$ disco unitario

L'esponenziale porta strisce aperte di altezza θ in settori aperti V d'ampiezza θ.

Se $\theta < 2\pi$ e V è un settore di ampiezza θ ($\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$)

allora V è un aperto banalizzante

$$e^{-1}(V) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{\theta_1 + 2\pi m < y < \theta_2 + 2\pi m\}$$

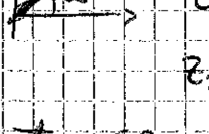
(le funzioni inverse, fissato un angolo)

Sia $w = \rho(\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta)$ i logaritmi di w hanno la forma

$\log \rho + i\theta + 2K\pi$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

$\varphi_2^{-1}(w)$ sono i 2 numeri complessi z_1, z_2 tali che $z_i^2 = w$ $\quad z_1 = -z_2$



$z_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i \,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right)$

$z_2 = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)\right)$

φ_2 è aperta (lo è vista da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, quindi anche restringendola)

Gli aperti banalizzanti sono gli aperti abbastanza piccoli tali che le controimm. sono aperti disgiunti

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI UN RIVESTIMENTO

$p: E \to X$ rivestimento, X connesso.

1) p è omeo. locale (quindi aperta e fibre discrete)

2) Tutte le fibre hanno la stessa cardinalità

3) $Y \subseteq X$ è connesso allora $p|_{p^{-1}(Y)} \; p^{-1}(Y) \to Y$ è ancora un rivestimento

DIM: $\boxed{2}$ Sia $x_0 \in X$ $\quad A_{x_0} = \{x \in X \mid \# p^{-1}(x_0) = \# p^{-1}(x)\}$

Se $V \subseteq X$ è aperto banalizzante

$\Rightarrow V \subseteq A_{x_0}$ oppure $V \cap A_{x_0} = \phi$

$\Rightarrow A_{x_0}$ aperto e chiuso e $\neq \phi$ $(x_0 \in A_{x_0})$ $\Rightarrow A_{x_0} = X$

$\boxed{3}$ V aperto banalizzante di y in X $(y \in Y)$

$\Rightarrow V \cap Y$ è un aperto banalizzante per Y

$$p^{-1}(V \cap Y) = p^{-1}(V) \cap p^{-1}(Y) = \bigcup_{i \in I} U_i \cap p^{-1}(Y) \quad \text{ok.}$$

Def Chiamiamo rivestimento di grado d un riv. con fibre di cardinalità d (esempio riv. compatti)

PROBLEMA

Se X è compatto e $p: E \to X$ è un rivestimento di grado d, lo spazio E è compatto?

$\{A_i\}$ ric. aperto di E $\quad \{p(A_i)\}$ è ric. aperto di X

$p(A_i) = \bigcup_j V_{ij}$ dove V_{ij} è aperto banalizzante

Se considero $\forall V_{ij}$ le comp. connesse di $p^{-1}(V_{ij})$ queste formano un ricoprimento di E che è un raffinamento

X è cpt. $\Rightarrow$ C'è un numero finito di (i,j) t.c. $\bigcup_{(i,j)} V_{ij} \supseteq X$

cioè $X \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_t \quad \Rightarrow E =$ Unione di $d \cdot t$ aperti ciascuno dei quali è contenuto in un A_i

Quindi trovo $d \cdot t$ tra gli A_i che ricoprono E.

E connesso (e dunque X connesso)

LEMMA: Se $p: E \to X$ è riv. connesso $e \in E$ e V aperto banalizzante contenente $p(e)$.

Allora $\exists$ sez. continua $S_e : V \to p^{-1}(V)$, $\; p(e) \mapsto e$ $\quad$ Se V è connesso allora S_e è unica.

DIM: $e \in p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$

$e \in U_j \qquad S_e = p|_{U_j} \quad \Rightarrow S_e(p(e)) = e$

Se $u: V \to U_i$ un'altra sezione che verifica le stesse condizioni

$u(V)$ è un connesso che passa per $e \Rightarrow$ l'unica sezione che fa così è S_e. (?)

- $p: E \to X$ rivestimento $\quad X$ $T_2 \Rightarrow E$ T_2

DIM: $e_1 \neq e_2 \in E$ se $p(e_1) = p(e_2) = x$

$V \ni x \quad p^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ disgiunti $(e_1 \in U_{i_1} \neq U_{i_2} \ni e_2)$

se $p(e_1) = x_1 \neq x_2 = p(e_2)$ allora $\exists$ aperti banalizz. $V_1 \ni x_1$, $V_2 \ni x_2$

$\Rightarrow p^{-1}(V_1)$ e $p^{-1}(V_2)$ sono aperti disgiunti che contengono risp. e_1, e_2

- $\left.\begin{array}{l} p_1 : E_1 \to X_1 \\ p_2 : E_2 \to X_2 \end{array}\right\}$ rivestimenti $\Rightarrow (p_1, p_2) : E_1 \times E_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento

- Esercizio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado d con d radici reali distinte

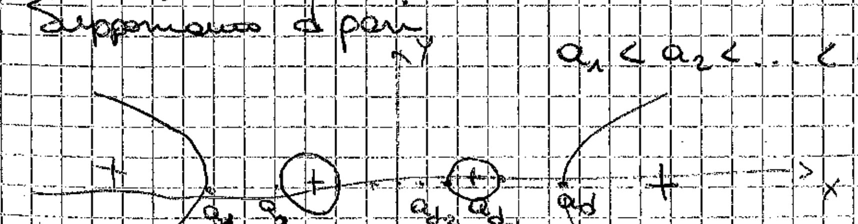
$$X = \{y^2 = p(x)\} \begin{array}{l} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \subseteq \mathbb{C}^2 \end{array}$$

1) Quante comp. connesse ha $X \subseteq \mathbb{R}^2$?

2) $X \setminus \{(\alpha_1, 0), \ldots, (\alpha_d, 0)\} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_d\}$ è rivestimento

radici di $p(x)$ $\qquad (x,y) \mapsto x$

$\boxed{1}$ Supponiamo d pari $\qquad a_1 < a_2 < \ldots < a_d$



Per d dispari è uguale

$\Rightarrow \frac{d}{2} + 1$ comp. conn. $\qquad \Rightarrow \frac{d+1}{2}$ comp. conn.

$$\begin{tikzcd} \boxed{2} \; X \setminus \{\ldots\} \arrow[d] & \mathbb{C}^* \arrow[d] \\ \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_d\} \arrow[r] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

GEOMETRIA II _ LEZIONE 37

- $$\begin{tikzcd} S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \arrow[d, "\text{rivestimento}"] \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

- $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0$

  $n=1$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 0$

  $n \Rightarrow n+1$

  $A = (\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \text{iperpiano}) \cong \mathbb{C}^n$

  $B = (\text{iperpiano} \cup \text{qualcosina}) \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$

  $\pi_1(A) = \pi_1(B) = 0 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0$

- Riprendendo la dim di $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$:

  $\mathcal{C} = \{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0\}$

  Vediamo chi è $[\mathcal{C}]$ in $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$

  $\varphi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \{x_0 = 0\}$ è un rivestimento di grado 2.

  $\varphi_*[\mathcal{C}] = 2\gamma$ con γ generatore di $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$

  φ_* porta $\mathbb{Z}$ in $2\mathbb{Z}$ e quindi in $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ $2\gamma = 0$

PROPOSIZIONE: $p : E \to X$ omeo. locale, E, X connessi e T_2, E compatto. Allora p è un rivestimento finito.

DIM: 1- p è aperto

2- p è chiuso perché p continua da cpt a T_2

3- p è aperta e chiusa $\Rightarrow p(E)$ aperto e chiuso $\Rightarrow p(E) = X$ (p surg.)

4- La fibra è discreta $\Rightarrow$ finita

(altrimenti (contrimmagine di chiuso è cpt) avrei ric. aperto (i punti intersecati gli aperti) infinito)

5- Fissiamo $x \in X$, $e \in p^{-1}(x)$

esiste U_e aperto intorno di e

ed esiste V_x aperto intorno di x tali che $p|_{U_e} : U_e \to V_x$ omeo

E è T_2 e $p^{-1}(x)$ è finito. Possiamo supporre $U_e \cap U_{e'} = \emptyset$

$e, e' \in p^{-1}(x)$ $\quad V_x' = \bigcap_{e \in p^{-1}(x)} p(U_e)$ questo è l'aperto banalizzante

- Se X è compatto, connesso e T_2 e $p: E \to X$ è un rivestimento finito allora E è compatto

Def $G < \mathrm{Omeo}(E)$. G agisce in modo propriamente discontinuo se $\forall x \in E \ \exists \mathcal{U}_{\ni x}$ aperto tale che $g(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset \ \forall g \in G \ g \neq id_E$

TEOREMA: Se G agisce in modo propriamente discontinuo su E allora $p: E \to E/_{G}$ con la top quoziente è un rivestimento
$\leftarrow$ connesso

DIM: • p è aperta: $p^{-1}(p(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A)$ aperto $\Rightarrow p(A)$ aperto
A aperto

• $e \in E$, $\mathcal{U}$ l'aperto $\ni e$ dell'ipotesi

$$p^{-1}(p(\mathcal{U})) = \bigcup_{g \in G} g(\mathcal{U}) \text{ aperti disgiunti}$$

Perché $g(\mathcal{U}) \cap h(\mathcal{U}) = h(h g(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}) \overset{\shortparallel}{\emptyset}$

$$\Rightarrow p|_{g(\mathcal{U})} : g(\mathcal{U}) \to p(\mathcal{U}) \text{ è omeo. locale}$$

- Condizione sufficiente perché l'azione di G sia propr. discontinua:

PROPOSIZIONE: E è T_2. $G < \mathrm{Omeo}(E)$. Se $g(e) \neq e \ \forall e \in E \ \forall g \neq id_E$
(l'azione è libera) e se $\forall e \in E \ \exists \mathcal{U} \ni e$ tale che
$\mathcal{U}$ incontra solo un # finito di $g(\mathcal{U})$.
$\Rightarrow$ l'azione è propriamente discontinua.

DIM: $e \in E$ $\ \mathcal{U} \ni e$ che incontri # finito di $g(\mathcal{U})$
Siano $g_1, \dots, g_n$ con $g_1 = id$
$e = g_1(e), \dots, g_n(e)$ sono tutti distinti
E è $T_2 \Rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ intorni disgiunti con $g_i(e) \in \mathcal{U}_i$

$$e \in V = \mathcal{U} \cap g_1^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap \dots \cap g_n^{-1}(\mathcal{U}_n)$$

$$V \cap g(V) \subseteq \mathcal{U} \cap g(V) = \emptyset \quad \text{per } g \neq g_1, \dots, g_n$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad V \cap g_i(V) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i = \emptyset$$

-

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "e"] \arrow[d, "p"] & S^1 \times S^1 \arrow[dl, leftrightarrow, "\cong"] \\
\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2} &
\end{tikzcd}$$

$(t, u) \longmapsto ((\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), (\cos 2\pi u, \operatorname{sen} 2\pi u))$

rivestimento prendendo $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$
traslazioni intere

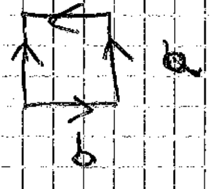
Quindi $S^1 \times S^1$ è rivestito da $\mathbb{R}^2$ rispetto ad un'azione propr. discontinua

- $G = \langle a, b \rangle$ $\quad a(x, y) = (x+1, 1-y)$
$\quad b(x, y) = (x, y+1)$

$$bab(x, y) = ba(x, y+1) = b(x+1, -y) = (x+1, 1-y) = a(x, y)$$

$\Rightarrow bab = a$ $\qquad g \in G \quad g(x, y) = (x+m, (-1)^n y + m)$

$$\mathbb{R}^2/_{G} \cong [0,1]^2/_{G}$$



$baba^{-1} = id$
Bottiglia di Klein

GEOMETRIA II - LEZIONE 38

Problema:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

rivestimento

continua

$\exists g$ sollevamento continuo tale che $pg = f$?

NON SEMPRE

Es.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[ur, dashed, "\times" marking] \arrow[r, "id"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

PRODOTTO FIBRATO

$p: E \to X$ rivestimento

$$E \times_X E := \{(e_1, e_2) \in E \times E \mid p(e_1) = p(e_2)\} \qquad \Delta \subseteq E \times_X E$$

PROPOSIZIONE: Δ è aperto e chiuso in $E \times_X E$.

DIM: Sia $(e,e) \in \Delta$ $\quad x = p(e)$

$\exists U$ aperto $e \in U$ e $p|_U : U \to V$ è omeo.
$\exists V$ aperto $x \in V$

$U \times U \cap E \times_X E$ intorno aperto di (e,e)

$\qquad \shortparallel \qquad\qquad p$ è iniettiva su U

$\{(v,w) \in U \times U \mid p(v) = p(w)\} \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta$ è intorno di ogni suo punto

Sia ora $(u,v) \in E \times_X E \setminus \Delta$

$p(u) = p(v) = x$

$\exists A \ni u$ aperto $\quad p|_A : A \to V \ni x$ omeo

$\exists B \ni v$ aperto $\quad$ disgiunti $\quad p|_B : B \to V \ni x$ omeo.

$\Rightarrow A \times B \cap E \times_X E$ è intorno aperto di (u,v)

$\subseteq E \times_X E \setminus \Delta \Rightarrow \Delta^c$ è aperto

TEOREMA: $p: E \to X$ rivestimento $f: X \to Y$ continua, Y connesso

Se esistono g, h che sollevano f allora

$g(y) = h(y) \ \forall y \in Y \quad \vee \quad g(y) \neq h(y) \ \forall y \in Y$

DIM: $\Phi : Y \to E \times_X E$

$y \mapsto (g(y), h(y))$ $\leftarrow$ stanno nel prodotto fibrato perché $p(g(y)) = p(h(y)) = f(y)$

$\{y \in Y \mid g(y) = h(y)\} = \Phi^{-1}(\Delta) = \left\langle \begin{matrix} \emptyset \\ Y \end{matrix} \right.$ perché Y è connesso

OSS. Se $f(y) = x$ e $p(e) = x$ allora esiste al più 1 sollevamento g di f tale che $g(y) = e$

TEOREMA $p: E \to X$ rivestimento $\quad \alpha: I \to X$ cammino

$\alpha(0) = x$ e $p(e) = x$

Allora $\exists$ unico cammino $\alpha_e : I \to E$

$\alpha_e(0) = e$

DIM: L'unicità è data dall'osservazione

Poiché gli aperti trivializzanti ricoprono X, per Lebesgue $\exists$ suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ di I e aperti trivializzanti $V_0, \dots, V_{n-1}$ tali che $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_i$ $\forall i = 0, n-1$

$\alpha(0) = x$ c'è aperto $U_0 \ni e$ tale che $p|_{U_0} : U_0 \to V_0$ è omeo.

$s_0 = (p|_{U_0})^{-1} \quad \alpha_e(t) = s_0(\alpha(t))$ per $0 \leq t \leq t_1$

$\alpha(t_1) \in V_0 \cap V_1$

$\alpha_e(t_1) \in U_0 \cap U_1$ con U_1 l'aperto di $p^{-1}(V_1)$ che passa per $\alpha_e(t_1)$

Dunque $\alpha_e(t_1) = s_0(\alpha(t_1)) = s_1(\alpha(t_1))$

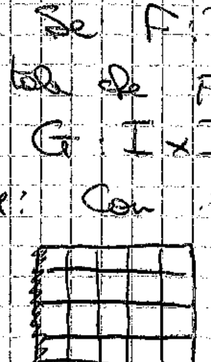
Analogamente $\alpha_e(t) = s_j(\alpha(t))$ per $t_j \leq t \leq t_{j+1}$

e così costruisco α_e

OSS. α potrebbe essere chiuso ($\alpha \in \Omega(X, x, x)$), quindi potrebbe essere $V_0 = V_{n-1}$. Però $U_0 \ni e$, $U_{n-1} \ni \alpha_e(t_{n-1})$, perciò potrebbero non essere uguali.

TEOREMA: Se $F: I \times I \to X$ è continua, $F(0,0) = x \in X$ e $e \in E$ è tale che $p(e) = x$. Allora esiste un unico sollevamento $G: I \times I \to E$ t.c. $pG = F$ e $G(0,0) = e$

DIM: Con lo stesso ragionamento suddividiamo



$0 = t_0 < \dots < t_n = 1$

$0 = s_0 < \dots < s_n = 1$

$F([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) = V_{ij}$

La costola sx-basso del quadrato

LEMMA: $F: I \times I \to X$. Se $F(I \times I) \subseteq V$ aperto trivializzante e $f: \{(s,t) \in I \times I \mid st = 0\} \to E$ è un sollevamento di $F|_L$ allora F si solleva tramite G...

DIM: U aperto di E che contiene $e = f(0,0)$ tale che $p|_U : U \to V$ sia omeo.

$s = (p|_U)^{-1} \quad F(0,0) = x \in X \quad f(0,0) = e \quad pf = F|_L \Rightarrow p(e) = x$

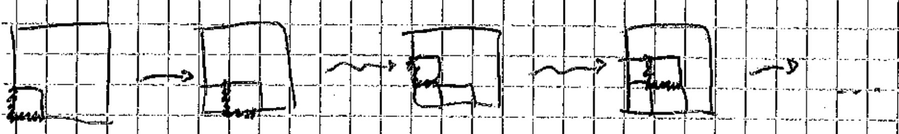
$\Rightarrow spf = sF|_L$ è il sollevamento G di F

Passo 1: Costruisco G su $[t_0, t_1] \times [s_0, s_1]$

$\alpha = F(t,0) \quad \beta = F(0,s)$

$\alpha_e(t) \cup \beta_e(s)$ sollevamento di $\alpha \cup \beta$ su $\{ts = 0\}$

A questo punto si continua lavorando sulla $\angle$



TEOREMA $p : E \longrightarrow X$ rivestimento

$F : I \times I \longrightarrow X \qquad \alpha : I \times \{0\} \longrightarrow E$

$$\begin{tikzcd} I \times \{0\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & X \end{tikzcd} \qquad \left(\Leftrightarrow p\alpha(t) = F(t,0) \right)$$

$G(t,0) = \alpha(t)$

Allora c'è sollevamento G unico che rispetta

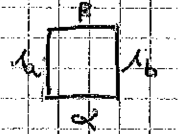
DIM: $p(\alpha(0)) = F(0,0) \Rightarrow$ c'è unico sollevamento G di F tale che $G(0,0) = \alpha(0) = e$

$G(t,0)$ e $\alpha(t)$ sono 2 sollevamenti di $F(t,0)$ che partono da e $\Rightarrow G(t,0) = \alpha(t)$

TEOREMA $p : E \longrightarrow X$ rivestimento $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ e $p(e) = a$

Sono equivalenti:

(✱)
1) $\alpha \sim \beta$
2) $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e α_e e β_e sono omotopi.

DIM. $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ $\quad F :$  $\longrightarrow X$

Se G è sollevamento di F con $G(0,0) = e$, allora $G(0,s)$ solleva 1_a a partire da e, dunque $G(1,s)$ solleva 1_b a partire da $\alpha_e(1)$ $\qquad G(0,s) = 1_e$

$G(1,0) = \alpha_e(1)$

$G(1,1) = \beta_e(1)$

$\Rightarrow G(1,s) = 1_{\alpha_e(1)} \Rightarrow \alpha_e(1) = \beta_e(1)$

e G è omotopia tra α_e e β_e in $\Omega(E, e, \alpha_e(1))$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ L'omotopia tra α e β è pG dove G è l'omotopia tra α_e e β_e

COROLLARIO Se E e X sono connessi per archi, $p : E \to X$ è un rivestimento e X è semplicemente connesso

Allora p è omeomorfismo

DIM Basta provare che p è iniettiva (un riv. è aperto e surg)

$p(e) = p(w) = x \quad E$ connesso per archi $\Rightarrow \exists \gamma : I \to E$
$\gamma(0) = e$
$\gamma(1) = w$

$p\gamma$ è un cammino chiuso in $\Omega(X, x, x)$

$\pi_1(X, x) = 0 \quad \Rightarrow p\gamma \sim 1_x$

$\Rightarrow \gamma$ è omotopo a 1_e ed ha gli stessi estremi di 1_e

$\Rightarrow w = e$

Esempio: $\{z^2 = xy\} = X \subseteq \mathbb{C}^3$

Nessun intorno di $(0,0,0)$ in X è omeomorfo a D^4 (o I^4) (o B^4 palla)

Infatti: $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$

$(u,v) \longmapsto (u^2, v^2, uv) \in X$

Visto da $\mathbb{C}^2$ in X è surg.

$\forall (u,v) \neq (0,0) \quad \begin{matrix} (u,v) \\ (-u,-v) \end{matrix} \longmapsto (u^2, v^2, uv)$ mentre $(0,0) \longmapsto (0,0,0)$

Dunque $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow X \setminus \{(0,0,0)\}$ è 2-1 omeom. locale

$\Rightarrow$ rivestimento di grado 2

Scelgo $U = \{|u| < r, |v| < r\} \quad V = \{|x| < r^2, |y| < r^2, |z| < r^2\}$

$U \setminus \{(0,0)\}$ riveste (a 2 fogli) $(X \setminus \{(0,0,0)\}) \cap V$

$\Rightarrow V \cap (X \setminus \{(0,0,0)\})$ non è semplicemente connesso

$\Rightarrow$ Un intorno non è omeomorfo a D^4

OSS. $p_* : \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(X, p(e))$ è iniettiva

Inoltre se $\gamma \in \Omega(E, e_1, e_2)$ e $p(e_1) = p(e_2)$

$$p_*(\pi_1(E, e_1)) = [p\gamma]^{-1} p_* \pi_1(E, e_2) [p\gamma]$$

GEOMETRIA II LEZIONE 39

- E, F, X loc. connessi per archi e connessi;

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} X \quad \text{continue e surg.}$$

Se gf è un rivestimento allora g e f sono rivestimenti

DIM: Sia $x \in X$ e $V \subseteq X$ aperto banalizzante con $x \in V$
conn. per archi

$gf|_U : U \to V$ omeomorfismo

Per $y \in V$ pongo $s(y) = f(\tilde{\gamma}_e(1))$ con γ arco tra x e y

(?)

TEOREMA DI BORSUK.

Non esistono $f: S^2 \to S^1$ continue tali che

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in S^2$$

DIM:

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[d] & & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[rru, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & S^1 \end{tikzcd}$$

Sia $h: S^2 \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) - g(-x)$
continua

$h(S^2)$ è connesso, quindi un convesso (siamo in $\mathbb{R}$)

Dunque posso prendere

$$\frac{1}{2}h(y) + \frac{1}{2}h(-y) = \frac{1}{2}\left(\cancel{g(y)} - \cancel{g(-y)} + \cancel{g(-y)} - \cancel{g(y)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \text{ tale che } h(x_0) = 0 \Rightarrow g(-x_0) = g(x_0) \Rightarrow f(-x_0) = f(x_0) \neq -f(x_0)$$

COROLLARIO 1 $\forall g: S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua c'è $x \in S^2$ tale che
$$g(x) = g(-x)$$

Vale in gen. $S^n \to \mathbb{R}^n$

DIM: Definendo $f(x) = \dfrac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$, f violerebbe Borsuk.
se $g(x) \neq g(-x)$ $\forall x$

COROLLARIO 2: Se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto (non vuoto), non esistono funzioni continue iniettive da A in $\mathbb{R}^2$ (Vale anche per $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$).

DIM: $A \supseteq S^2$ ← una qualche S^2

COROLLARIO 3: Borsuk vale anche per $f: D^2 \to S^1$

DIM: Considero D^2 come disco diametrale di S^2

Sia $g: S^2 \to S^1$
tale che
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D^2 \cap S^2 \\ -f(-\pi(x)) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
proiezione sul disco

Se fosse $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D^2$ allora la stessa cosa varrebbe anche per g, contraddicendo Borsuk.

COROLLARIO 4: S^1 non è un retratto di D^2.

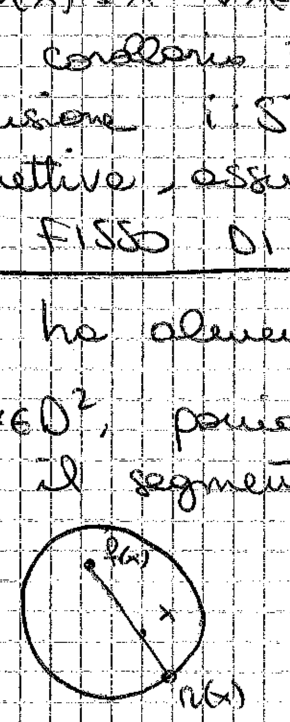
DIM: Avremmo $r(x) = x$ $\forall x \in S^1$ ovvero saremmo nelle ipotesi del corollario 3.

OPPURE: DIM: L'inclusione $i: S^1 \hookrightarrow D^2$ indurrebbe una i_* iniettiva, assurdo. ($\pi_1(D^2) = 0$)

TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER.

Ogni $f: D^2 \to D^2$ ha almeno un punto fisso.

DIM: se $f(x) \neq x$ $\forall x \in D^2$, poniamo $r(x)$ l'intersezione tra ∂D^2 e il segmento tra x e $f(x)$ dalla parte di x



Se r è continua (e lo è), sarebbe una retrazione di D^2 su S^1.

OSS. Interpretazione fisica. • in ogni istante, sulla Terra, esistono due punti antipodali con la stessa pressione e la stessa temperatura (COROLL. 1)

THM. COCOMERO

• Esiste un piano, dato un cocomero, che tiene dalle 2 parti lo stesso quantitativo di polpa e semi

DIM: Fisso un punto C nel cocomero (lo pongo "l'origine")

$\forall y \in S^2$ "buccia cocomero" definisco $f(y) = (P_+ - P_-, S_+ - S_-)$

polpa nel semipiano $\perp \vec{Cy}$ "positivo" (pr. scal.)

semi [. .]

Per corollario 1 c'è punto ~~[illegible]~~ $y \in S^2$ t.c. $(P_+ - P_-, S_+ - S_-) = (P_- - P_+, S_- - S_+) \Rightarrow f(y) = (0,0)$

THM. PANINO AL PROSCIUTTO

- $\forall A, B, C \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti limitati $\exists$ piano che divide in parti di ~~volume~~ uguale ogni aperto

DIM: Simile al cocomero: $\forall x \in S^2$ esiste un piano di giacitura $\perp \vec{x}$ che biseca A (Teorema Valore intermedio ~)

Sia quindi $f(x) = (B_+, C_+)$

parte positiva rispetto al piano scelto prima

stessa cosa ma per C

(Coroll. 1)

Per Borsuk $\exists x : f(x) = f(-x)$ $\Rightarrow$ $\exists$ piano che biseca tutti e 3

$\overset{\shortparallel}{(B_+, C_+)}$ $\overset{\shortparallel}{(B_-, C_-)}$

$\hookrightarrow$ Si generalizza in: n aperti in $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\exists$ iperpiano...

- $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ chiusi. Allora almeno uno dei 3 contiene 2 punti antipodali

DIM: Ponendo $B_i = -A_i$, se fosse $B_1 \cap A_1 = \emptyset$ e $B_2 \cap A_2 = \emptyset$ allora definisco $S^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$$x \longmapsto \left(\frac{d(x, A_1)}{d(x, A_1) + d(x, B_1)}, \frac{d(x, A_2)}{d(x, A_2) + d(x, B_2)} \right)$$

Dunque, essendo continua, $\exists x$ t.c. $f(x) = f(-x)$.

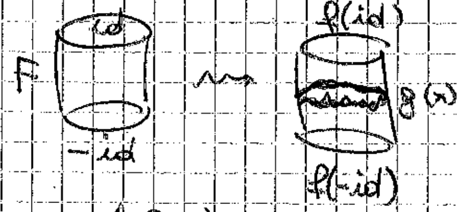
Se $x \in A_1$, $f(x) = (0, \text{roba})$ Analog. se $x \in A_2$

$f(-x) = (\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\cancel{\text{roba}}}}, \text{altra roba})$

$\Rightarrow x \in A_3$ e anche $-x \in A_3$ per lo stesso motivo

- Se f, g $S^1 \to S^1$ continue tali che $f(x) \neq g(x)$ $\forall x$ allora $f \sim g$

DIM: Essendo $id \sim -id$ (rotaz. 180°)



OPPURE: $\frac{t f(x) + (1-t) g(x)}{\| t f(x) + (1-t) g(x) \|}$ ...

o meglio: Se $g(x) \neq f(x)$ allora $g \sim -f$ (non essendo mai antipodali)

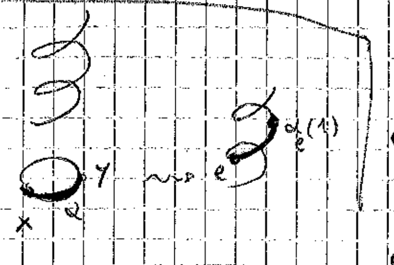
Ma $f \sim -f$ $\Rightarrow g \sim f$

MONODROMIA

Sia $p : E \to X$ rivestimento (E loc. conn. per archi)

$x, y \in X$; si dice monodromia

$$\begin{aligned} Mon : p^{-1}(x) \times \Omega(X, x, y) &\longrightarrow p^{-1}(y) \\ (e, \alpha) &\longmapsto \alpha_e(1) \end{aligned}$$



OSS. Se $\alpha \sim \beta$ allora $Mon(\alpha) = Mon(\beta)$

In particolare, $p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x)$ ci fornisce un'azione di $\pi_1(X, x)$ sulla fibra $p^{-1}(x)$, dove:

- 1_x agisce come l'identità
- $[\alpha]^{-1}$ agisce come l'inversa di $[\alpha]$
- $[\alpha\beta]$ agisce come composizione: $(\alpha * \beta)_e(1) = \beta_{\alpha_e(1)}(1)$ (agisce prima α e poi β; azione destra)

Si dice azione di Monodromia.

Notazione: $Mon(e, [\alpha]) = e \cdot [\alpha]$

$e[\alpha][\beta] \underset{def}{=} (e[\alpha])[\beta]$

TEOREMA: Se $p : E \to X$ rivestimento connesso con X connesso per archi $e \in E$, $x = p(e)$, allora:

① $p_* : \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ è iniettiva.

② $p_*(\pi_1(E, e)) = \{ [\alpha] \in \pi_1(X, x) \mid \alpha_e(1) = e \} = \{ [\alpha] \in \pi_1(X, x) \mid \alpha_e \text{ è chiuso} \}$

③ gli elem. di $p^{-1}(x)$ sono in bigezione con le cl. laterali dx di $p_*(\pi_1(E, e))$

④ $\forall [\alpha] \in \pi_1(X, x)$ $[\alpha]^{-1} p_*(\pi_1(E, e))[\alpha] = p_*(\pi_1(E, e[\alpha]))$

DIM: $\boxed{1}$ Già visto.

$\boxed{2}$ Già visto.

$\boxed{3}$ Se $\pi_1(X, x)$ agisce su $p^{-1}(x)$, allora $[\alpha]$ agisce su e come $e \cdot [\alpha] = \alpha_e(1)$. Al variare di α, $\alpha_e(1)$ percorre tutta la fibra (grazie alla conn. per archi), e dunque $e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta] \Leftrightarrow [\alpha][\beta]^{-1} \in p_*(\pi_1(E, e))$ $\Leftrightarrow [\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e))[\beta]$

$\boxed{4}$ $\alpha_e(1) \cdot ([\alpha]^{-1} p_*([\gamma])[\alpha]) \in p_*(\pi_1(E, e[\alpha]))$

__COROLLARIO__ $|p^{-1}(x)|$ = indice del sgr. $p_*(\pi_1(E,e))$ all'interno di $\pi_1(X, \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{p(e)})$

OSS. $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/_{(2)}$ per $n \geq 2$

Infatti:

$$\begin{tikzcd} S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "p"'] \\ \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

p rivestimento a 2 fogli, S^n sempl. connesso

$\Downarrow$

$\pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ (0 ha indice 2)

GEOMETRIA III LEZIONE 40

- $E \longrightarrow X$ $\quad \pi_1(X, x)$ agisce sulla fibra $p^{-1}(x)$

$$\underset{\underset{E \times \pi_1(X,x)}{\cap}}{e, [\alpha]} \longmapsto e \cdot [\alpha] = \alpha_e(1)$$

__PROPOSIZIONE:__

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[r, "f_*"', phantom, shift right=2] & Y \end{tikzcd}$$

Mon $\uparrow$

Siano p, q rivestimenti, f continua. Supponiamo esiste φ che fa commutare il diagramma.

Allora $\varphi(e \cdot [\alpha]) = \varphi(e) \cdot f_*([\alpha])$

DIM: $\alpha \in \Omega(X, p(e), p(e))$

$e \cdot [\alpha] = \alpha_e(1)$

Sia β la composizione di α_e con φ

$\beta \in \Omega(F, \varphi(e), \varphi(\alpha_e(1)))$

$$q(\beta(t)) = q(\varphi(\alpha_e(t))) = f(p(\alpha_e(t))) = f(\alpha(t))$$

$\Rightarrow$ β è il sollevamento di $f\alpha$ a partire da $\varphi(e)$

$[q\beta] = f_*[\alpha] \qquad \Rightarrow \varphi(e) \cdot f_*[\alpha] = \varphi(e \cdot [\alpha])$

- $G < \text{Omeo}(\mathbb{R}^3)$

G generato da $x \longmapsto -x$. Allora il quoziente non è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

DIM: $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ riveste il quoziente $X \setminus \{[0]\}$ in modo doppio (2 fogli)

$\Rightarrow \pi_1(X \setminus [0]) \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ (perché $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = 0$ e il sgr. banale ha indice 2)

Quindi X e $\mathbb{R}^3$ non sono omeomorfi.

(altrimenti lo sarebbero anche $X \setminus [0]$ e $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$)

- $X \subseteq \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ $\qquad A \in X \quad \exists v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ t.c. $\quad A^1 = av$, $A^2 = bv$, $A^3 = cv$

$\nwarrow$ rango 1

Restringendoci ai v tali che $\|v\| = 1$ $(v \in S^2)$

$$\begin{tikzcd} S^2 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \arrow[r, "p"] & X \\ v, (a,b,c) \arrow[r, mapsto] & A \end{tikzcd}$$

$p^{-1}(A) = \{(v,a,b,c), (-v,-a,-b,-c)\}$

$(id, -id)$ agisce in modo propriamente discontinuo su

$S^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ $\Rightarrow$ p è rivestimento di grado 2.

$\pi_1(S^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})) = 0$ $\Rightarrow \pi_1(X) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

<u>Def</u> T insieme. G agisce su T a sinistra se

$$\begin{aligned} G \times T &\longrightarrow T \\ (g, t) &\longmapsto g \cdot t \end{aligned} \quad \text{tale che} \quad \begin{aligned} &① \ 1 \cdot t = t \\ &② \ (gh) \cdot t = g \cdot (h \cdot t) \end{aligned}$$

$L_g L_h = L_{gh}$ con $L : G \longrightarrow T \times T$

<u>Def</u> T insieme. H agisce su T a destra se

$$\begin{aligned} T \times H &\longrightarrow T \\ (t, g) &\longmapsto t \cdot g \end{aligned} \quad \text{tale che} \quad \begin{aligned} &① \ t \cdot 1 = t \\ &② \ t \cdot (gh) = (t \cdot g) \cdot h \end{aligned}$$

$R_g R_h = R_{hg}$ con $R : H \longrightarrow T \times T$

<u>Def</u> Un'azione dx e una sx sono compatibili se $\forall g \in G \ \forall t \in T \ \forall h \in H$

$$(g \cdot t) \cdot h = g \cdot (t \cdot h)$$

<u>Def</u> Un'azione è:

- <u>fedele</u>, se $\forall g \neq id \ \exists t$ tale che $g \cdot t \neq t$ (L o R è iniettiva)
- <u>libera</u>, se $\forall t \quad g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1(t) \neq g_2(t)$
- <u>transitiva</u>, se $\forall t, s \in T \quad \exists g \in G$ tale che $g \cdot t = s$

<u>PROPOSIZIONE</u>: T insieme, φ azione sx di G libera e transitiva, ψ azione destra di H. Se le 2 azioni sono compatibili ed $e \in T$, allora $\exists \Theta_e$ omo di gruppi $\Theta_e : H \longrightarrow G$ che ha per nucleo

$\operatorname{Ker} \Theta_e = \{h \in H \mid e \cdot h = e\}$. $\Theta_e(h)$ è l'unico g che porta e in $e \cdot h$

DIM: Θ_e è omo:

$$\Theta_e(hk) \cdot e = e \cdot (hk) = (e \cdot h) \cdot k = (\Theta_e(h) \cdot e) \cdot k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{compatibili}}}{=} \Theta_e(h) \cdot (e \cdot k) =$$

$$= \Theta_e(h)\Theta_e(k) \cdot e \qquad \underline{ok}$$

Il ker è ovviamente quello.

OSS. X spazio topologico $G < \text{Omeo}(X)$. $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$

$$\begin{aligned} C^0(X) \times G &\longrightarrow C^0(X) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

è un'azione destra.

- G agisce in modo propr. discontinuo ($G < \text{Omeo}(E)$)

$$E \xrightarrow[\text{riv.}]{p} E/_G = X \qquad e \in E \qquad p^{-1}(p(e)) = \text{Orb}_G(e)$$

Quindi l'azione è transitiva e libera sulle fibre.

<u>LEMMA</u>: L'azione sx di G su $p^{-1}(p(e))$ e l'azione dx di $\pi_1(X, p(e))$ su $p^{-1}(p(e))$ sono compatibili.

DIM: Sia $x = p(e)$ $g \in G$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[loop below, "id"] \end{tikzcd}$$

$$g(e \cdot [\alpha]) = g(e) \cdot \underset{\substack{\| \\ [\alpha]}}{id_*[\alpha]}$$

$\Downarrow$

le azioni sono compatibili

Allora per la prop. precedente $\exists \Theta_e : \pi_1(X, x) \longrightarrow G$ tale che $\Theta_e([\alpha])$ è l'unico g che porta e in $e \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_e(1)$

$$\Theta_e([\alpha]) \cdot e = \tilde{\alpha}_e(1)$$

<u>TEOREMA</u>: Θ_e è un omomorfismo di gruppi il cui nucleo è $p_*(\pi_1(E, e))$, che quindi è un sgr. normale di $\pi_1(X, x)$ che non dipende da e (rivestimento regolare)

Se E è connesso allora Θ_e induce un isomorfismo

$$\overline{\Theta}_e : \pi_1(X, x) \big/ p_*(\pi_1(E, e)) \longrightarrow G$$

<u>COROLLARIO</u>. Se E è semplicemente connesso $\pi_1(X, x) \cong G$

OSS. $\overline{\Theta}_e^{-1} : G \longrightarrow \pi_1(X, x) \big/ p_*(\pi_1(E, e))$

$$g \longmapsto [p\gamma] \quad \text{con} \quad \gamma \in \Omega(E, e, g(e))$$

GEOMETRIA II - LEZIONE 41

● $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$ $\quad \zeta \in \mu_n \quad D^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

gruppo moltiplicativo radici n-esime di 1 $\quad z \longmapsto (1-|z|)\zeta$

Γ_ζ è il grafico di questa appl. (sta in $\mathbb{C}^2$)

$\Gamma = \bigcup_{\zeta \in \mu_n} \Gamma_\zeta$ è sempl. connesso

Infatti: $D^2 \longrightarrow D^2 \times \mathbb{C} \supseteq \Gamma_\zeta$ è bigettiva e chiusa

$z \longmapsto (z, (1-|z|)\zeta)$ (funz. cont. da cpt a T_2)

$\Rightarrow$ è omeo $\Rightarrow \Gamma_\zeta \cong D^2$

Dove sono incollate tutte le Γ_ζ?

$$(z_1,(1-|z_1|)\zeta_1) = (z_2,(1-|z_2|)\zeta_2) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ \zeta_1 = \zeta_2 \end{cases} \vee \begin{cases} z_1 = z_2 \\ |z_1| = 1 \end{cases}$$

Quindi sono tutte incollate per il bordo

$\Rightarrow \Gamma$ è omotopicamente equivalente a un Wedge di S^2

$\Rightarrow \Gamma$ è sempl. connesso

μ_n agisce su Γ per moltiplicazione, l'azione è propr. disc.

Basta provare che è libera (il gruppo è finito)

Preso $z \in D^2$ • $|z| < 1$ $\quad (z,(1-|z|)\eta) \in \Gamma_\eta \subseteq \Gamma$

$\zeta \cdot \downarrow$ $\quad (\zeta z, (1-|z|)\eta\zeta)$ $\quad$ tutti punti distinti al variare di $\zeta \in \mu_n$

• $|z| = 1$ $\quad (z, 0) \in \Gamma$

$\zeta \cdot \downarrow$ $\quad (\zeta z, 0)$ $\quad$ al variare di $\zeta \in \mu_n$ tutti punti distinti

$\Rightarrow$ Posso dire che Γ/μ_n è rivestito da Γ

$\pi_1(\Gamma/\mu_n)$ è finito: infatti $\underset{0}{\underset{\|}{\pi_1(\Gamma)}} \xhookrightarrow{p_*} \pi_1(\Gamma/\mu_n)$ di indice finito

e $\pi_1(\Gamma/\mu_n) = \mu_n$

● $X_n = S^n \cap \{x_0^2 + x_1^2 < 1\}$ (viene $S^n \setminus$ cerchio massimo)

Per $n=2$ non è connesso

Per $n=3$ (S^3 è cpt.ficazione di Alexandrov di $\mathbb{R}^3$)

$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \Rightarrow S^3 \setminus$ cerchio max $= (\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}) \setminus (\{\infty\} \cup \underset{\{\infty\}}{\underset{\ni}{\text{cerchio}}})$

$\Rightarrow X_3 = \mathbb{R}^3 \setminus$ retta $\Rightarrow \pi_1(X_3) = \mathbb{Z}$

Per $n > 3$ con lo stesso ragionamento $\pi_1(X_n) = 0$

● $\{z^2 = x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ $\qquad X =$ cono $\setminus \{(0,0,0)\}$

$z = 0 \cap$ cono $= \{(0,0,0)\}$

Prendo il gruppo generato da

$$\begin{bmatrix} a(x,y,z) = (-x,-y,z) \\ b(x,y,z) = (x,y,-z) \end{bmatrix} \qquad G = \{id, a, b, \underset{-id}{\underset{\|}{ab}}\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

a conserva le componenti connesse, b le scambia

$X = \underset{z>0}{X_+} \cup \underset{z<0}{X_-}$ entrambe omeomorfe a $S^1 \times \mathbb{R}$

comp. connesse

Voglio vedere se $X/G \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$p_*|_{X_+}$ è riv. a 2 fogli di X/G

$p_*|_{X_-}$ è riv. a 2 fogli di X/G

} i riv. lavorano separatamente (lo sp. di partenza non è connesso)

Quindi: $X/G = {X/\langle b \rangle}/\langle \bar{a} \rangle = \overset{\overset{X_-}{\downarrow}}{X_+}/\langle \bar{a} \rangle \cong S^1 \times \mathbb{R}/\langle \bar{a} \rangle \cong \underset{S^1 \times \mathbb{R}}{\underset{\cong}{S^1/\langle \bar{a} \rangle \times \mathbb{R}/\langle \bar{a} \rangle}}$

$\Rightarrow X/G \cong S^1 \times \mathbb{R} \cong S^1 \times (0,+\infty) \underset{\text{polari}}{\cong} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

● $S^1 \times S^1 \xrightarrow{f} S^2$ continua

Γ_f grafico di f $\qquad \Gamma_f \subseteq S^1 \times S^1 \times S^2 \qquad X = S^1 \times S^1 \times S^2 \setminus \Gamma_f$

$\pi_1(X) = ?$

Poiché $\forall x \in S^1 \times S^1$, $S^2 \setminus f(x)$ è un $\mathbb{R}^2$ che quindi si contrae sulla base del cilindro $(S^1 \times S^1) \times S^2$, allora

$$\pi_1(X) = \pi_1(\text{Dominio}) = \pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z}^2$$

...tinua tale che $g(y_0) = e_0$, $pg = f$

... $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$

... $(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$ è necessaria

...stenza di g.

...: visto sopra

...te: ~~[illegible]~~

...ove costruire g tale che

1. $g(y_0) = e_0$
2. $\forall y \in Y \ \exists \alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$ tale che $f\alpha \in \Omega(X, x_0, f(y))$

Solleviamo $f\alpha \in \Omega(X, x_0, f(y))$ a partire da e_0

$(f\alpha)_{e_0}(1) =: g(y) \Rightarrow g(y) = e_0 \cdot [f\alpha]$

→ g non dipende dalla scelta di α: Sia $\beta \neq \alpha$ $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y$

$$f_*(\alpha * i(\beta)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$$

$$\Downarrow$$

$$f\alpha_{e_0}(1) = f\beta_{e_0}(1)$$

$$e_0 \cdot [f\alpha] = e_0 \cdot [f\beta] = g(y)$$

→ $pg = f$ per costruzione

→ g è continua: $w \in Y$ $g(w) \in A$ aperto in E

Voglio trovare $W \ni w$ tale che $g(W) \subseteq A$

$f(w) = p(g(w)) \in X$ esiste V banalizzante per $f(w)$ e U intorno aperto di $g(w)$ tale che $p|_U \, U \to V$ è omeo

In particolare p è omeo. in $U \cap A$

Allora c'è W aperto in Y che contiene w tale che $f(W) \subseteq p(U \cap A)$. Voglio dire che $g(W) \subseteq A$.

Posso supporre W connesso per archi: esiste arco α tra y_0 e w

$y_0 \in W$, $w \in W$ ⇒ esiste arco β tra w e y:

$$g(y) = e_0 \cdot [f(\alpha * \beta)] = (f\alpha)_{e_0} * (f\beta)_{f\alpha_{e_0}(1)} = \left(f\alpha_{e_0} * f\beta_{g(w)}\right)(1)$$

$(f\beta)_{g(w)}$ è tutto contenuto in $U \cap A$

$\Rightarrow g(y) = f\beta)_{g(w)}(1) \in U \cap A \subseteq A$ $(\forall y \in W)$ quindi g è continua

$SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \cdot {}^t\bar{A} = I, \det A = 1\}$

$n = 2$: $\det A = 1 \rightsquigarrow ad - bc = 1$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ${}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow \begin{cases} \bar{a}a + \bar{c}c = 1 \\ \bar{b}b + \bar{d}d = 1 \\ \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ con $|a|^2 + |b|^2 = 1$

$\Rightarrow SU(2, \mathbb{C}) \cong \{a, b \in \mathbb{C} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\} \cong S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$

$\Rightarrow \pi_1(SU(2, \mathbb{C})) = 0$ e $SU(2, \mathbb{C})$ è compatto

→ Sia $f: SU(2, \mathbb{C}) \longrightarrow S^1$ omomorfismo continuo, cioè $f(AB) f(B)^{-1} f(A)^{-1} = 1$

Allora f è banale

DIM!

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, +) \arrow[d, "e"] \\ (SU, \cdot) \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & (S^1, \cdot) \end{tikzcd}$$

Esiste sollevamento g (SU è sempl. conn.) che porta I in 0.

Vediamo che è un omomorfismo $g(AB) = g(A) + g(B)$

Sia $G: SU \times SU \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione ausiliaria

$(A, B) \longmapsto g(AB) - g(A) - g(B)$

Dico che è identicamente nulla: e è un omomorfismo di gruppi

$$eG(A, B) = F(A, B) = f(AB) f(B)^{-1} f(A)^{-1} = 1$$

$\Rightarrow$ G solleva F (che è costante) $\Rightarrow G \equiv 0$

$\Rightarrow g(SU)$ è sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ compatto, quindi limitato $\Rightarrow g \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 1$

$$\begin{tikzcd} & E \ni e_0 \arrow[d, "p"] \\ y_0 \in Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

$P(e_0) = x_0$

rivestimento

Y: connesso e loc. conn. per archi

X: connesso e loc. conn. per archi

Supponiamo $\exists g : Y \to E$ continua tale che $g(y_0) = e_0$, $pg = f$

Allora $f_* = p_* g_* \Rightarrow f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$

TEOREMA La condizione $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$ è necessaria e sufficiente per l'esistenza di g.

DIM: • Necessaria: visto sopra

• sufficiente:

Occorre costruire g tale che

1. $g(y_0) = e_0$
2. $\forall y \in Y \ \exists \alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$ tale che $f\alpha \in \Omega(X, x_0, f(y))$

Solleviamo $f\alpha \in \Omega(X, x_0, f(y))$ a partire da e_0

$(f\alpha)_{e_0}(1) =: g(y) \Rightarrow g(y) = e_0 \cdot [f\alpha]$

→ g non dipende dalla scelta di α: Sia $\beta \neq \alpha$ $\beta(0) = y_0$ $\beta(1) = y$

$$f_*(\alpha * i(\beta)) \subseteq P_*(\pi_1(E, e_0))$$

$$\Downarrow$$

$$f\alpha_{e_0}(1) = f\beta_{e_0}(1)$$

$$e_0 \cdot [f\alpha] = e_0 \cdot [f\beta] = g(y)$$

→ $pg = f$ per costruzione

→ g è continua: $w \in Y$ $g(w) \in A$ aperto in E

Voglio trovare $W \ni w$ tale che $g(W) \subseteq A$

$f(w) = p(g(w)) \in X$ esiste V trivializzante per $f(w)$ e U intorno aperto di $g(w)$ tale che $p|_U : U \to V$ è omeo.

In particolare p è omeo. in $U \cap A$

Allora c'è W aperto in Y che contiene w tale che $f(W) \subseteq p(U \cap A)$. Voglio dire che $g(W) \subseteq A$.

Posso supporre W connesso per archi: esiste arco α tra y_0 e w

$y_0 \in W$, $w \in W \Rightarrow$ esiste arco β tra w e y:

$$g(y) = e_0 \cdot [f(\alpha * \beta)] = (f\alpha)_{e_0} * (f\beta)_{f\alpha_{e_0}(1)} = \left(f\alpha_{e_0} * f\beta_{g(w)}\right)(1)$$

$(f\beta)_{g(w)}$ è tutto contenuto in $U \cap A$

$\Rightarrow g(y) = f\beta)_{g(w)}(1) \in U \cap A \subseteq A$ $(\forall y \in W)$ quindi g è continua

$SU(n, \mathbb{C}) = \{ A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \cdot {}^t\bar{A} = I, \det A = 1 \}$

$n = 2$: $\det A = 1 \rightsquigarrow ad - bc = 1$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ${}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow \begin{cases} \bar{a}a + \bar{c}c = 1 \\ \bar{b}b + \bar{d}d = 1 \\ \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ con $|a|^2 + |b|^2 = 1$

$\Rightarrow SU(2, \mathbb{C}) \cong \{ a, b \in \mathbb{C} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \} \cong S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$

$\Rightarrow \pi_1(SU(2, \mathbb{C})) = 0$ e $SU(2, \mathbb{C})$ è compatto

→ Sia $f : SU(2, \mathbb{C}) \to S^1$ omomorfismo continuo, cioè $f(AB) f(B)^{-1} f(A)^{-1} = 1$

Allora f è banale

DIM!

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, +) \arrow[d, "e"] \\ (SU, \cdot) \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & (S^1, \cdot) \end{tikzcd}$$

Esiste sollevamento g (SU è sempl. conn.) che porta I in 0.

Vediamo che è un omomorfismo $g(AB) = g(A) + g(B)$

Sia $G : SU \times SU \to \mathbb{R}$ una funzione ausiliaria

$(A, B) \longmapsto g(AB) - g(A) - g(B)$

Dico che è identicamente nulla: e è un omomorfismo di gruppi

$$eG(A, B) = F(A, B) = f(AB) f(B)^{-1} f(A)^{-1} = 1$$

$\Rightarrow G$ solleva F (che è costante) $\Rightarrow G \equiv 0$

$\Rightarrow g(SU)$ è sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ compatto, quindi limitato $\Rightarrow g \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 1$

GEOMETRIA II LEZIONE 43

- $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$

$\overset{\shortparallel}{}\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$

$X_1=\{z_1=0\}\cap S^3$

$X_2=\{z_2=0\}\cap S^3$

Dimostra che X_1 non è omotopo a costante in $S^3 \setminus X_2$

DIM: Consideriamo la proiezione stereografica di S^3 da un punto di X_2 (WLOG da $(1,0)$)

$\overset{\shortparallel}{(1,0,0,0)}$
(x_1,x_2,x_3,x_4)

$$\varphi: S^3\setminus\{(1,0,0,0)\} \longrightarrow \{x_1=0\}\cong\mathbb{R}^3 \quad \text{(di coord. } x_2,x_3,x_4)$$

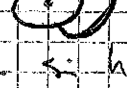
$X_2 \longmapsto$ retta $x_3=x_4=0$

$\{x_1=0\}\cap S^3 \longmapsto$ identità

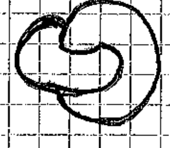
$X_1 \longmapsto \{x_1=x_2=0,\ x_3^2+x_4^2=1\}$
circonferenza

Dunque nell'immagine $\varphi(X_2)$ è la retta $(t,0,0)$ mentre $\varphi(X_1)$ è la circonferenza $(0,u,v)$ tale che $u^2+v^2=1$

Quindi se tolgo la retta, la circonferenza non è omotopa a costante

Quindi in S^3 le circonferenze si incatenano 

OSS. Se "gonfio" le circonferenze prendendo tori pieni si ha che quando si toccano fanno tutto S^3 $\left(|z_1|^2\leq\frac{1}{2},\ |z_2|^2\leq\frac{1}{2}\right)$



- $E\xrightarrow{p}X$ rivestimento con E sempl. connesso e compatto

Allora ogni appl. continua $f: X\longrightarrow S^1$ è omotopa a costante

DIM: E cpt $\Rightarrow$ fibra finita di grado **d**.

E sempl. conn. $\Rightarrow$ $P_*(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\pi_1(E)})$ ha indice d in $\pi_1(X)$

$\Rightarrow |\pi_1(X)|=d$

$\underset{\text{Sgr. finito}}{f_*(\pi_1(X))} \subseteq \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\shortparallel}}{\pi_1(S^1)}$ $\rightsquigarrow f_*(\pi_1(X))=0$ ($\mathbb{Z}$ non ha sgr. finiti)

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & S^1 \end{tikzcd}$$

f è sollevabile $\Leftrightarrow$ $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f_*(\pi_1(X))} \subseteq \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{p'_*(\pi_1(\mathbb{R}))}$ OK

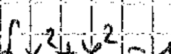
$\Rightarrow \exists g$ sollevamento con g omotopo a costante (perché $\mathbb{R}$ è contrattile)

$p'\circ g=f \Rightarrow f\sim$ costante

- Collana di $\mathbb{Z}$ tori ...  Il π_1 non è finitamente generato

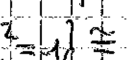
DIM: Sicuramente $\{\alpha_i, \beta_i \mid i\in\mathbb{Z}\}$ generano
generatori di $\pi_1(S^1\times S^1)$

Ogni parola (che è finita) si scrive a partire da questi generatori. Se esistesse un insieme finito di parole generatrici, verrebbero scritte con un numero finito di α_i, β_i e quindi genererebbero una famiglia finita di tori. Poiché sappiamo che una collana finita di n tori è generata da 2n elementi allora $\underline{\mathcal{F} \cup \text{un altro toro}}$ sarebbe generato da meno di 2n lacci.

$\cap$


Assurdo.

- $X=\{x^2+y^2=1,\ z=0\}\cong S^1$
$Y=\{(x+2)^2+y^2+z^2=1\}\cong S^2$

$X\cup Y=$ 

Costruisci un rivestimento semplicemente connesso.

S^1 si riveste con $\mathbb{R}$. Ad ogni $n\in\mathbb{Z}$ (S^1 si interseca con S^2) devo metterci qualcosa (omeo. locale) simile a $\overset{\wedge}{}S^2\cap S^1$
un aperto intorno di

 $\cong$  wedge di S^2 $\Rightarrow$ semplicemente connesso

FATTO 1: $G<\text{Omeo}(E)$ con E connesso che agisce in modo propriamente disc.
$\Rightarrow E\xrightarrow[p]{} E/G$ è un rivestimento e $p_*(\pi_1(E,e))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(E/G, p(e))$

Def Un rivestimento si dice regolare se $p_*(\pi_1(E,e))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, p(e))$

TEOREMA: Un rivestimento connesso $E \xrightarrow{p} X$ è regolare se e solo se il gruppo di automorfismi di E è transitivo sulle fibre.

Def φ si dice automorfismo di E se, dati 2 rivestimenti p_1, p_2 il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Def $\tilde{X} \xrightarrow[\text{rivest.}]{u} X$ con $\tilde{X}$ sempl. connesso si dice universale

PROPRIETÀ: La proprietà universale è che $\forall\, E \xrightarrow{p} X$ rivestimento $\exists\, \varphi : \tilde{X} \to E$ morfismo di rivestimenti che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "u"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un rivestimento universale su X è che X sia semi-localmente semplicemente connesso.

Def X si dice SEMI LOC. SEMPL. CONNESSO se $\forall x \in X$ $\exists$ intorno A aperto connesso per archi tale che, data $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusione, i_* è la mappa nulla, cioè $\forall [\alpha] \in \pi_1(A, x)$, $i_*([\alpha]) = 0$

GEOMETRIA II - LEZIONE 44

ANALISI COMPLESSA

$\mathbb{K}$ campo $\mathbb{K}[x]$ è un'algebra

Vogliamo estenderla permettendo somme infinite.

Ovvero costruisco l'algebra delle serie formali:

- $S(x) + T(x) = \sum (a_n + b_n) x^n$
- $S(x) \cdot T(x) = \sum c_n x^n$ con $c_n = \sum^{n} a_i b_{n-i}$
- $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda S(x) = \sum \lambda a_n x^n$

Def Dato $S(x) = \sum^{\infty} a_n x^n$ si definisce $\omega(S) = \min\{k \mid a_k \neq 0\}$
(è un grado)

$$\omega(S+T) \geq \min(\omega(S), \omega(T))$$
$$\omega(ST) = \omega(S) + \omega(T)$$
$$\omega(0) = +\infty$$

Lo poniamo $+\infty$ così $\{S$ di ordine $\geq k\}$ è una sottoalgebra

Def $\{S_i\}_{i \in I}$ diciamo che la famiglia è sommabile se $\forall k$ solo un numero finito di S_i hanno $\omega(S_i) \leq k$

Dunque, $S_i = \sum a_{n_i} x^n$

$$\sum S_i(x) = \sum_n \Big(\underset{\nwarrow \text{finite}}{\sum_i a_{n_i}} \Big) x^n$$

OSS. $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia sommabile

OSS - Se $S(x) = a_k x^k + \dots$, $T(x) = b_\ell x^\ell + \dots$ $\Rightarrow$ $S(x)T(x) = a_k b_\ell x^{k+\ell} + \dots$

Dunque $\mathbb{K}[[x]]$ è un anello integro.
Analogamente, se A è dominio di integrità, anche $A[[x]]$ è integro.

OSS - se $\omega(T) \geq 1$, allora $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia sommabile.
Quindi posso fare, se $S(x) = \sum a_n x^n$,

$$\sum a_n T^n = S \circ T$$

Si verifica che:

$$(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$$
$$(S_1 \cdot S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cdot (S_2 \circ T)$$
$$1 \circ T = 1$$
$$S \circ x = x \circ S = S$$

x è l'elemento neutro rispetto alla "composizione"

PROPOSIZIONE: $(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$, con $\omega(T) \geq 1$, $\omega(U) \geq 1$

DIM: La scrittura ha senso: $\omega(T \circ U) \geq 1$.

- È vero per i monomi:

$$S = x^k$$

$$(S \circ T) \circ U = T^k \circ U = (T \circ U)^k = S \circ (T \circ U)$$

- S è la somma della famiglia sommabile dei monomi

$$\left(\sum a_n T^n\right) \circ U = \sum_n (a_n T^n) \circ U = \sum a_n (T \circ U)^n = S \circ (T \circ U)$$

ELEMENTI INVERTIBILI DI $\mathbb{K}[[x]]$

$S(x) = \sum a_n x^n$ $\quad S(x) \cdot T(x) = 1$

$T(x) = \sum b_n x^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \end{cases} \iff a_0 \neq 0$$

Perché l'n-esima equazione è $a_0 b_n + f(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}) = 1$

Dunque $S(x)$ invertibile $\iff \omega(S) = 0$

($\mathbb{K}[[x]]$ è locale, perché il complementare di $\{S \mid \omega(S) = 0\}$ è (x) che è massimale)

$$(1-x) \sum x^i = 1$$

Dunque $S(x) = a_0 (1 - U(x))$ con $\omega(U) \geq 1$ $\overset{\text{Posso comporre}}{\rightsquigarrow}$ $(1 - U(x)) \sum U^n = 1$

$$\Rightarrow S(x)^{-1} = \frac{1}{a_0} \sum U^n$$

Vogliamo sapere ora per quali $S(x)$ $\exists T(x)$ tale che $S(x) \circ T(x) = x$

PROPOSIZIONE: S ha inversa funzionale $\iff \omega(S) = 1$

DIM: $\textcircled{\Rightarrow}$ $\sum a_n T^n = x$ con $\omega(T) \geq 1$

$\Rightarrow a_0 = 0$ perché $a_0 T^0 = a_0$

$\Rightarrow a_1 b_1 = 1$ perché $a_1 T^1 = x$

$\Rightarrow \begin{matrix} a_1 \neq 0 \\ b_1 \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \omega(S) = 1$

$\textcircled{\Leftarrow}$ Trovo l'inversa a mano facendo il sistema.

PROPOSIZIONE: $S \circ T = x \iff T \circ S = x$

DIM: $\textcircled{\Rightarrow}$ $S \circ T = x$ $\quad \omega(T) = 1 \iff$ è funzionalmente invertibile

$$\exists S_1 : (S \circ T) \circ S_1 = S \circ (T \circ S_1) = S \circ x = S$$

$$x \circ S_1 = S_1$$

Def $S'(x) = \sum_1 n a_n x^{n-1}$ Derivata formale $\quad S(0) = S \circ 0 = a_0$

PROPOSIZIONE: S ha inversa funzionale $\iff S(0) = 0 \wedge S'(0) \neq 0$

Def $d(S(x), T(x)) = 2^{-n}$

$\iff \omega(S(x) - T(x)) = n$

OSS - È una distanza

SUCCESSIONI DI CAUCHY

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n, m > n_0 \quad d(S_n(x), S_m(x)) < \varepsilon.$$

Cioè, fissato n_0 tale che $2^{-n_0} < \varepsilon$, vogliamo $\omega(S_n - S_m) \geq n_0$

Ovvero che i primi n_0 termini devono essere uguali.

In $\mathbb{K}[[x]]$ le successioni di Cauchy convergono ($\varepsilon \to 0 \Rightarrow n_0 \to +\infty$ Tutti i coeff. uguali)

Dunque è uno spazio completo.

$\Rightarrow$ $\mathbb{K}[[x]]$ è il completamento dello spazio dei polinomi con la distanza $d(p(x), q(x)) = 2^{-n}$ con $x^n \| (p(x) - q(x))$

Palle di centro 0 in $\mathbb{K}[x]$: $\mathcal{M}^n = B(0, 2^{-n})$ ← massimale

Dato $p(x)$ $\quad B(p(x), 2^{-n}) = p(x) + \mathcal{M}^n$

SERIE CONVERGENTI

Serve campo completo $\Rightarrow \mathbb{R} \circ \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ noi usiamo $\mathbb{C}$.

Una successione di numeri complessi è di Cauchy (?)

Se $\sum |z_n| < \infty$ allora $\sum z_n$ converge

Funzioni su E a valori complessi

$\|v(x)\| = \sup_{x \in E} \{|v(x)|\} \leq \infty$ $\quad$ Se $\sum \|v_n(x)\| < \infty \Rightarrow \sum v_n(x) < \infty$ e $\left|\sum v_n(x)\right| \leq \sum \|v_n(x)\|$

Sia $S(x) = \sum a_n x^n$ e sia $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$0 \in \left\{ r \mid \sum |a_n| r^n < \infty \right\}$$

Def $\rho(S) = \sup\left\{ r \mid \sum |a_n| r^n < \infty \right\}$. Dico che S è convergente se $\rho(S) > 0$

OSS - Le serie convergenti formano una sottoalgebra che si denota con $\mathbb{C}\{x\}$

GEOMETRIA III - LEZIONE 15

CONVERGENZA DI SERIE

$$\begin{tikzcd} & \overset{\sum|f_n(x)|}{\text{Assoluto}} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \overset{\sum\|f_n\|}{\text{Totale}} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Puntuale} \\ & \text{Uniforme} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

LEMMA: Sia $S = \sum a_n z^n$ $\quad A = \{ r \in \mathbb{R} \mid \sum |a_n| r^n < \infty \}$

$R = \sup A$

Supponiamo che i termini di S per $|z| = \rho$ siano limitati

cioè $|a_n \rho^n| < K \quad \forall n$

Allora S è assolutamente convergente per $\forall z : |z| < R$

DIM: $\sum |a_n z^n| = \sum |a_n| \cdot |z|^n \leq \sum \underline{|a_n| \cdot |R|^n} \cdot \frac{|z|^n}{R^n} \leq$

$\leq \sum K \frac{|z|^n}{R^n} = K \sum \left(\frac{|z|}{R}\right)^n$

↑ geometrica ragione < 1 ⇓ converge

OSS. Dato che non c'è dipendenza da n,
la serie converge anche uniformemente.

raggio di convergenza $R = \frac{1}{L}$ con $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$

PROPOSIZIONE: $S = \sum a_n z^n \quad T = \sum n a_n z^{n-1}$

Allora [...] $\left| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - T(z) \right| < \varepsilon$

DIM:

$$\frac{\sum a_n ((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum n a_n z^{n-1} =$$

Se so che $\sum a_n ((z_0+h)^n - z_0^n)$ converge uniformemente allora posso fare

$$= \sum a_n \left(((z_0+h)^{n-1} + z_0 (z_0+h)^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}) - n z_0^{n-1} \right) \quad z = z_0 + h$$

[illegible]

$$\left[\begin{aligned} \text{Ma} \quad \sum a_n z^n &= \sum a_n (\underset{h}{z - z_0} + z_0)^n = \sum a_n \Big(\sum_{i+j=n} \binom{n}{i} h^i z_0^j \Big) = \\ &= \sum a_n \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!\,j!} h^i z_0^j = \sum \frac{1}{j!} (z-z_0)^j \sum \frac{n!}{i!} a_n z_0^i = \\ &= \sum \frac{1}{j!} (z-z_0)^j f^{(K)}(z_0) \end{aligned} \right]$$

NON C'ENTRA UN CAZZO

$$\frac{S(z_0+h) - S(z_0)}{h} - T(z_0) = \sum a_n ((z_0+h)^{n-1} + \dots + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1})$$

$= \sum P_n(h, z_0)$ $\quad$ si annulla in $h = 0$

In più $|P_n(h,z)| \leq 2 n a_n R^{n-1}$ $\quad$ (perché $|z|, |z+h| < r < R$)

$\Rightarrow \sum 2 n a_n R^{n-1} < +\infty$

Dunque la coda è $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

la testa è un polinomio in h, nullo per $h = 0$ $\Rightarrow$

per $|h| < \delta$ $\quad$ la testa è $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ Tutto $\leq \varepsilon$

GEOMETRIA II - LEZIONE 46

PROPOSIZIONE: Se S, T convergono, allora:

- $(S+T)$ converge e $(S+T)(z) = S(z) + T(z)$
- (ST) converge e $(ST)(z) = S(z) \cdot T(z)$

PROPOSIZIONE: Sia $\rho(T) > 0$ e $\omega(T) \geq 1$; sia $\rho(S) > 0$.

Allora

$$\rho(S \circ T) > 0$$

Inoltre $\forall z \in \underbrace{D(0, \rho(S \circ T))}_{\text{disco di convergenza}}$ $\quad (S \circ T)(z) = S(T(z))$

Questa scrittura ha senso: essendo T continua e $T(0) = 0$, c'è un r tale che $|z| < r \Rightarrow |T(z)| < \rho(S)$

DIM: $S(x) = \sum a_n x^n$, $T(x) = \sum b_n x^n$.

Per r piccolo, $\sum |b_n| r^n < \rho(S) \Rightarrow$ per $|z| < r$ $T(z) = \sum b_n z^n = z \sum b_n z^{n-1}$ che può essere reso (in modulo) più piccolo di $\rho(S)$

Dunque posso fare $S(T(z)) = \sum_p \left[|a_p| \left(\sum_k |b_k| r^k \right)^p \right] = \sum \gamma_n r^n$.

Quindi $(S \circ T)(x) = \sum c_n x^n$ con $|c_n| \leq \gamma_n$, cioè $\rho(S \circ T) \geq r$

~~[illegible]~~ $|c_n| = \gamma_n$ perché sono uguali nelle somme parziali:

$$U_n(z) \overset{\text{def}}{=} (S_n \circ T)(z) = S_n(T(z))$$

$T \mapsto T(z)$ è uniform. di quelli

per cui S converge in $T(z)$

$$U(z) \overset{\text{def}}{=} (S \circ T)(z) = S(T(z))$$

I coefficienti di $U - U_n = (S - S_n) \circ T$ sono maggiorati da quelli di $\sum_{p > n} \left[|a_p| \cdot \left(\sum_k |b_k| r^k \right)^p \right]$, dunque $(U - U_n)(z) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow U(z) = \lim U_n(z)$

OSS. Se S convergente e $\omega(S) = 0$ allora S^{-1} converge a $\frac{1}{S(z)}$

OSS. Se $S = \sum a_n x^n$ e $S' = \sum n a_n x^{n-1}$, allora

$\forall z_0 \in D(0, \rho(S))$ $\quad S'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{S(z_0 + h) - S(z_0)}{h}$

S e S' hanno lo stesso raggio di convergenza. Le serie convergenti sono sempre C^∞ nel loro disco di convergenza

NOTA: Ogni serie si può vedere come funzione solo nel suo disco di conv.

OSS. Si ha che $S^{(n)}(0) = n! a_n$

Segue che, data una funzione su un disco, ci può essere una sola serie convergente ad essa: la sua serie di Taylor

Def Una $f: U \to \mathbb{C}$ si dice "Sviluppabile in serie" in $x_0 \in U$ se esiste una serie S convergente tale che:

$$|z - x_0| < r \Rightarrow f(z) = S(z - x_0) \quad \text{per un opportuno } r > 0$$

Def f si dice analitica in U se è sviluppabile in serie in ogni suo punto

TEOREMONE: Se S convergente, allora è analitica in $D(0, \rho(S))$

DIM: Dimostro che $T(x) = \sum_p \frac{S^{(p)}(x_0)}{p!} x^p$ è convergente e $T(z - x_0) = S(z)$...

NOTAZIONE: f analitica in U si scrive $f \in \mathcal{A}(U)$

$$\mathcal{A}(U) \subseteq C(U, \mathbb{C})$$

funz. continue da U a $\mathbb{C}$

... se $r_0 = |x_0|$, $\alpha_n = |a_n|$ $\Rightarrow S^{(p)}(x_0) = \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q$

Se $r_0 < r < \rho$, $\quad \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(x_0)| (r - r_0)^q \leq$

$$\leq \sum_{p,q} \binom{p+q}{p} \alpha_{p+q} r_0^q (r - r_0)^p =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \alpha_n (r - r_0 + r_0)^n = \sum_{n \geq 0} \alpha_n r^n < +\infty$$

($\geq r - r_0$, ma r posso tendere a ρ)

Dunque $\rho(\text{Taylor}) \geq \rho - r_0$, quindi è tutto ben definito

Ma, data $\sum_{p,q} \binom{p+q}{p} a_{p+q} x_0^q (x - x_0)^p$, ponendo $q = n - p$ è

$\sum_n a_n (x_0 + x - x_0)^n = S(x)$ ma posso anche scriverla come

$$\sum_{p \geq 0} \left(\sum_q \frac{(p+q)!}{q!} x_0^q \frac{(x - x_0)^p}{p!} a_{p+q} \right) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} S^{(p)}(x_0) (x - x_0)^p = \text{Serie di Taylor}$$

SPOILER: L'inversa funzionale di un'analitica è analitica

METATEOREMA: Le funzioni elementari sono analitiche

TEOREMA: Sia U aperto connesso e $x_0 \in U$. Se $f \in \mathcal{A}(U)$ sono fatti equivalenti:

1. Tutte le derivate di f si annullano in x_0
2. $f \equiv 0$ in un intorno di x_0
3. $f \equiv 0$.

DIM: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Il Taylor è $\equiv 0$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ $U' := \{x \in U \mid f \equiv 0$ in un intorno di $x\}$, allora U' è chiaramente aperto. Se $x_0 \in \overline{U'}$, posso creare una succ. in U' che tende a x_0 e per continuità anche x_0 avrà immagine nulla (e tutte le derivate nulle) $\Rightarrow x_0 \in U' \Rightarrow U'$ chiuso $\Rightarrow U' = U$

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ ovvio

PROPOSIZIONE: Se U, V aperti non disgiunti con unione connessa $f \in \mathcal{A}(U)$ e $g \in \mathcal{A}(V)$ allora

$$g|_{U \cap V} = f|_{U \cap V} \Rightarrow g \text{ prolunga } f \text{ a } V \cup U \text{ ed è unica}$$
$$(\text{essendo } f - g|_{U \cap V} \equiv 0)$$

PROPOSIZIONE:

[illegible] U connesso, $f \in \mathcal{A}(U)$ non costantemente nulla. Allora

$$Z(f) \overset{\text{def}}{=} \{z \in U \mid f(z) = 0\}$$ è un insieme discreto in U

NOTA: Discreto in $U \not\Rightarrow$ discreto in $\mathbb{C}$, perché sul bordo di U posso accumulare

DIM: $z_0 \in Z(f) \Rightarrow f(z) = (z-z_0)^K h(z)$ con $h(z_0) \neq 0$ $\Rightarrow K = \omega(S)$ = molteplicità dello zero

$\Rightarrow$ lo zero è isolato

Esempio: $U = \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}} - 1$: gli zeri convergono a 0, che non sta in U. Segue che f non si può prolungare su 0.

COROLLARIO: U connesso, allora:

1. $\mathcal{A}(U)$ è dominio ($f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0 \vee g \equiv 0$)
2. $\mathfrak{Frac}(\mathcal{A}(U)) = \left\{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in \mathcal{A}(U)\right\}$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ è analitica in $U \setminus Z(g)$.

DIM $\boxed{2}$: Se $g(z_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^\ell f_1(z) & \ell = \omega(f) \\ g(z) = \sum b_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k g_1(z) & h = \omega(g) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = (z-z_0)^{\ell-h} \left(\frac{f_1}{g_1}\right) \leftarrow \text{analitica non costantemente nulla}$$

Se $\ell - h \geq 0$, $\frac{f}{g}$ è analitica in z_0; altrimenti z_0 è polo di $\frac{f}{g}$ di molteplicità $h - \ell$.

Def Se $f \in \mathcal{A}(U \setminus \{z_0\})$, z_0 si dice polo per f di molteplicità p se $(z-z_0)^p \cdot f(z) \in \mathcal{A}(U)$ e p è il minimo che fa così

Def funzioni meromorfe

$$\mathcal{M}(U) \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{A}(U \setminus Z_f) \mid Z_f \text{ ins. discreto e formato da poli di } f\}$$

$\mathcal{M}(U)$ è un campo e contiene $\mathfrak{Frac}(\mathcal{A}(U))$

PROBLEMA DI POINCARÉ: È vero che $\mathcal{M}(U) = \mathfrak{Frac}(\mathcal{A}(U))$?

Dipende dalla topologia di U. In effetti:

$$g(z) = (z-z_0)^h f \in \mathcal{A}(U) \Rightarrow f = \frac{g}{(z-z_0)^h} \in \mathfrak{Frac}(\mathcal{A}(U))$$

Ma solo localmente

OSS- Se $\{U_i\}_{i \in I}$ ric. aperto di U e $f \in \mathcal{M}(U)$ con $f|_{U_i} = \frac{f_i}{g_i}$ con $f_i, g_i \in \mathcal{A}(U_i)$, voglio scrivere f come unico quoziente

Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora $\frac{f_i}{g_i} = \frac{f_j}{g_j} \Rightarrow \frac{f_i}{f_j} = \frac{g_i}{g_j}$

Se $\lambda_i \in \mathcal{A}(U_i)^*$ (mai nulla) e $\lambda_j \in \mathcal{A}(U_j)^*$, con $\frac{g_i}{g_j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$

allora $\begin{cases} f_i/\lambda_i = f_j/\lambda_j & \rightarrow \text{posso incollare i numeratori} \\ g_i/\lambda_i = g_j/\lambda_j & \rightarrow \text{posso incollare i denominatori} \end{cases}$

Tutto sta nella possibilità di scrivere $\frac{g_i}{g_j}$ con g_i e g_j non nulli [illegible] nell'intersezione $U_i \cap U_j$ come rapporto $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ con λ_i non nullo in U_i, λ_j non nullo in U_j

PROPOSIZIONE: La derivata di una funzione meromorfa è meromorfa con gli stessi poli (la molteplicità di ogni polo aumenta di 1).

DIM: $h(z) = \frac{h_1(z)}{(z-z_0)^\ell} \rightsquigarrow h'(z) = \frac{h_1'(z)(z-z_0)^\ell - \ell(z-z_0)^{\ell-1}h_1(z)}{(z-z_0)^{2\ell}}$

$$= \frac{h_1'(z)(z-z_0) - \ell h_1(z)}{(z-z_0)^{\ell+1}} =$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^{\ell+1}} \cdot \text{roba che non si annulla in } z_0$$

OSS. Se $f \in A(U)$, i poli di $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ sono gli zeri di f con molteplicità 1.

Se $f \in M(U)$, allora i poli di $h = \frac{f'}{f}$ sono gli zeri di f (con molt. 1) e i poli di f (sempre con molt. 1)

$h = [\log f]'$ si dice derivata logaritmica, e abbiamo visto che ha solo poli semplici.

Esercizio ① $f \in A(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists U$ int. aperto di $\mathbb{R}$ e $\exists g \in A(U)$ t.c.

$$g|_{\mathbb{R}} = f$$

② Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f = h^2$ per qualche h è idem la sua estensione

③ Se g analitica in U int. aperto connesso di $\mathbb{R}$ e $g|_{\mathbb{R}} \geq 0$ allora $g = h^2$ per qualche h.

GEOMETRIA II - LEZIONE 47

Def f funzione diff. su un aperto di $\mathbb{R}^2$ a valori complessi

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \text{differenziale}$$

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Def Una forma diff. su un aperto di $\mathbb{R}^2$ è $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
P, Q continue a valori complessi

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad 0 \leq t \leq 1$ è cammino differenziabile

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$

Va bene anche con γ diff. a tratti.

Def Se ω è differenziale di qualche f, allora ω si dice esatta e f si dice primitiva di ω (non è unica), inoltre vale

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Se γ è chiuso $\int_\gamma \omega = 0$ (con ω esatta)

Se f primitiva di ω, anche $f+c$ lo è $\forall c \in \mathbb{C}$

PROPOSIZIONE: ω su U connesso è esatta $\Leftrightarrow \forall \gamma$ diff. a tratti e chiuso $\int_\gamma \omega = 0$

DIM: ($\Rightarrow$) ovvio

($\Leftarrow$) Fissiamo $x_0 \in U$

$\forall y \in U$ c'è γ_y diff. a tratti con $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = y$

$f(y) := \int_{\gamma_y} \omega$ Se γ_{1y} è un altro arco diff. a tratti

$$\int_{\gamma_y} \omega = \int_{\gamma_{1y}}$$

$\gamma_y * i(\gamma_{1y})$ è chiuso

È facile dire che $\omega = df$

- In particolare, se U è connesso R rettangolo contenuto in U, $\gamma(t)$ che percorre il bordo del rettangolo. $\int_\gamma \omega = 0$ basta per dire che ω è esatta?
La risposta è SÌ oppure NO, dipende dalla topologia di U.

Ipotesi: D disco di centro x_0 e raggio r, la condizione è sufficiente.
$\forall y \in D$ c'è rettangolo $R \subseteq D$ tale che x_0 e y sono gli estremi di una diagonale di R

$$\begin{cases} F(x_0) = 0 \\ F(y) = \int_\gamma \omega \end{cases}$$

● $\omega = \frac{dz}{z} = \frac{dx+idy}{x+iy}$ definita su $\mathbb{C}^*$

Su ogni rettangolo $R \subseteq \mathbb{C}^*$ $\int_{\partial R} \omega = 0$, ma ω non è esatta

GAUSS-GREEN: Se ω è di classe C^1, cioè P e Q ammettono derivate parziali continue allora

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

Se anche solo in un intorno di R $\omega = dF$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Rightarrow \iint_R (Q_x - P_y) dx dy = 0 \Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$$

Def ω forma diff. su U connesso. ω si dice chiusa se $\forall x \in U$ c'è un intorno aperto U^* tale che $\omega|_{U^*} = dF$ F diff. su U^*

Esempio $\frac{dz}{z}$ è chiusa in $\mathbb{C}^*$ (in ogni intorno c'è una determinazione del logaritmo)

Vogliamo costruire $\forall \gamma$ cammino continuo $\gamma: [0,1] \longrightarrow U$ una funzione continua $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ tale che $\forall t \in [0,1]$ si abbia (ω chiusa)

$$f(t) = F(\gamma(t))$$

dove F è una primitiva di ω in intorno di $\gamma(t)$

Se f esiste si chiama primitiva di ω lungo γ.

COSTRUZIONE di f. possiamo trovare un ricoprimento di U con aperti A tali che $\omega|_A = dF_A$

$\{\gamma^{-1}(A) \mid A \in$ ricoprimento$\}$ ric. per $[0,1]$; possiamo suddividerlo in $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ (Lebesgue) tali che $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq A_i$

$$F_0 - F_1 \big|_{A_0 \cap A_1} = a_{01} \qquad f\big|_{[0,t_1]}(t) = F_0(\gamma(t))$$

$$f\big|_{[t_1,t_2]}(t) = F_1(\gamma(t)) + a_{01}$$

ATTENZIONE: γ chiuso, non è detto che $f(0) = f(1)$. ($\int_\gamma \omega = f(1) - f(0)$)

Prop. $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ cammino chiuso $\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$ è un numero intero

DIM: Come primitive locali F_i nella costruzione della primitiva lungo γ posso scegliere determinazioni di $\log z$, ovvero sezioni del rivestimento $z \longrightarrow e^z$

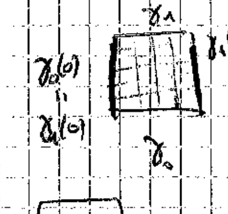
$\Rightarrow a_{i,i+1}$ è un multiplo intero di $2\pi i$

$\Rightarrow f(1) - f(0)$ continua ad essere multiplo intero di $2\pi i$

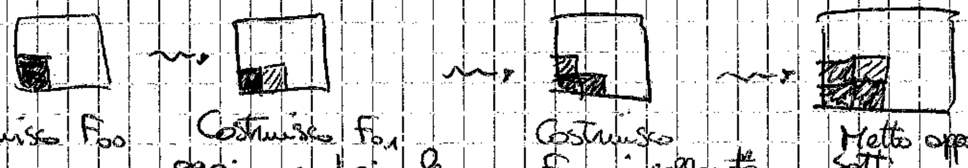
PRIMITIVE LUNGO OMOTOPIA: $f: I \times I \to U$ continua t.c. $\forall (t,s) \in I^2$ $f(t,s) = F(G(t,s))$ con F primitiva in intorno di $G(t,s)$

ω chiusa su U

$G: I \times I \to U$



Fissiamo un ricoprimento tra i cui aperti ω ha primitive $\Rightarrow \exists$ suddivisione $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$
$0 = s_0 < \dots < s_p = 1$



Costruisco F_{00} Costruisco F_{01} aggiungendoci le costanti giuste per il raccordamento Costruisco F_{10} incollando ... Metto apposto il sotto: sx è messo bene di conseguenza grazie al punto di intersezione

$\Rightarrow \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$

COROLLARIO. Se ω è chiusa $\int_\gamma \omega$ è definita per ogni cammino continuo e dipende solo dalla classe di omotopia di γ.

COROLLARIO: Se U è semplicemente connesso ogni forma chiusa in U è esatta.

● $\gamma(t) = e^{it}$ $\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} i\, dt = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} \\ \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$[\gamma][\alpha] = [\gamma * \alpha]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma * \alpha} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dz}{z}$$

Def Si dice indice di γ cammino continuo chiuso in $a \in \mathbb{C}$ ($a \notin \mathrm{Im}\,\gamma$)

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

PROPRIETÀ:
1) $I(\gamma, a)$ non cambia se muovo γ nella sua classe di omotopia su $\mathbb{C} \setminus \{a\}$
2) Fissato γ, $I(\gamma, a)$ è una funzione continua di $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ loc. costante $\Rightarrow$ è costante nelle ~~componenti~~ connesse di $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Im}\,\gamma\}$
3) Se $\gamma(I) \subseteq D$ sempl. connesso e $a \notin D \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$
4) $\gamma(t) = b + re^{it}$ $I(\gamma, a) = \begin{cases} 1 & \text{se } |b-a| < r \\ 0 & \text{se } |b-a| > r \end{cases}$ $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

Applicazione $D = \{|z|<1\}$

$f: D \to \mathbb{C}$

$\gamma = f|_{|z|=1}$

Se $I(\gamma,a)\neq 0$ allora c'è un punto del disco b tale che $f(b)=a$

Componiamo l'omotopia tra S^1 e un punto in D con f.
Questo ci dà un'omotopia tra γ e il cammino costante. Se l'omotopia non passa da a $\Rightarrow I(\gamma,a)=0$

$\Rightarrow a \notin \operatorname{Im} f$.

- Si può definire il prodotto di cammini

$$\gamma(t) = \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)$$

Se $\gamma_1(t)\neq 0$ e $\gamma_2(t)\neq 0$ $\forall t$ allora $I(\gamma,0) = I(\gamma_1,0)+I(\gamma_2,0)$

$$\left.\begin{aligned} e^{f_1(t)} &= \gamma_1(t) \\ e^{f_2(t)} &= \gamma_2(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t) = e^{f_1(t)+f_2(t)}$$

$\Rightarrow f_1+f_2$ è la primitiva di $\frac{dz}{z}$ lungo γ

$$\Rightarrow I(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\Big(f_1(1)+f_2(1)-f_1(0)-f_2(0)\Big) = I(\gamma_1,0)+I(\gamma_2,0)$$

COROLLARIO $\gamma_1(t)\neq 0$ $\forall t$ e $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$ $\forall t$

$$\Rightarrow I(\gamma_1+\gamma_2, 0) = I(\gamma_1,0)$$

DIM: $$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \gamma_1(t)\underbrace{\left(1+\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}\right)}_{\text{va in } B(1,1)} \Rightarrow I(\gamma,0) = I(\gamma_1,0)$$

$$\Downarrow$$

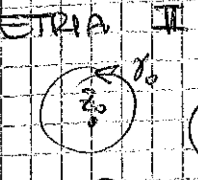
$$I\left(1+\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)},0\right)=0$$

BORDO ORIENTATO

d'un cpt $K \subseteq \mathbb{C}$, $\{\gamma_i\}$ famiglia finita di cammini chiusi diff. a tratti e iniettivi tranne per gli estremi, le immagini sono disgiunte e $\partial K = \bigcup_i \operatorname{Im}\gamma_i$, se γ è un pezzo di γ_i diff. allora $\gamma'(t)\neq 0$

Il bordo è orientato nel verso in cui si ha il cpt a sinistra

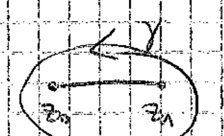
GEOMETRIA II - LEZIONE 48



- ω chiusa in $\mathbb{C}\setminus\{z_0,z_1\}$

$\Rightarrow \omega$ è esatta $\Leftrightarrow \int_{\gamma_0}\omega = \int_{\gamma_1}\omega = 0$

- ω chiusa in $\mathbb{C}\setminus[z_0,z_1]$



$\omega = \frac{dz}{z-z_0} - \frac{dz}{z-z_1}$ È esatta perché

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega = I(\gamma,z_0) - I(\gamma,z_1) = 0$$

- Dimostra che $\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$

Integro $\frac{dz}{z}$ lungo una parametrizzazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\gamma(t) = a\cos t + b\operatorname{sen}t\cdot i$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \qquad \int_\gamma\frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi}\frac{-a\operatorname{sen}t + ib\cos t}{a\cos t + ib\operatorname{sen}t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{-a^2\operatorname{sen}t\cos t + b^2\operatorname{sen}t\cos t + iab\operatorname{sen}^2 t + iab\cos^2 t}{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\int_0^{2\pi}\frac{b^2-a^2\cdot\operatorname{sen}t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt}} + \underbrace{i\int_0^{2\pi}\frac{ab\,(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t)}{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt}_{2\pi i} \ldots (?)$$

Def D aperto di $\mathbb{C}$ $z_0\in D$ $f: D\to\mathbb{C}$

f è olomorfa in z_0 se esiste il limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = c$$

f è olomorfa in D se lo è in ogni punto

OSS. f olomorfa se e solo se $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ vedendo f in 2 variabili $(x+iy)$

OSS. $f(x,y) = P+iQ$ $\quad \begin{aligned}P_x &= Q_y\\ P_y &= -Q_x\end{aligned} \Leftrightarrow J_f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ cioè la molt. per uno scalare complesso

- Cauchy-Riemann dice che le funzioni olomorfe dove $f'\neq 0$ sono mappe CONFORMI (il differenziale è una similitudine diretta).

Passaggio di coordinate $\quad \begin{aligned} dz &= dx + i\,dy \\ d\bar z &= dx - i\,dy\end{aligned} \qquad \begin{aligned} dx &= \frac{dz+d\bar z}{2} \\ dy &= \frac{dz - d\bar z}{2i}\end{aligned}$

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy =$$
$$= F_x\left(\frac{dz+d\bar z}{2}\right) + F_y\left(\frac{dz-d\bar z}{2i}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}(F_x - iF_y)}_{\frac{\partial}{\partial z}}dz + \underbrace{\frac{1}{2}(F_x+iF_y)}_{\frac{\partial}{\partial \bar z}}d\bar z$$

Cauchy-Riemann : $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$

● f olomorfa Re f = costante ⇒ f costante

DIM: $d(Re(f(z))) = d\left(\frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right)\right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial z} dz + \underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial \bar z}} d\bar z + \cancel{\frac{\partial \bar f}{\partial z}} dz}_{} + \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} d\bar z = 0$$

f olomorfa $\bar f$ olomorfa, coniugando tutto

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \wedge \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} d\bar z = 0 \Rightarrow df = 0 \Rightarrow f \text{ costante}$$

lin. indip.

TEOREMA (DI CAUCHY-GOURSAT):

f olomorfa in D ⇒ $f(z)dz$ è una forma chiusa

DIM: Se le derivate parziali sono continue:

$$f(z)dz = \underbrace{f(z)}_{F_x'}dx + \underbrace{i f(z)}_{F_y}dy$$

$F_{xy} = F_{yx}$ Cauchy-Riemann dice che sono uguali, la formula di Green ci dice che la forma è chiusa.

Se le derivate non sono continue prendiamo R rettangolo ⊆ D e proviamo che $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$

$\alpha(R) = \int_\gamma f(z)dz$

$\alpha(R) = \alpha(R_1) + \dots + \alpha(R_4)$

ℓ perimetro di R ⇒ $\ell_1 = \frac{\ell}{2}$ $\ell_i = \frac{\ell}{2^i}$

Chiamo R^1 il pezzo per cui $|\alpha(R_i)|$ è massimo

$|\alpha(R_1)| \geq \frac{1}{4}|\alpha(R)|$

Itero il procedimento dentro R_1 ...

... $|\alpha(R_k)| \geq \frac{1}{4^k}|\alpha(R)|$

$\cap R_k = \{z_0\} \subseteq D$ In un intorno U di z_0 vale la formula

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)|z - z_0|$ $\exists k$ tale che $R_k \subseteq U$

$$\frac{1}{4^k}|\alpha(R_\bullet)| \leq \left|\int_{\gamma_k} f(z)dz\right| = \left|\underbrace{f(z_0)\int_{\gamma_k} dz}_{\text{vale } 0} + \underbrace{f'(z_0)\int_{\gamma_k}(z - z_0)dz}_{\text{vale } 0} + \underbrace{\int_{\gamma_k}\alpha(z)|z - z_0|dz}_{③}\right|$$

diametro · perimetro (lungh. γ_k)

$|③| \leq \frac{1}{2^k}\ell^2 \cdot \frac{1}{2^k}\sup_{z \in \gamma_k}|\alpha(z)|$, ma $|③| \geq \frac{1}{4^k}|\alpha(R_\bullet)|$

Quindi $|\alpha(R_\bullet)| \leq \ell^2 \cdot \underset{\to 0}{\sup_{z \in \gamma_k}|\alpha(z)|}$ ⇒ $\alpha(R) = 0$

TEOREMA (FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY)

f olomorfa in D, $a \in D$ $\gamma : I \to D \setminus \{a\}$ chiusa omotopa a costante in D

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}dz = I(\gamma, a) f(a).$$

DIM: $g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ $g(a) = f'(a)$ $g(z)dz$ è chiusa

$$\int_\gamma g(z)dz = 0 = \int \frac{f(z)}{z - a}dz - \underbrace{f(a)\int \frac{dz}{z - a}}_{= f(a) I(\gamma, a) 2\pi i}$$

TEOREMA DI CAUCHY

● f olomorfa in un disco di raggio ρ

Prendiamo z_0 con $|z_0| = r < \rho$

Prendo $r < r_0 < \rho$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t| = r_0}\frac{f(t)}{t - z_0} = \overset{I(\dots, z) = 1}{f(z_0)}$$

Scrivendo $\frac{1}{t - z_0} = \frac{1}{t(1 - \frac{z_0}{t})} = \sum \frac{z_0^n}{t^{n+1}}$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(t)\sum \frac{z_0^n}{t^{n+1}}dt = \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t^{n+1}}dt$$

Abbiamo quindi definito una serie da f, cioè

f olomorfa ⇒ f analitica

OSS. Se f è olomorfa su U ∖ raro (magro) (tipo una retta) e continua in U allora è olomorfa in U. (dimostrando che è chiusa)

GEOMETRIA II LEZIONE 49

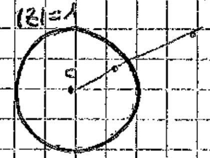
- $f(z)dz$ è chiusa $\Leftrightarrow$ $f(z)$ è olomorfa
- $f(z)$ olomorfa $\Rightarrow$ df è una similitudine diretta, in particolare è conforme

Def
- se $g(z)$ verifica $\frac{\partial}{\partial z} g = 0$ si dice antiolomorfa.

Il suo dg è:
- proporzionale a $d\bar{z}$
- è una similitudine inversa

Esempi:
- Il coniugio è antiolom.
- La simmetria rispetto ad una retta qualunque
- $\mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\rho} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ "inversione circolare" involuzione

$$z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$$



$$x+iy \longmapsto \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{z}{|z|^2} = z'$$

$$|z| \cdot |z'| = 1$$

Scambia dentro e fuori rispetto a circ. unitaria.

ρ è antiolomorfa, quindi conforme inversa

Inversione circ. qualunque = traslazione $\circ\, \rho \,\circ$ traslazione^{-1}

Quindi tutte le inversioni circolari sono antiolomorfe e dunque conformi inverse.

(La composizione di conformi resta conforme, composizione di conformi inverse è conforme, composiz. di conforme con conforme inversa è inversa)

$$z-a \longmapsto \frac{r^2}{\overline{z-a}} \quad \text{conserva rette e circonferenze}$$

supponiamo $a=0$

Considero $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

$$z \longmapsto \frac{r^2}{\bar{z}} \qquad x' = \frac{r^2 x}{x^2+y^2} \qquad y' = \frac{r^2 y}{x^2+y^2}$$

$$x+iy \longmapsto \frac{r^2(x+iy)}{x^2+y^2}$$

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d \longmapsto \frac{a\, r^4}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}\cancel{(x^2+y^2)} + b\frac{r^2 x}{x^2+y^2} + c\frac{r^2 y}{x^2+y^2} + d$$

$$a r^4 + b r^2 x + c r^2 y + d(x^2+y^2) = 0$$

è della stessa forma

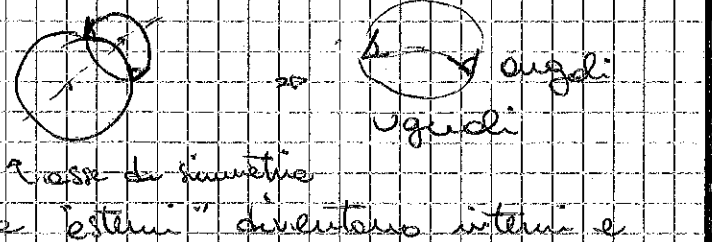
Se $a=0$ (retta $bx+cy+d=0$)

se $d=0$ sono invarianti

se $d \neq 0$ diventano circonferenze passanti da 0

Sia φ la circonferenza di inversione, C una circonferenza
- Se sono disgiunte restano tali, però quelle fuori vanno dentro rimpicciolendo e quelle dentro vanno fuori ingrandendo

Se sono secanti



gli angoli di incidenza "esterni" diventano interni e viceversa

Circonferenze con incidenze rette con la circ. di inversione restano fisse

L'inversione circolare vive naturalmente nella compattificazione di Alexandrov (scambia 0 con ∞)

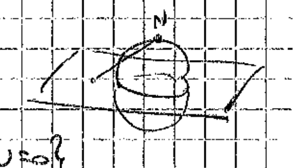
SFERA DI RIEMANN

$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$$S^2 \setminus \{\overset{N}{(0,0,1)}\} \xrightarrow{P_N} \mathbb{R}^2$$

$$\overset{\Psi}{P} \longmapsto \text{retta } PN \cap \{u=0\}$$

$\{u=0\} = \mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x = 0 + t x_0 \\ y = 0 + t y_0 \\ u = 1 + t(u_0-1) \end{cases} \cap \{u=0$$

$$\rightsquigarrow 0 = 1+t(u_0-1) \rightsquigarrow t = \frac{1}{-u_0+1} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{x_0}{-u_0+1} \\ y = \frac{y_0}{-u_0+1} \end{cases} \qquad z = x+iy = \frac{x_0}{-u_0+1} + i\frac{y_0}{-u_0+1}$$

Stessa cosa dal polo sud P_S

$$\begin{cases} x = 0 + t x_0 \\ y = 0 + t y_0 \\ u = -1 + t(u_0+1) \end{cases} \cap \{u=0\} \underset{t=\frac{1}{u_0+1}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x = \frac{x_0}{u_0+1} \\ y = \frac{y_0}{u_0+1} \end{cases} \qquad W = x+iy = \frac{x_0}{u_0+1} + i\frac{y_0}{u_0+1}$$

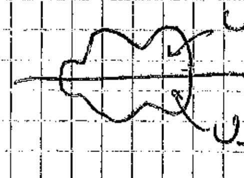
$$\overline{W} z = \frac{x_0^2+y_0^2}{1-u_0^2} = 1$$

(le 2 proiezioni stereografiche sono diverse di un ρ)

Prendendo un atlante di carte su S^2, il cambiamento di carte $P_N \circ P_S^{-1}$ è antiolomorfo. Se P_S la definisco scegliendo $w = x - iy$ allora il cambiamento di carte diventa olomorfo.

Principio di simmetria:

U aperto connesso simmetrico rispetto all'asse reale



f è una funz. olom. su U^+ e continua su $U^* \cap \{y \geq 0\}$ e a valori reali su $\mathbb{R} \cap U$

Allora c'è uno solo g olomorfo su U tale che $g|_{U_+} = f$

DIM $z \in U_-^*$ $\Rightarrow$ $\bar{z} \in U_+$ e $\overline{f(\bar{z})} = g(z)$

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{su } U \cap \{y \geq 0\} \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{su } U_- \end{cases}$$ è a valori reali su $\mathbb{R} \cap U$

$\Rightarrow$ g è olomorfo su $U_+ \cup U_-$ e continua su U. $\Rightarrow$ $g(z)dz$ è chiusa

TEOREMA (DELLA MAPPA APERTA)

$f: U \to \mathbb{C}$ olomorfo non costante, U connesso $\Rightarrow$ f è aperta

DIM. Basta dimostrarlo nell'intorno di ogni punto $z_0 \in U$

$$f'(z_0) \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}$$

Se $f'(z_0) \neq 0$ f ha un'inversa g olomorfa in un intorno di z_0 (Dini + l'inversa di appl. conforme diretta è conforme diretta)

[Questo prova in particolare che se $S \circ T = x$ e S è convergente anche T lo è.]

$\Rightarrow$ f è un biolomorfismo (omeomorfismo biolomorfo) e quindi aperto.

Se $f'(z_0) = 0$: $f(z) = f(z_0) + \sum_{m \geq k} a_k (z-z_0)^k$ $a_k \neq 0$

$f(z) - f(z_0) = a_k (z-z_0)^k h(z)$ con $h(z_0) = 1$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^* \arrow[d, "\text{esponenziazione alla } k \text{ (rivestimento)}"] \\ D \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "h"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Prendo b tale che $b^k = a_k$

$f(z) - f(z_0) = (b(z-z_0)g(z))^k$ $h(z) = g(z)^k$

La traslazione è aperta, basta dimostrare che $(b(z-z_0)g(z))^k$ è aperta

La derivata di quella dentro è $bg(z) + b(z-z_0)g'(z)$, valutata in z_0 viene $bg(z_0) \neq 0$ perché $g(z_0) = \sqrt[k]{\underset{1}{h(z)}} = \xi_k \neq 0$ (e $b \neq 0$) quindi si rientra nel caso sopra

Resta quindi da dimostrare che $\begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ w \mapsto w^k \end{array}$ è aperta

L'immagine di $B(0,\rho)$ è $B(0,\rho^k)$

OSS – Una funz. olom. non costante non può avere punti di massimo modulo in punti interni al dominio di definizione.

DIM: Se avesse max interno allora l'immagine di un intorno (è aperta) ha il max in un punto interno. Ma allora trovo un dischetto di centro lui e da qualche parte il modulo sale.

GEOMETRIA II _ LEZIONE 50

La sfera di Riemann è isomorfa a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (con la struttura complessa)
il cambiamento di carte è $z \longmapsto \frac{1}{z}$

$f(z) = \sum a_n z^n$

$z = re^{i\theta}$ $\rightsquigarrow f(re^{i\theta}) = \sum a_n r^n e^{in\theta}$

[illegible] $e^{ip\theta} f(re^{i\theta}) = \sum a_n r^n e^{i(n-p)\theta}$

Integro $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum a_n r^n e^{i(n-p)\theta} = \frac{1}{2\pi}\sum \int_0^{2\pi} a_n r^n \underbrace{e^{i(n-p)\theta}}$

se $n \neq p$ l'integrale fa sempre ~~0~~ zero (integro in $d\theta$)

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi} a_n r^n \int_0^{2\pi} d\theta = a_n r^n$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})d\theta$

Quindi $|a_n| r^n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{-in\theta} f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$

Chiamo $M(r) = \sup_{|z|=r} |f|$ $\leq M(r)$

$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$

$f(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$ = media dei valori in circonferenza centrata in zero

proprietà della media per funz. olomorfe

TEOREMA f olomorfa su $\mathbb{C}$ limitata. Allora f è costante

DIM: $\Omega = \mathbb{C}$ $M(r)$ limitata. Allora per $n > 0$

$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \longrightarrow 0$ per $r \to +\infty$, dunque $a_n = 0$

Cioè $f = a_0$ costante

COROLLARIO (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

DIM: Se $p(z)$ e non costante $\neq 0$ (per assurdo), allora prendo

$f(z) = \frac{1}{p(z)}$ allora $f(z)$ è limitata, è olomorfa

$\Rightarrow$ costante $\Rightarrow p(z)$ costante. Assurdo.

LEMMA: Principio del massimo modulo

f olomorfa in Ω aperto, $a \in \Omega$, a max locale per $|f|$

$\Rightarrow \exists$ intorno di a in cui f è costante.

COROLLARIO: Ω relativamente compatto ($\overline{\Omega}$ cpt), connesso

f olomorfa in Ω e continua in $\overline{\Omega}$, allora:

se $|f|$ raggiunge $\sup|f|$ in Ω, allora f costante in $\overline{\Omega}$

DIM: Sia $M = \sup_{\partial\Omega} |f|$ $M' = \sup_{\Omega} |f|$. Se esiste $a \in \Omega$ tale che $|f(a)| = M'$, allora $|f(x)| = M'$ in un aperto e chiuso, allora lo è in Ω, allora per continuità $M' = M$ e f è costante

COROLLARIO: Se f su S^2 di Riemann è olomorfa ovunque, allora è costante.

Segue che le olomorfe non costanti "fanno danni all'infinito"

DIM (LEMMA - PRINCIPIO DEL MAX): per la proprietà della media

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$ e $a_0 \leq M(r)$

$\boxed{?}$

Se a_0 è punto di max locale per $|f|$, allora $|a_0| = M(r)$

Supponiamo $|f(0)| \neq 0 \Rightarrow f(0) > 0$

se $g(z) = \mathrm{Re}(f(0) - f(z))$ è continua, è ≥ 0. $\Rightarrow 0 = g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta$

$\Rightarrow f$ costante.

OSS. $\sum a_n \frac{1}{z^n}$ converge per $\left|\frac{1}{z}\right| < R$ raggio di convergenza di $\sum a_n w^n$

TEOREMA: Siano D_1, D_2 dischi ($D_1 \subsetneq D_2$) e sia $C = D_2 \setminus \overline{D_1}$ corona circolare: se f è analitica in C, $f = \sum a_n z^n$, allora esistono f_1, f_2 con $f_1 \in A(D_2)$, $f_2 \in A({}^cD_1)$ con $|f_2| \to 0$ per $|z| \to +\infty$ tali che $f = f_1 + f_2$ in C. Tale scrittura è unica.

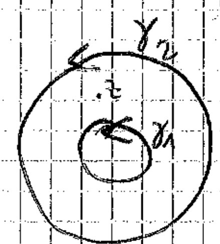
DIM: UNICITÀ: $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2 \Rightarrow$ Definisco $h = \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{in } D_2 \\ g_2 - f_2 & \text{in } {}^cD_1 \end{cases}$

è olomorfa in $\mathbb{C}$ e va a 0 a $+\infty$

dunque è costantemente nulla.

GEOMETRIA II - LEZIONE 51

DIM: ESISTENZA



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2} f(t)\cdot\left(\frac{1}{t}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-z/t}}_{\text{geometrica}}\right)dt - \int_{\gamma_1} f(t)\cdot\left(-\frac{1}{z}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-t/z}}_{\text{geometrica}}\right)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t}\cdot\left(1+\frac{z}{t}+\dots\right)dt + \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{z}\cdot\left(1+\frac{t}{z}+\dots\right)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n<0} a_n z^n\right]$$

$$\text{con} \quad a_n := \begin{cases} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt & \text{per } n\geq 0 \\ \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt & \text{per } n<0 \end{cases}$$

Ho così scritto $f(z) = f_1 + f_2$ e $|f_2(z)| \longrightarrow 0$ per $|z| \to +\infty$

Def $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ si dice serie di Laurent.

COROLLARIO: Se f olomorfa in un disco D tranne nel punto P, ma in quel punto f è limitata, allora f è olomorfa anche lì

OSS Se g olomorfa in z allora g "può avere solo una singolarità eliminabile ~~Polare~~ in z".

- $\{|z|<1\} = D$ $\quad f: D\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua sul bordo e a valori reali (sul bordo)

  Allora f si estende olomorfa a tutto $\mathbb{C}^*$

  DIM: $\frac{1}{z}$ è antiolom. $\Rightarrow f(\frac{1}{z})$ è antiolom. $\Rightarrow \overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}$ olom.

  Per $|z|>1$, definisco $g(z) := \overline{f(\frac{1}{\bar z})}$ che si incolla a f

- $H = \{y\geq 0\}$ f continua su H olomorfa in $\mathring{H}$ a valori immaginari sul bordo. Allora estendo

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{per } y\geq 0 \\ -\overline{f(\bar z)} & \text{se } y<0 \end{cases}$$

OSS - f olomorfa in (un intorno di z_0) $\setminus\{z_0\}$

- Singolarità eliminabile $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$ per $n<0$ $\Leftrightarrow \exists$ finito $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$

  cioè f limitata

- Singolarità polare $\Leftrightarrow$ la serie di Laurent di f comincia da $-K$ $\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$

  cioè $(z-z_0)^K f(z)$ è olomorfa in z_0

- Singolarità essenziale $\Leftrightarrow$ la serie di Laurent ha infiniti termini negativi $\Leftrightarrow \nexists \lim_{z\to z_0} |f(z)|$

  cioè nessuna delle altre

- LE singolarità essenziali si conservano per composizione.
- f olomorfa in $|z|>R$, ∞ è singolarità isolata per f

  f è olomorfa in $R<|z|<\infty$

  $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \qquad z = \frac{1}{w} \qquad f(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^{-n}$

  Guardo sing. in 0.

  Devo vedere i termini positivi di $f(z)$

GEOMETRIA III . LEZIONE 52 — 24 MAGGIO compitino

LEMMA DI Schwartz

f olomorfa in $D(0,r)$ a valori in D e $f(0)=0$

allora 1) $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D$

2) Se $|f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow f(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$

DIM: $f(0)=0 \Rightarrow \frac{f(z)}{z}$ è olomorfa

$|z| = r$

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r}$$ Per il principio del max

è vero $\forall z$ con $|z| \leq r$

È vero $\forall r < 1 \Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$ su tutto il disco

cioè $|f(z)| \leq |z|$

Se $|f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow z_0$ è punto di max per $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$

$\Rightarrow \frac{f(z)}{z} = \lambda$ costante con $|\lambda| = 1$

RESIDUO

- f olomorfa in $\rho_2 < |z| < \rho_1$. posso scrivere la serie di Laurent.

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

$f(z)dz$ è chiusa e

$$f(z) = \sum_{n<-1} a_n z^n + a_{-1} z^{-1} + \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$$\int_\gamma a_n z^n dz = \left[a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)}$$ ben definita per $n \neq -1$

Per ogni γ chiusa dentro la corona vale

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot a_{-1} \cdot I(\gamma, 0)$$

Def a_{-1} si dice residuo di f : $a_{-1} := Res(f, 0)$

OSS. Se $f(z)dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n dz$ effettuando il cambio di carte sulla sfera di Riemann $z = \frac{1}{z'}$ $dz = -\frac{1}{z'^2}dz'$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma -\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) dz = \sum_n \left(\int a_n (z')^{-n-2} dz'\right)$$

$-n-2=-1$
$\Downarrow$
$n=-1$

Quindi $Res(f, \infty) = -a_{-1}$

TEOREMA DEI RESIDUI

Sia K un compatto di S^2 con frontiera $\Gamma = \bigcup \gamma_i$ con γ_i diff. a tratti f olomorfa in un intorno aperto di K tranne in un discreto Z con $Z \cap \Gamma = \emptyset$

Allora $$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i \in I} Res(f, z_i)$$

$z_i \in \overset{\circ}{K}$ per $i \in I$

DIM: • Se $\infty \notin K$

isoliamo le singolarità $z_1, \ldots, z_e$ di f in K con piccoli dischi aperti $B(z_i, r_i)$ disgiunti e che non incontrano Γ

finite perché discreto in cpt

$$K' := K \setminus \bigcup_{i \in I} B(z_i, r_i)$$

$$\int_{\partial K'} f(z)dz = 0 = \int_{\partial K} f(z)dz - \sum_{i=1}^{e} \int_{|z-z_i|=r_i} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{e} Res(f, z_i)$$

• se $\infty \in K$, posso supporre (a meno di cambio carte) $\infty \notin \Gamma$

$$K' := K \cap \{|z| \leq R\}$$

$$\int_{\partial K'} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz + \int_{|z| \leq R} f(z)dz$$

$\int_{\partial K'} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f, z_i)$ con z_i singolarità (tranne ∞, se fosse anch'essa singolarità)

$\int_{\partial K} f(z)dz = 2\pi i \int_K f(z)dz$

$\int_{|z| \leq R} f(z)dz = -2\pi i\, Res(f, \infty)$

COROLLARIO: Se f è olomorfa in $S^2 \setminus \{z_1, \ldots, z_e\} \Rightarrow \sum Res(f, z_i) = 0$

OSS $f(z)$ ha polo semplice in z_0 $\quad f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ il residuo è $g(z_0)$

$$g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

OSS. f razionale $f=\frac{Q(z)}{P(z)}$ z_0 radice semplice del denominatore

$P(z) = a(z-z_0)h(z)$

$P'(z) = a h(z) + a(z-z_0)h'(z)$

$P'(z_0) = a h(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{Q(z_0)}{P'(z_0)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{Q(z)}{P(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{Q(z)}{a h(z)}$

OSS. Se z_0 è polo multiplo → $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ si deriva fino a dove serve

Esempio: $\frac{e^{3iz}}{z(z^2+1)^2} = \underbrace{\frac{e^{3iz}}{z(z+i)^2}}_{a_2}\cdot\underbrace{\frac{1}{(z-i)^2}}_{\frac{1}{z'^2}}$

Voglio $\mathrm{Res}(f,i)$

io voglio a_{-1}, quindi derivo 1 volta (il coefficiente)

OSS - $f(z)$ meromorfa in D e z_i zero o polo di f.

Come calcolo $\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_i\right)$?

derivata logaritmica

→ $f(z) = (z-z_0)^\ell h(z)$ con $h(z_0)\neq 0$ e h olomorfa in un intorno di z_0. Allora $f'(z) = \ell(z-z_0)^{\ell-1}h(z) + (z-z_0)^\ell h'(z)$

Quindi:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \ell(z-z_0)^{-1} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

se $\ell=0$ il residuo è 0

se $\ell<0$ z_0 è polo di molt. $-\ell$ e il residuo è ℓ

se $\ell>0$ z_0 è zero di molt. ℓ e il residuo è ℓ.

Dunque:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = |\{zeri\}| - |\{poli\}|$$

con molteplicità

COROLLARIO: f meromorfa su S^2, ha tanti zeri quanti poli

Esercizio: $\mathcal{M}(S^2)$ = corpo funzioni meromorfe =
$= \mathbb{C}(z)$ = funzioni razionali

OSS- f olomorfa in un intorno di K cpt e non assume il valore a su $\partial K = \Gamma$

Allora $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \#\{$radici di $f(z)-a$ in $K\}$ (con molteplicità)

COROLLARIO: f olomorfa in un intorno di z_0, z_0 radice d'ordine K di $f(z)=a$

Allora c'è un intorno V di z_0 e un intorno U di a tale che $f(z)=b$ con $b\in U$ ha esattamente K radici distinte in V

TEOREMA DI ROUCHÉ

f e g olomorfe in un intorno di K cpt dotato di bordo orientato $\Gamma = \bigcup \gamma_i$

Si abbia su Γ $|f(z)| > |g(z)|$

Allora # zeri in K di f+g = # zeri di f in K (con molteplicità)

DIM: #zeri di f+g $= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i}\frac{f'+g'}{f+g}dz = I((f+g)\circ\gamma_i) = I(f\circ\gamma_i)$

$(f+g)\circ\gamma = f\left(1+\frac{g}{f}\right)\circ\gamma$

Esempio: Quante radici in $\frac{1}{2}\le|z|\le 1$ ha

z^5+3z+1

$|z|=1 \Rightarrow |z^5|=1$ $|z\cdot 3+1| \ge |3|-|1| = 2$

Quindi $3z+1$ comanda su z^5 nel disco $|z|\le 1$ e z^5+3z+1 ha allora tante radici quante $3z+1$ $\Rightarrow \boxed{1}$

Allora nella corona ne ha 0 o 1: allo stesso modo

$|z|=\frac{1}{2}$ $|z^5| = \frac{1}{32} < \frac{1}{2} = |3\cdot\frac{1}{2}|-|1| \le |3z+1|$

Quindi nella corona non ci sono zeri.

Esercizio: $f(z) = ze^z$, $ze^z - a = 0$ ha infinite soluzioni

HINT: • PICARD
• TROVA DISCO IN CUI HA TOT. ZERI e POI ROUCHÉ

GEOMETRIA II - LEZIONE 53

INTEGRALI CON IL METODO DEI RESIDUI

① $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt$ con R funzione razionale senza poli sulla circonferenza unitaria

Poniamo $z = e^{it}$ $dz = i e^{it} dt$

$dt = -i \frac{dz}{z}$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$\Rightarrow \int_{z=e^{it}} \underbrace{-\frac{i}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}_{F(z)} dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{poli} \\ \text{contenuti} \\ \text{in disco unitario}}} \operatorname{Res}(F, z)$$

Esempio: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} =$ $a > 1$ $(a \in \mathbb{R})$

$$= \int_{z=e^{it}} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{z=e^{it}} \frac{2\cancel{i}}{2ia + z - \frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{\cancel{i}z}\, dz =$$

$$= \int_{z=e^{it}} \frac{2}{2aiz + z^2 - 1}\, dz$$ $\Delta = 1 - a^2 \neq 0$ sempre

Siano z_0, z_1 le 2 radici (distinte)

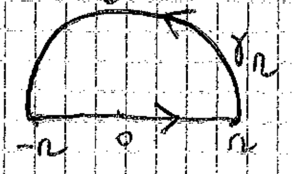
$$\Rightarrow \int_{z=e^{it}} \frac{2}{(z-z_0)(z-z_1)}\, dz \Rightarrow 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{2}{(z-z_0)(z-z_1)}, z_0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{2}{(z-z_0)(z-z_1)}, z_1\right)\right]$$

$$= \frac{2}{z_0 - z_1} + \frac{2}{z_1 - z_0}$$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ con f funzione razionale senza poli sull'asse reale e con $\lim_{|x|\to+\infty} xR(x) = 0$. Allora $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_j \in \{y>0\}} \operatorname{Res}(R, z_j)$

$$\Rightarrow \lim_{r\to+\infty}\left[\int_{\gamma_r} R(z)\,dz + \int_{-r}^{r} R(x)\,dx\right] = 2\pi i \sum_{z_j \in \{y>0\}} \operatorname{Res}(R, z_j)$$

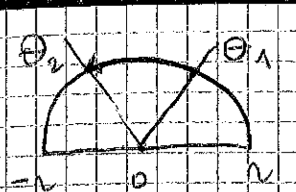
Inoltre



Basta dimostrare che

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} R(z)\,dz = 0$$

LEMMA: f continua in un settore tale che $zf(z) \to 0$ per $|z| \to +\infty$
Allora $\lim_{r\to+\infty} \int f(z)\,dz = 0$



$\{z \mid \theta_1 \le \arg z \le \theta_2\}$

Infatti $\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \le M(r)\, r\,(\theta_2 - \theta_1) \longrightarrow 0$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix}\,dx$ con f funzione olomorfa in un intorno del semipiano superiore chiuso, tranne in un # finito di punti nel semipiano aperto e $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = 0$

Allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{poli semi} \\ \text{superiore} \\ \text{aperto}}} \operatorname{Res}(f e^{ix})$

Basta dire che $\int_{\gamma_r} f(z) e^{iz}\,dz \longrightarrow 0$ per $r \to +\infty$

$z = x + iy$ $y > 0$ $e^{iz} = e^{ix - y}$ $\Rightarrow |e^{iz}| = e^{-y}$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z) e^{iz}\,dz\right| \le M(r) \underbrace{\int_{\gamma_r} |e^{iz}|\,dz}$$

se proviamo che è limitato da costante non dipendente da r siamo a posto.

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

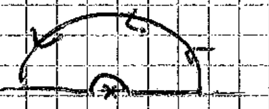
$|e^{iz}| = e^{-r\sin\theta}$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r\sin\theta}\, r\,d\theta \le \int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\cdot r\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\, r\,d\theta \le$$

$$\le 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\frac{2}{\pi}\theta}\, r\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{\alpha t}\,dt \le 2\int_0^{\infty} e^{\alpha t}\,dt =$$

$$2\lim_{r\to+\infty}\left(\int_0^{r} e^{\alpha t}\,dt\right) = -\frac{2}{\alpha} = \pi$$

OSS. Se c'è un polo semplice sull'asse reale,



vorrei che anche $\int_{\substack{\text{arco} \\ \text{piccolo}}} \dots \to 0$

In quel caso allora quel residuo conta solamente per metà ($\pi i a$ invece di $2\pi i a$), avendo solo metà circonferenza.

④ $\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx$ $0<\alpha<1$ R razionale senza poli sull'asse reale ≥ 0

$\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$

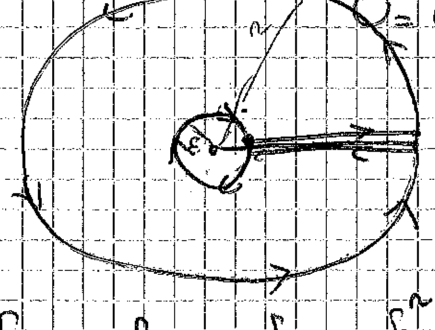
Allora $\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-e^{-2\pi i\alpha}} \cdot 2\pi i \sum_{\text{sing. in } U} \text{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right)$

$\boxed{z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg(z)}}$

$z^\alpha = e^{\log z^\alpha}$

Prendo U sempl. connesso in $\mathbb{C}^*$

$U = \mathbb{C} \setminus \{\text{asse reale} \geq 0\}$



$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha\cdot 0}$

$z^\alpha = |z|^\alpha \cdot e^{\alpha 2\pi}$

$$\int_\gamma = \int_{\gamma_r} - \int_{\gamma_\varepsilon} + \int_\varepsilon^r \text{con arg} = 0 - \int_\varepsilon^r \text{con arg} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{R(z)}{z^\alpha}\, dz = 2\pi i \sum_{\text{sing. in } U} \text{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to+\infty}} \int_\gamma \frac{R(z)}{z^\alpha}\, dz = \left(1 - e^{-2\pi i\alpha}\right) \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx$$

⑤ $\int_0^{+\infty} R(x) \log x\, dx$ R razionale senza poli in $[0, +\infty)$

con $\lim_{x\to\infty} x R(x) = 0$

$0 < \arg \log z < 2\pi$

$R(z) \log z$

$\log z = \log|z| + i \arg z$ $0 \leq \arg z \leq 2\pi$

Considero $\int_\gamma R(z) \log^2 z\, dz$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to+\infty}} \int_\gamma R(z)\log^2 z\, dz = \begin{cases} 2\pi i \sum \text{Res}\left(R(z)\log^2 z\right) \\ -2\int_0^\infty R(x)\log x\, dx - 2\pi i \int_0^\infty R(x)\, dx \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \int_0^\infty R(z)\log^2 z\, dz - \int_0^\infty R(x)\left(\log x + 2\pi i\right)^2 =$$

$$= c_1 \int_0^\infty R(x)\, dx + c_2 \int_0^\infty R(x) \log x\, dx$$

GEOMETRIA II _ FUORI PROGRAMMA

TEOREMA DI RIEMANN:

Se $D \subseteq S^2$ Riemann è sempl. connesso e se $S^2 \setminus D$ contiene almeno 2 punti, allora

$$\exists f\colon D \to \mathbb{D} = \{|z|<1\} \text{ biolomorfismo}$$