

Teoria dei Nodi e Rivestimenti Ramificati della 3-Sfera

SIMONE CAPPELLINI

<http://poisson.phc.dm.unipi.it/~cappellini>

21 aprile 2020

Introduzione

Lo scopo di questo seminario è quello di mostrare un collegamento tra 3-varietà chiuse orientabili e nodi che passi dalla teoria dei rivestimenti ramificati. Il teorema principale che verrà dimostrato è il Teorema di Hilden-Montesinos, che afferma che ogni 3-varietà chiusa orientabile si realizza come rivestimento triplo di S^3 ramificato lungo un nodo.

Prima di entrare nel merito dell'enunciato però, mostreremo qualche semplice risultato sui rivestimenti ramificati in dimensione 2 utili a introdurre il teorema principale.

1 Rivestimenti ramificati di superfici

Definizione 1.1. Una applicazione continua tra superfici $p: M^2 \rightarrow N^2$ è detta *rivestimento ramificato* se esistono finiti punti $x_1, \dots, x_n \in N$, detti *punti di ramificazione*, tali che la controimmagine $p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ è discreta e la restrizione di p a $M \setminus p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ è un rivestimento.

Si dimostra facilmente che preso un disco U sufficientemente piccolo intorno ad un punto di ramificazione y , l'insieme $p^{-1}(U)$ è costituito da una unione di dischi sui quali p si comporta come l'applicazione (di variabile complessa) $z \mapsto z^k$ per un qualche k . Se dunque in un piccolo intorno di $x \in p^{-1}(y)$ il rivestimento si comporta come la mappa sopra descritta diremo che x ha *indice di ramificazione* k .

Teorema 1.2. *Sia Σ una superficie compatta orientabile senza bordo. Allora esiste un rivestimento (possibilmente) ramificato $p: \Sigma \rightarrow S^2$.*

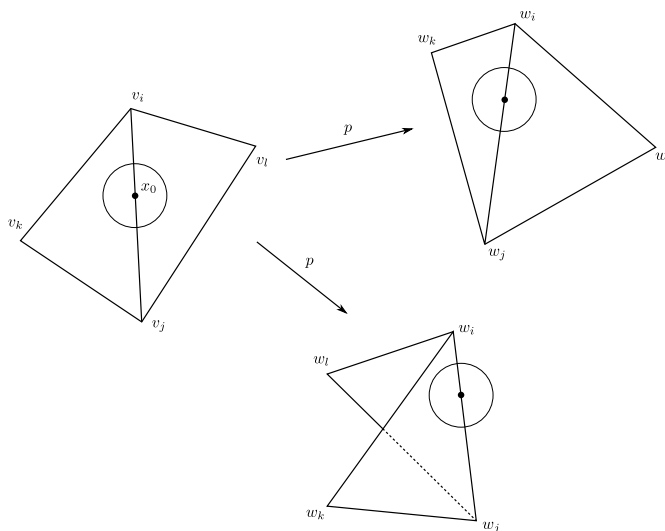
Dimostrazione. Consideriamo una triangolazione della varietà Σ e chiamiamo v_1, \dots, v_n i vertici. Sulla sfera prendiamo n punti w_1, \dots, w_n in posizione generale (ovvero in modo che non ci siano 3 punti allineati né punti antipodali). Con tali ipotesi è sempre ben definito il triangolo sferico avente per vertici 3 vertici qualsiasi tra i w_j . Per ogni 2-simplexso

$[v_i, v_j, v_k]$ di Σ , consideriamo le isometrie (dopo aver messo metriche Riemanniane su Σ e S^2)

$$f_1: [v_i, v_j, v_k] \longrightarrow [w_i, w_j, w_k] \qquad f_2: [v_i, v_j, v_k] \longrightarrow \text{Clos} \left(S^2 \setminus [w_i, w_j, w_k] \right)$$

che mandano ogni v_i in w_i . Fissate delle orientazioni per Σ e S^2 , scegliamo di costruire p utilizzando f_1 se le orientazioni dei triangoli indotte dall'ordine dei vertici sono entrambe coerenti o sono entrambe l'opposta rispetto alle orientazioni messe sulle superfici, e utilizzando f_2 altrimenti.

Dimostriamo adesso che abbiamo così costruito un rivestimento ramificato sull'insieme $\{w_1, \dots, w_n\}$: ovviamente i punti interni ai 2-simplessi sono regolari per p ; verifichiamo dunque che anche i punti interni agli 1-simplessi lo sono.

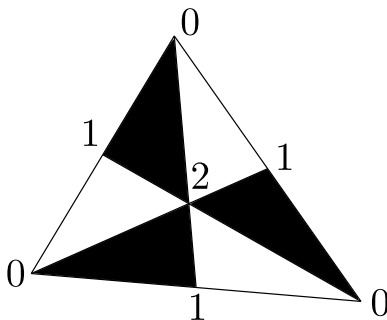


Preso un 1-simplesso $[v_i, v_j]$, supponiamo che esso sia faccia comune ai triangoli $[v_i, v_j, v_k]$ e $[v_i, v_j, v_l]$. Nella sfera S^2 , il cerchio massimo passante per w_i e w_j o separa i punti w_k, w_l oppure no. Nel primo caso significa che per entrambi i triangoli abbiamo costruito p utilizzando f_1 (oppure f_2), mentre nel secondo caso abbiamo utilizzato una volta f_1 ed una f_2 . In ogni caso un intorno sufficientemente piccolo di un punto interno a $[v_i, v_j]$ viene mappato omeomorficamente sull'immagine. \square

Il risultato precedente, per quanto ci indichi l'esistenza di rivestimenti (possibilmente) ramificati, non dà informazioni sull'insieme di ramificazione. Sicuramente, se $g > 0$, deve esserci almeno un punto. Qual è allora il minimo numero di punti di ramificazione al variare di g ? Il prossimo Teorema fornisce una risposta parziale a tale domanda.

Teorema 1.3. *Sia Σ una superficie compatta senza bordo orientata di genere $g \geq 1$. Allora esiste un rivestimento ramificato $p: \Sigma \longrightarrow S^2$ con esattamente 3 punti di ramificazione.*

Dimostrazione. Ricalcando la dimostrazione precedente, consideriamo una qualsiasi triangolazione di Σ e prendiamone la suddivisione baricentrica. Assegniamo il numero 0 ad ogni vertice della triangolazione originale, il numero 1 a tutti i baricentri degli 1-simplessi e il numero 2 ai baricentri dei 2-simplessi. Adesso coloriamo ogni triangolo di bianco o di nero in base alla concordanza o meno dell'orientazione data dall'ordine dei vertici con l'orientazione di Σ .



Consideriamo S^2 come un Δ -complesso costituito da 2 triangoli incollati per il bordo. Coloriamone uno di bianco e l'altro di nero e costruiamo il rivestimento mandando ogni triangolo della suddivisione baricentrica nel triangolo dello stesso colore in S^2 via isometrie. L'aver introdotto la suddivisione della triangolazione assicura che tutti e 3 i vertici in S^2 siano punti di ramificazione. \square

Abbiamo dunque dimostrato che per ogni $g \geq 1$ il numero minimo di punti di ramificazione per un rivestimento su S^2 è minore o uguale a 3. La seguente breve digressione ci porta a dire che tale minimo è esattamente 3, indipendentemente da g .

1.1 La formula di Riemann-Hurwitz

La formula di Riemann-Hurwitz permette di generalizzare la dipendenza della caratteristica di Eulero tra spazio totale e spazio base di un rivestimento.

Teorema 1.4 (Formula di Riemann-Hurwitz). *Sia $p: M \rightarrow N$ un rivestimento ramificato tra superfici di grado n , con x_1, \dots, x_l le controimmagini dei punti di ramificazione e d_1, \dots, d_l i corrispondenti indici di ramificazione. Allora vale che*

$$\chi(M) + \sum_{i=1}^l (d_i - 1) = n\chi(N).$$

Dimostrazione. Innanzitutto riscriviamo l'uguaglianza cercata in una forma più comoda. Siano d_1, \dots, d_{a_1} gli indici di ramificazione delle controimmagini di un punto, $d_{a_1+1}, \dots, d_{a_1+a_2}$

quelli relativi ad un secondo punto e così via. Osserviamo intanto che studiando il comportamento intorno ai punti singolari si ottiene

$$d_1 + \dots + d_{a_1} = d_{a_1+1} + \dots + d_{a_1+a_2} = \dots = n,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^l (d_i - 1) = (n - a_1) + (n - a_2) + \dots = kn - a_1 - \dots - a_k,$$

dove k è il numero di punti di ramificazione in N . Dunque la formula può essere riscritta come

$$\chi(M) = n(\chi(N) - k) + a_1 + \dots + a_k.$$

Spezzando le due varietà come $M = A_M \cup B_M$ e $N = A_N \cup B_N$, dove A_N è unione di piccoli dischi intorno all'insieme di ramificazione,

$$B_N = \text{Clos}(N \setminus A_N), \quad A_M = p^{-1}(A_N) \quad \text{e} \quad B_M = \text{Clos}(M \setminus A_M),$$

si ottiene la formula cercata poiché

$$\chi(A_N) = k, \quad \chi(A_M) = a_1 + \dots + a_k \quad \text{e} \quad \chi(B_M) = n\chi(B_N).$$

□

La formula ci permette adesso di rispondere completamente alla domanda sul minimo numero di punti di ramificazione di un rivestimento della sfera. Infatti:

Corollario 1.5. *Se Σ è una superficie compatta orientata senza bordo di genere $g \geq 1$, non esistono rivestimenti ramificati $p: \Sigma \rightarrow S^2$ con meno di 3 punti di ramificazione.*

2 Rivestimenti ramificati di 3-varietà

Dopo aver sondato il terreno con i rivestimenti ramificati di superfici, entriamo più nel dettaglio riguardo alle 3-varietà. Vedremo che i rivestimenti forniscono un ponte di collegamento tra lo studio dei nodi e lo studio delle 3-varietà. Estendiamo dunque la definizione data per superfici anche in dimensione 3:

Definizione 2.1. Un rivestimento ramificato tra due 3-varietà M, N è una applicazione continua $p: M \rightarrow N$ tale per cui esista un sottocomplesso 1-dimensionale $L \subseteq N$ la cui immagine inversa $p^{-1}(L)$ sia anch'essa un sottocomplesso 1-dimensionale sul cui complementare la restrizione di p è un rivestimento.

I due teoremi enunciati e dimostrati in precedenza nel caso 2-dimensionale si estendono in modo completamente analogo con le corrispettive dimostrazioni e dunque vale il seguente teorema:

Teorema 2.2 (Alexander). *Sia M^3 una 3-varietà compatta, orientata, senza bordo. Allora esiste un rivestimento ramificato $p: M \rightarrow S^3$.*

In particolare, esiste un rivestimento il cui insieme di ramificazione è l'1-scheletro di un 3-simplesso (ovvero un tetraedro).

Come già detto, vorremmo collegare lo studio delle 3-varietà con quello dei nodi, per cui il nostro obiettivo sarà quello di migliorare gli enunciati precedenti richiedendo che l'insieme di ramificazione sia un nodo e la controimmagine di tale insieme sia anch'essa una 1-varietà.

Ottenere risultati in questo senso sarà più difficile e richiederà del lavoro. La prossima sezione è destinata interamente in tal senso.

3 Presentazione di 3-varietà tramite rivestimenti ramificati

Lo scopo di questa sezione è quello di dimostrare il seguente teorema, che migliora il Teorema di Alexander sull'esistenza di rivestimenti ramificati su S^3 .

Teorema 3.1 (Hilden-Montesinos). *Per ogni 3-varietà M compatta orientata senza bordo esiste un rivestimento a 3 fogli $p: M \rightarrow S^3$ ramificato lungo un nodo.*

Questo enunciato migliora quello di Alexander nel senso che specifica il grado del rivestimento e ci permette di lavorare con insiemi di ramificazione che siano sottovarietà che per di più possono essere supposte connesse. Grazie a questo risultato otteniamo dunque un collegamento diretto tra 3-varietà e teoria dei nodi: ogni 3-varietà può essere descritta da un nodo e da un rivestimento ramificato triplo lungo di esso, che a sua volta è codificato da una 3-colorazione degli overarcs del nodo.

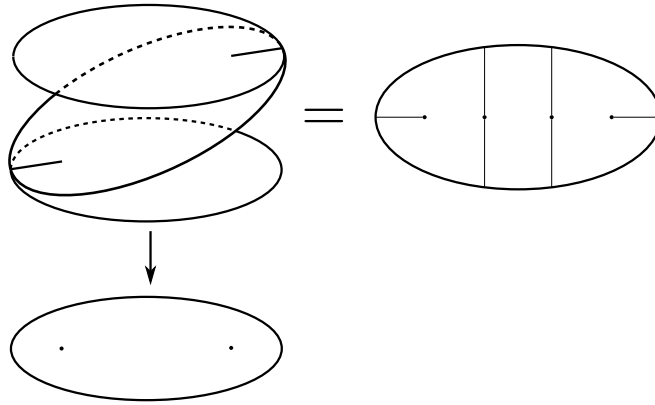
Oltre al teorema precedente, che fissa il grado del rivestimento e lascia variare il nodo al variare dello spazio rivestente, si può cercare di lasciare libertà sul numero di fogli vincolando l'insieme di ramificazione ad essere un nodo (o link) predeterminato. Nasce così il concetto di *link universali*, per i quali ogni 3-varietà compatta orientata senza bordo può essere presentata come un rivestimento di S^3 ramificato lungo essi.

Sono link universali ad esempio il link di Borromeo, il nodo Figura-8, mentre non è universale il nodo Trifoglio.

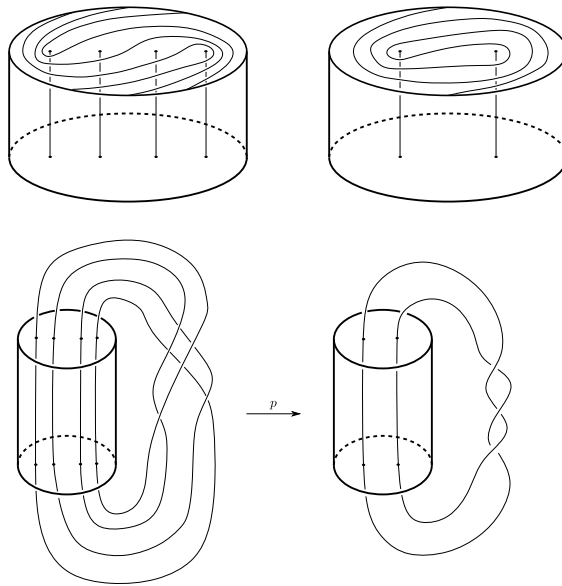
Nel corso della dimostrazione utilizzeremo più volte il seguente fatto: se $p_i: M_i \rightarrow N_i$ è un rivestimento ramificato per $i = 1, 2$ così come $p_i|_{\partial M_i}$, e $g: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$, $f: \partial N_1 \rightarrow \partial N_2$ sono omeomorfismi, allora sull'incollamento delle varietà lungo il bordo tramite tali omeomorfismi si mantiene la proprietà di rivestimento se e solo se $p_2 \circ g = f \circ p_1$.

Dimostrazione. Iniziamo definendo un rivestimento ramificato $p: S^3 \rightarrow S^3$ che verrà poi modificato fino ad ottenere l'applicazione $p: M \rightarrow S^3$ voluta. Sia $D^2 \rightarrow D^2$ il rivestimento triplo con 2 punti ramificati come in figura sotto e consideriamone il prodotto

cartesiano per $[0, 1]$.

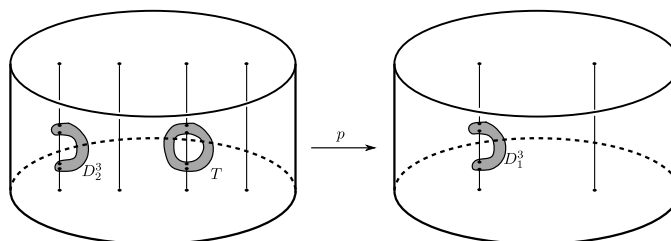


Se prendiamo adesso due copie di entrambi i $D^2 \times [0, 1]$ e li incolliamo al bordo tramite la funzione identità otteniamo un rivestimento ramificato di S^3 , ramificato però su un link (banale) di due componenti. Per ovviare a questo problema incolliamo in modo diverso i bordi dello spazio totale e della base: definiamo $\rho_{3\pi}, \rho_\pi: D^2 \times \{1\} \rightarrow D^2 \times \{1\}$ omeomorfismi che fanno l'identità sul bordo e ruotano rispettivamente di 3π e di π i punti ramificati, e incolliamo i bordi del cilindro rivestente usando ρ_π sulla faccia superiore e id altrove, mentre usiamo $\rho_{3\pi}$ esteso con id per lo spazio base.

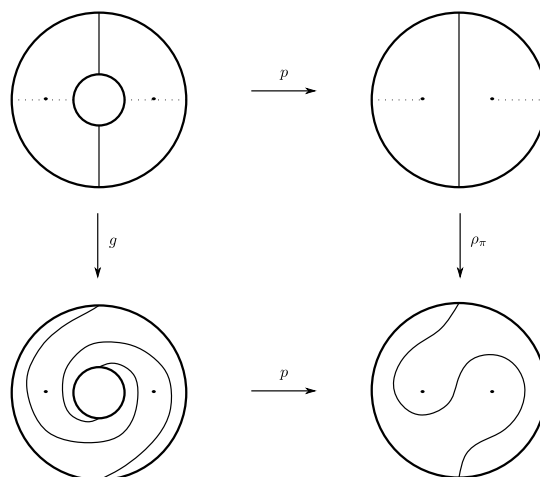


Si verifica che utilizzando tali funzioni di incollamento la proprietà di rivestimento viene mantenuta, da cui siamo arrivati ad ottenere $p: S^3 \rightarrow S^3$ ramificato lungo un nodo. Ciò che ci resta adesso è trovare un metodo per modificare per chirurgia le due sfere (stando attenti a mantenere la proprietà di rivestimento) in modo tale da trasformare lo spazio totale in M lasciando però invariato lo spazio base S^3 .

La strategia si basa sulla seguente costruzione: nella base prendiamo un D_1^3 come nella figura sotto (o isotopo ad esso relativamente all'insieme di ramificazione), in modo che la sua controimmagine sia costituita da una palla D_2^3 e da un toro solido T .



Osserviamo che $p|_{D_2^3}$ è un omeomorfismo mentre $p|_T$ è un rivestimento doppio (che può essere visto come il prodotto per $[0, 1]$ di un rivestimento dell'anello sul disco con due punti ramificati). Fattorizzando $T = A \times [0, 1]$ e $D_1^3 = D_2 \times [0, 1]$, facciamo una chirurgia lungo T e lungo D_1^3 che preservi il rivestimento: analogamente a prima, definiamo degli omeomorfismi dei bordi in loro stessi che siano l'identità ovunque tranne che sulla faccia superiore, dove invece consideriamo il twist di π dei due punti nella base ρ_π e un opportuno omeomorfismo g su $A \times \{1\}$:



La motivazione che sta sotto a tale scelta è che nello spazio di base l'effetto della chirurgia è

l'aver creato un kink (cioè una mossa Reidemeister I), così come sulla controimmagine del nodo con indice di ramificazione 1. Sull'altra preimmagine invece abbiamo tolto un toro solido (non annodato) e lo abbiamo ricolato lungo la curva $m \pm l$, vale a dire abbiamo effettuato una chirurgia di Dehn ± 1 lungo un unknot.

È chiaro adesso dove vogliamo andare a parare. Vogliamo applicare il Teorema di Lickorish-Wallace per ottenere M a partire da S^3 effettuando chirurgie di Dehn lungo un link di unknots. L'unico ostacolo per la sua applicazione è trovare il giusto posizionamento del link in S^3 in modo da preservare il rivestimento, e in tal senso abbiamo illustrato in precedenza la strategia base. Dobbiamo dunque posizionare il link in modo tale che: ogni componente K_i sia un unknot con framing ± 1 simmetrico rispetto ad una delle due componenti con indice di ramificazione 2 (senza perdita di generalità l_1), l'intersezione $K_i \cap l_1$ consista di 2 punti, $K_i \cap l_2 = \emptyset$ e sia unlinked con l_2 .

Sia quindi L un link di unknots con framing che definisce M per chirurgia. Trasformiamo il link come voluto (senza perdita di generalità visualizziamolo in \mathbb{R}^3):

- Step 1. Scegliamo un piano che non intersechi L e al suo interno consideriamo una retta l_1 (che giocherà il ruolo di uno dei due strands della componente ramificata nella preimmagine);
- Step 2. Sia $S(L)$ il simmetrico di L rispetto a l_1 e consideriamo $L\#S(L)$ ottenuto in modo che anch'esso sia simmetrico rispetto a l_1 ;
- Step 3. Poiché $L\#S(L)$ potrebbe non essere isotopo ad L , aggiungiamo degli unknots U_i con framing ± 1 intorno ad alcuni crossings di L in modo tale che facendo chirurgie lungo essi $L\#S(L)$ diventi isotopo a $S(L)$, e dunque a L . Queste nuove componenti U_i possono essere supposte unlinked e simmetriche rispetto ad un'altra retta l_2 , parallela a l_1 e giacente su un piano anch'esso parallelo a quello scelto nello Step 1 ma dalla parte opposta di L (questa retta giocherà il ruolo dell'altro strand ramificato);
- Step 4. Definiamo su ogni componente di $L\#S(L)$ il framing che corrisponda, dopo le chirurgie lungo gli U_i , al corrispettivo framing per L ;
- Step 5. Trasformiamo il link $L\#S(L) \cup \{U_i\}$ per far diventare il framing di ogni componente ± 1 : aggiungiamo nuovi unknots W_j , ancora simmetrici rispetto a l_2 , unlinked e con framing ± 1 che girano intorno alle varie componenti del link. Questa azione produce quanto voluto.

Effettuando infine la chirurgia di S^3 lungo $L\#S(L) \cup \{U_i\} \cup \{W_j\}$ con il framing imposto si mantiene la proprietà di rivestimento e si ottiene per la varietà totale lo stesso risultato che fare la chirurgia lungo $L\#S(L) \cup \{U_i\}$ con un framing diverso sulle componenti di $L\#S(L)$, che a sua volta produce M utilizzando L con il framing dato dal teorema di Lickorish-Wallace. Abbiamo pertanto concluso la dimostrazione. \square

Il Teorema di Hilden-Montesinos costruisce un rivestimento ramificato su un nodo K la cui preimmagine si divide in un nodo con indice di ramificazione 2 e un nodo non ramificato. La monodromia del rivestimento è quindi un omomorfismo $\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow S_3$ tale che ogni generatore per la presentazione di Wirtinger ha immagine una trasposizione. Di conseguenza la struttura del rivestimento può essere codificata da una 3-colorazione degli overarcs di K .

Concludiamo osservando che la presentazione di una 3-varietà come rivestimento triplo della sfera è, come ci si può aspettare, non unico. Infatti un importante esempio di rivestimento ramificato di S^3 diverso da quelli prodotti dal teorema è quello ciclico di grado n . Vedendo $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, scegliamo una retta l e identifichiamo i punti di \mathbb{R}^3 a meno di una rotazione di angolo $2\pi/n$. Riaggiungendo il punto ∞ otteniamo il rivestimento ciclico $p: \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ di grado n ramificato lungo $l \cup \{\infty\}$, la cui controimmagine coincide con esso e ha indice di ramificazione 3.

