Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Quasimorfismi tra gruppi non abeliani

14 Luglio 2017

Candidato:
Simone Cappellini

Relatore:
Prof. Roberto Frigerio

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione

Preso un gruppo G, lo spazio $\mathcal{Q}(G)$ dei quasimorfismi reali e il suo sottospazio $\mathcal{H}(G)$ dei quasimorfismi reali omogenei sono oggetti classici di studio nell'ambito della teoria geometrica dei gruppi. Una funzione $\alpha\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta quasimorfismo se $|\alpha(gh)-\alpha(g)-\alpha(h)|$ è uniformemente limitato al variare di tutti i $g,h \in G$ ed è detto omogeneo se $\alpha(g^n) = n\alpha(g)$ per tutti i $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$. Nell'ambito della coomologia limitata è interessante lo studio del quoziente $\mathcal{H}(G)/\operatorname{Hom}(G,\mathbb{R})$, che risulta essere isomorfo ad un sottospazio di $H_b^2(G;\mathbb{R})$, il secondo modulo di coomologia limitata di G a coefficienti reali.
Grazie ad un risultato di Nikolai V. Ivanov [Iva90], sappiamo che lo spazio $H_b^2(G;\mathbb{R})$ dotato della seminorma canonica è sempre uno spazio di Banach, per ogni gruppo G. Inoltre, per tutti i gruppi iperbolici come ad esempio il gruppo libero su n generatori F_n, si ha che la dimensione di tale spazio come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale è infinita (e di conseguenza automaticamente non numerabile) [EF97].
Dunque anche lo spazio $\mathcal{H}(F_n)$ ha dimensione infinita e non numerabile su $\mathbb{R}$. Per provare a dare una struttura e una caratterizzazione di tutti i quasimorfismi omogenei reali di F_n introduciamo una nozione più generale possibile di quasimorfismi tra gruppi che estenda la definizione di quasimorfismi reali. Utilizzeremo in particolare il gruppo $\operatorname{QOut}(F_n)$ dei quasiendomorfismi invertibili di F_n e la sua azione sui quasimorfismi reali che estende quella naturale di $\operatorname{Out}(F_n)$ per mostrare che il sottospazio $\operatorname{Span}(\operatorname{QOut}(F_n)\cdot\operatorname{Hom}(F_n,\mathbb{R}))$ è denso in $\mathcal{H}(G)$ rispetto alla topologia della convergenza puntuale. Nel Teorema 4.16 mostreremo più nello specifico che un sottospazio denso è dato dall'orbita di $\operatorname{Hom}(F_n,\mathbb{R})$ sotto l'azione di $\operatorname{QOut}_{(2)}(F_n)$, ovvero del sottogruppo caratteristico generato dai quasiautomorfismi di ordine al più 2.

La tesi è strutturata nel seguente modo: nel Capitolo 1 si richiameranno alcune nozioni generali sulla coomologia di gruppi e saranno definiti gli spazi dei quasimorfismi (omogenei). Nel secondo capitolo saranno introdotte invece le nozioni di quasimorfismi tra due gruppi generici, estendendo la definizione scaturita dalla coomologia limitata. Nel Capitolo 3 entreremo nel dettaglio per quanto riguarda i gruppi liberi finitamente generati, verrà citato il Teorema di Grigorchuk

[Gri94] che esplicita un sottospazio di dimensione numerabile denso in $\mathcal{H}(F_n)$ e sarà dimostrata un'estensione di tale risultato nel Teorema 3.2: verrà costruito un sottospazio denso, di dimensione numerabile e $\mathrm{Out}(F_n)$-invariante di $\mathcal{H}(F_n)$. Infine, nel quarto capitolo, studieremo il gruppo $\mathrm{QOut}(F_n)$ e arriveremo al risultato principale nel Teorema 4.16.

Capitolo 1

Coomologia limitata e quasimorfismi reali

1.1 Coomologia di gruppi

Dato un gruppo G (dotato della topologia discreta), iniziamo richiamando la definizione di coomologia di G a coefficienti in un $R[G]$-modulo V.
Se R è un anello commutativo, denotiamo con $R[G]$ l'anello di gruppo associato a R e G:

$$R[G] = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \;\middle|\; \alpha_g \in R \right\}.$$

Se V è un $R[G]$-modulo, definiamo il sottospazio V^G degli elementi G-invarianti di V, ovvero l'insieme

$$V^G = \{v \in V \mid g \cdot v = v \text{ per ogni } g \in G\}.$$

Per descrivere il complesso di cocatene che definisce la coomologia di G a coefficienti in V, sia per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$C^n(G; V) = \left\{ f \colon G^{n+1} \longrightarrow V \right\}$$

e sia inoltre $\delta^n \colon C^n(G; V) \longrightarrow C^{n+1}(G; V)$ definita come segue:

$$\delta^n f(g_0, \ldots, g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{n+1}).$$

È immediato verificare che $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque la coppia $(C^\bullet(G; V), \delta^\bullet)$ è un complesso algebrico detto anche *complesso omogeneo*. Inoltre è possibile definire una azione di G su $C^n(G; V)$ tramite

$$(g \cdot f)(g_0, \ldots, g_n) = g f(g^{-1} g_0, \ldots, g^{-1} g_n)$$

che di conseguenza porta ad una struttura di $R[G]$-modulo su di esso. Con un semplice calcolo si mostra che δ^n è una mappa di $R[G]$-moduli (detta anche $R[G]$-mappa), dunque gli elementi G-invarianti $C^\bullet(G;V)^G$ formano un sottocomplesso di $C^\bullet(G;V)$ la cui omologia è per definizione la coomologia di G a coefficienti in V. Più precisamente, se

$$Z^n(G;V) = C^n(G;V)^G \cap \operatorname{Ker}\delta^n, \qquad B^n(G;V) = \delta^{n-1}(C^{n-1}(G;V)^G)$$

(ponendo $B^0(G;R) = 0$), allora si ha $B^n(G;R) \subseteq Z^n(G;R)$ e

$$H^n(G;V) = Z^n(G;V)/B^n(G;V).$$

Definizione 1.1. L'R-modulo $H^n(G;V)$ è detto l'n-esimo modulo di coomologia di G a coefficienti in V.

1.2 Coomologia limitata

Per dare un senso all'aggettivo *limitata* dobbiamo innanzitutto definire la nozione di $R[G]$-modulo normato. Siano R e G come sopra, e per semplicità poniamo $R = \mathbb{Z}$ o $R = \mathbb{R}$. Denotiamo inoltre con $|\cdot|$ il valore assoluto usuale su R.
Un $R[G]$-modulo normato V è un $R[G]$-modulo dotato di una norma invariante, cioè una mappa $\|\cdot\|\colon V \longrightarrow R$ tale che:

- $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$;
- $\|r \cdot v\| \leq |r| \cdot \|v\|$ per ogni $r \in R,\ v \in V$;
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in V$;
- $\|g \cdot v\| = \|v\|$ per ogni $g \in G,\ v \in V$.

Sia V un $R[G]$-modulo normato. Per ogni $f \in C^n(G;V)$ possiamo considerare la norma ℓ^∞

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{\|f(g_0,\dots,g_n)\| \;\middle|\; (g_0,\dots,g_n) \in G^{n+1}\right\} \in [0,+\infty].$$

Poniamo

$$C_b^n(G;V) = \{f \in C^n(G;V) \mid \|f\|_\infty < +\infty\}$$

e osserviamo che $C_b^n(G;V)$ è un sottomodulo di $C^n(G;V)$. Inoltre, $C_b^n(G;V)$ è un $R[G]$-modulo normato. Il differenziale $\delta^n\colon C^n(G;V) \longrightarrow C^{n+1}(G;V)$ si restringe ad una mappa $\delta^n\colon C_b^n(G;V) \longrightarrow C_b^{n+1}(G;V)$, da cui possiamo definire come di consueto

$$Z_b^n(G;V) = \operatorname{Ker}\delta^n \cap C_b^n(G;V)^G, \qquad B_b^n(G;V) = \delta^{n-1}(C_b^{n-1}(G;V)^G)$$

(ponendo $B_b^0(G;V)=0$), e dunque

$$H_b^n(G;V) = Z_b^n(G;V)/B_b^n(G;V).$$

La norma ℓ^∞ su $C_b^n(G;V)$ si restringe ad una norma su $Z_b^n(G;V)$, che induce a sua volta una seminorma su $H_b^n(G;V)$ prendendo l'estremo inferiore tra tutti i rappresentanti della coclasse, ovvero per ogni $\alpha \in H_b^n(G;V)$ si pone

$$\|\alpha\|_\infty = \inf \left\{ \|f\|_\infty \mid f \in Z_b^n(G;V),\ f = [\alpha] \right\}.$$

Definizione 1.2. L'R-modulo $H_b^n(G;V)$ è detto l'n-esimo modulo di coomologia limitata di G a coefficienti in V. La seminorma $\|\cdot\|_\infty \colon H_b^n(G;V) \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta *seminorma canonica* di $H_b^n(G;V)$.

L'inclusione $C_b^\bullet(G;V) \hookrightarrow C^\bullet(G;V)$ induce una mappa

$$c^\bullet \colon H_b^\bullet(G;V) \longrightarrow H^\bullet(G;V)$$

chiamata *mappa di confronto*. In generale tale funzione non è né iniettiva né surgettiva. Il kernel dell'applicazione c^n è denotato con $EH_b^n(G;V)$, ed è chiamato n-esimo modulo di coomologia limitata esatta di G a coefficienti in V.

Per la definizione dell'azione di G, un elemento $f \in C^\bullet(G;V)^G$ è completamente determinato dai valori che assume sulle $(n+1)$-uple aventi 1 come prima entrata. Più precisamente, definendo

$$\overline{C}^0(G;V) = V \qquad\qquad \overline{C}^n(G;V) = C^{n-1}(G;V) = \{f \colon G^n \longrightarrow V\},$$

e considerandoli come R-moduli, abbiamo degli R-isomorfismi

$$\begin{array}{rcl} C^n(G;V)^G & \longrightarrow & \overline{C}^n(G;V) \\ \varphi & \longmapsto & ((g_1,\dots,g_n) \mapsto \varphi(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1\cdots g_n)). \end{array}$$

Tramite questi isomorfismi, il differenziale $\delta^\bullet \colon C^\bullet(G;V) \longrightarrow C^{\bullet+1}(G;V)$ si traduce nel differenziale $\overline{\delta}^\bullet \colon \overline{C}^\bullet(G;V) \longrightarrow \overline{C}^{\bullet+1}(G;V)$ definito da

$$\overline{\delta}^0(v)(g) = g\cdot v - v \qquad\qquad v\in V, g\in G$$

e per $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \overline{\delta}^n(f)(g_1,\dots,g_{n+1}) = {} & g_1 \cdot f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \\ & + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1}) + \\ & + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n). \end{aligned}$$

Il complesso $(\overline{C}^\bullet(G;V), \overline{\delta}^\bullet)$ è chiamato *complesso non omogeneo* (detto anche *bar resolution*) associato alla coppia (G, V). Per costruzione, la coomologia di questo complesso è canonicamente isomorfa a $H^\bullet(G;V)$.

Come già fatto in precedenza per il complesso omogeneo, se V è un $R[G]$-modulo normato, possiamo definire il sottomodulo $\overline{C}_b^n(G;V)$ di funzioni limitate di $\overline{C}^n(G;V)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'isomorfismo $C^n(G;V)^G \cong \overline{C}^n(G;V)$ si restringe ad un isomorfismo $C_b^n(G;V)^G \cong \overline{C}_b^n(G;V)$ che preserva le norme, dunque $\overline{C}_b^\bullet(G;V)$ è un sottocomplesso di $\overline{C}^\bullet(G;V)$ la cui coomologia è canonicamente isomorfa (e isometrica) a $H_b^\bullet(G;V)$.

Coomologia (limitata) in dimensione 0, 1

Restringiamo la nostra attenzione al caso in cui $V = R$ è uguale a $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$, in entrambi i casi dotato della struttura di $R[G]$-modulo banale. Per semplificare i calcoli, sarà conveniente lavorare con i complessi non omogenei di cocatene (limitate).

Direttamente dalle definizioni abbiamo $\overline{C}^0(G;R) = \overline{C}_b^0(G;R) = R$ e $\overline{\delta}^0 = 0$, dunque

$$H^0(G;R) = H_b^0(G;R) = R.$$

Studiamo adesso cosa accade in grado uno. Per definizione, per ogni $f \in \overline{C}^1(G;R)$ abbiamo

$$\overline{\delta}^1(f)(g_1, g_2) = f(g_1) + f(g_2) - f(g_1 g_2).$$

In altre parole, chiamando come al solito $\overline{Z}^\bullet(G;R)$ (rispettivamente $\overline{Z}_b^\bullet(G;R)$) e $\overline{B}^\bullet(G;R)$ (rispettivamente $\overline{B}_b^\bullet(G;R)$) gli spazi dei cocicli e cobordi del complesso non omogeneo $\overline{C}^\bullet(G;R)$ (rispettivamente $\overline{C}_b^\bullet(G;R)$), si ha

$$H^1(G;R) = \overline{Z}^1(G;R) = \mathrm{Hom}(G, R).$$

Invece, poiché ogni omomorfismo limitato a valori in $\mathbb{Z}$ o in $\mathbb{R}$ è banale, anche il primo modulo di coomologia limitata lo è:

$$H_b^1(G;R) = \overline{Z}_b^1(G;R) = 0.$$

Coomologia limitata in dimensione 2 e quasimorfismi reali

Per lo studio di $H_b^2(G;R)$, grazie alla mappa di confronto $c^2 \colon H_b^2(G;R) \longrightarrow H^2(G;R)$, possiamo ridurci a studiare separatamente kernel e immagine di tale mappa.

In particolare ci concentriamo sullo studio del kernel $EH^2_b(G;R)$ della mappa di confronto.

Definizione 1.3. Una applicazione $f\colon G \longrightarrow R$ è un quasimorfismo se esiste una costante $D \geq 0$ tale che

$$|f(g_1) + f(g_2) - f(g_1 g_2)| \leq D$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$. Il minimo $D \geq 0$ per cui vale la disuguaglianza precedente è detto *difetto* di f, e si denota con $D(f)$. Lo spazio dei quasimorfismi è un R-modulo, e si denota con $\mathcal{Q}(G,R)$.
Nel caso in cui $R = \mathbb{R}$ scriveremo più brevemente $\mathcal{Q}(G)$.

Per definizione un quasimorfismo è un elemento di $\overline{C}^1(G;R)$ il cui differenziale è limitato. Ovviamente sia funzioni limitate (cioè elementi in $\overline{C}^1_b(G;R)$) sia omomorfismi (cioè elementi in $\overline{Z}^1(G;R) = \mathrm{Hom}(G,R)$) sono quasimorfismi.
Come abbiamo già osservato, ogni omomorfismo limitato a valori in R è banale, da cui $\overline{C}^1_b(G;R) \cap \mathrm{Hom}(G,R) = \{0\}$. Il seguente risultato è una immediata conseguenza delle definizioni:

Proposizione 1.4. *Esiste una successione esatta*

$$0 \longrightarrow \overline{C}^1_b(G;R) \oplus \mathrm{Hom}(G,R) \hookrightarrow \mathcal{Q}(G,R) \twoheadrightarrow EH^2_b(G;R) \longrightarrow 0$$

dove la mappa $\mathcal{Q}(G,R) \longrightarrow EH^2_b(G;R)$ *è indotta dal differenziale* $\overline{\delta}^1\colon \mathcal{Q}(G,R) \longrightarrow \overline{Z}^2_b(G;R)$. *In particolare*

$$\mathcal{Q}(G,R)/\left(\overline{C}^1_b(G;R) \oplus \mathrm{Hom}(G,R)\right) \cong EH^2_b(G;R).$$

Dimostrazione. Siano $b_1, b_2 \in \overline{C}^1_b(G;R)$, $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(G,R)$ tali che $f_1 + b_1 = f_2 + b_2$. Allora $f_1 - f_2,\ b_2 - b_1 \in \overline{C}^1_b(G;R) \cap \mathrm{Hom}(G,R) = \{0\}$, ovvero $f_1 = f_2$ e $b_1 = b_2$. Dunque la mappa $\overline{C}^1_b(G;R) \oplus \mathrm{Hom}(G,R) \longrightarrow \mathcal{Q}(G,R)$ è iniettiva.
Sia adesso $\varphi \in EH^2_b(G;R)$. Per definizione si ha $\varphi = [\overline{\delta}^1\psi]$ con $\psi \in \overline{C}^1(G;R)$; essendo $\|\varphi\|_\infty < +\infty$, anche $\|\overline{\delta}^1\psi\|_\infty < +\infty$, e cioè $\psi \in \mathcal{Q}(G,R)$. Ciò prova la surgettività della mappa $\mathcal{Q}(G,R) \longrightarrow EH^2_b(G;R)$.
Infine, per provare l'esattezza della successione in $\mathcal{Q}(G,R)$, osserviamo che preso $\varphi \in \mathcal{Q}(G,R)$, vale che $[\overline{\delta}^1\varphi] = 0$ in $H^2_b(G;R)$ se e solo se $\overline{\delta}^1\varphi = \overline{\delta}^1 b$ con $b \in \overline{C}^1_b(G;R)$, cioè $\varphi - b \in \overline{Z}^1(G;R) = \mathrm{Hom}(G,R)$. Questo porta alla tesi, avendo provato l'uguaglianza tra immagine della prima e kernel della seconda mappa. $\square$

Quindi per mostrare che $H_b^2(G; R)$ è non nullo è sufficiente costruire dei quasimorfismi che non stiano a distanza finita da alcun omomorfismo.

Definizione 1.5. Un quasimorfismo $f : G \longrightarrow R$ si dice omogeneo se $f(g^n) = nf(g)$ per ogni $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Lo spazio dei quasimorfismi omogenei è un sottomodulo di $\mathcal{Q}(G, R)$ ed è denotato con $\mathcal{H}(G, R)$.
Nel caso in cui $R = \mathbb{R}$ scriveremo più brevemente $\mathcal{H}(G)$.

Alcune proprietà generali dei quasimorfismi omogenei sono le seguenti:

Lemma 1.6. *Valgono i seguenti fatti:*

(i) Se $p : G \longrightarrow H$ è un omomorfismo di gruppi e $\alpha : G \longrightarrow R$ è un quasimorfismo (omoegneo), allora $p^*\alpha := \alpha \circ p$ è un quasimorfismo (omogeneo).

(ii) Per ogni $f \in \mathcal{H}(G, R)$, per ogni $g, h \in G$ vale $f(ghg^{-1}) = f(h)$.

(iii) Se G è un gruppo abeliano ogni quasimorfismo omogeneo è un omomorfismo.

Dimostrazione. La prima tesi è ovvia. Per la (ii), poiché vale per ogni $n \in \mathbb{Z}$ che $nf(ghg^{-1}) = f((ghg^{-1})^n) = f(gh^ng^{-1})$ si ha (quando $n \neq 0$)

$$\begin{aligned}\left|f(ghg^{-1}) - f(h)\right| &= \frac{|f(gh^ng^{-1}) - f(h^n)|}{n} \leq \\ &\leq \frac{D(f)}{n} + \frac{|f(gh^n) + f(g^{-1}) - f(h^n)|}{n} \leq \\ &\leq \frac{2D(f)}{n}\end{aligned}$$

da cui passando al limite su n si giunge alla tesi.
In modo analogo, se G è abeliano, presi $f \in \mathcal{H}(G, R)$ e $g_1, g_2 \in G$ vale (quando $n \neq 0$)

$$\begin{aligned}|f(g_1g_2) - f(g_1) - f(g_2)| &= \frac{|f((g_1g_2)^n) - f(g_1^n) - f(g_2^n)|}{n} = \\ &= \frac{|f(g_1^ng_2^n) - f(g_1^n) - f(g_2^n)|}{n} \leq \frac{D(f)}{n}\end{aligned}$$

da cui ancora una volta passando al limite su n si ottiene quanto voluto. □

È ovvio che non esistano quasimorfismi omogenei limitati non nulli. In particolare, per ogni quasimorfismo f esiste al più un quasimorfismo omogeneo $\overline{f}$ tale che $\|f - \overline{f}\|_\infty < +\infty$. Infatti, preso $f \in \mathcal{Q}(G, R)$, supponiamo esistano $\overline{f}_1, \overline{f}_2 \in \mathcal{H}(G, R)$ tali che $\|f - \overline{f}_i\|_\infty = c_i$ per $i = 1, 2$ e $c_i \in [0, +\infty)$. Allora per ogni $g \in G$, per ogni $n \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \left|\overline{f}_1(g) - \overline{f}_2(g)\right| &= \frac{1}{n}\left|\overline{f}_1(g^n) - \overline{f}_2(g^n)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n}\left|\overline{f}_1(g^n) - f(g^n)\right| + \frac{1}{n}\left|f(g^n) - \overline{f}_2(g^n)\right| \leq \\ &\leq \frac{c_1 + c_2}{n} \end{aligned}$$

da cui, passando al limite su n, si ottiene $\overline{f}_1(g) = \overline{f}_2(g)$ per ogni $g \in G$.
Inoltre, essendo banalmente $\mathrm{Hom}(G, R) \subseteq \mathcal{H}(G, R)$, si ha che un quasimorfismo omogeneo che non sia un omomorfismo non può stare a distanza finita da un omomorfismo.

Quando $R = \mathbb{R}$ infine si ha un risultato più forte:

Proposizione 1.7. *Sia $f \in \mathcal{Q}(G)$ un quasimorfismo. Allora esiste un unico elemento $\overline{f} \in \mathcal{H}(G)$ tale che $\|f - \overline{f}\|_\infty < +\infty$. Inoltre si ha*

$$\|f - \overline{f}\|_\infty \leq D(f), \qquad\qquad D(\overline{f}) \leq 4D(f).$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per ogni $g \in G$, $m, n \in \mathbb{N}$ vale

$$|f(g^{mn}) - nf(g^m)| \leq (n-1)D(f).$$

Infatti, per induzione su n, si ha

$$\begin{aligned} |f(g^{mn}) - nf(g^m)| &\leq D(f) + |f(g^{m(n-1)}) - (n-1)f(g^m)| \leq \\ &\leq D(f) + (n-2)D(f) = (n-1)D(f). \end{aligned}$$

Dunque (per $m \neq 0,\ n \neq 0$)

$$\left|\frac{f(g^n)}{n} - \frac{f(g^m)}{m}\right| \leq \left|\frac{f(g^n)}{n} - \frac{f(g^{mn})}{mn}\right| + \left|\frac{f(g^{mn})}{mn} - \frac{f(g^m)}{m}\right| \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) D(f).$$

Di conseguenza la successione $f(g^n)/n$ è una successione di Cauchy, e lo stesso vale per la successione $f(g^{-n})/(-n)$. Poiché $f(g^n) + f(g^{-n}) \leq f(1) + D(f)$ per ogni n, possiamo concludere che i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(g^n)}{n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{f(g^n)}{n} = \overline{f}(g)$$

esistono per ogni $g \in G$. Inoltre, la disuguaglianza $|f(g^n) - nf(g)| \leq (n-1)D(f)$ implica che

$$\left| f(g) - \frac{f(g^n)}{n} \right| \leq D(f)$$

e passando al limite otteniamo che $\|f - \overline{f}\|_\infty \leq D(f)$. Questo implica immediatamente che $\overline{f}$ è un quasimorfismo e

$$\begin{aligned}|\overline{f}(gh) - \overline{f}(g) - \overline{f}(h)| &\leq D(f) + |\overline{f}(gh) - f(gh) + \overline{f}(g) - f(g) + \overline{f}(h) - f(h)| \leq \\ &\leq D(f) + 3D(f) = 4D(f)\end{aligned}$$

da cui $D(\overline{f}) \leq 4D(f)$. Infine, $\overline{f}$ è ovviamente omogeneo. $\square$

Dalla proposizione precedente possiamo dunque definire una relazione di equivalenza su $\mathcal{Q}(G)$, nel modo seguente:

Definizione 1.8. $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}(G)$ si dicono *equivalenti* (si denota con $\alpha \sim \beta$) se $\alpha - \beta$ è una funzione limitata.

Il sottospazio dei quasimorfismi omogenei $\mathcal{H}(G)$ si può allora vedere come il quoziente $\mathcal{H}(G) \cong \mathcal{Q}(G)/\sim$.
Considerando su $\mathcal{Q}(G)$ la topologia della convergenza puntuale, ovvero $\alpha_n \to \alpha$ se $\alpha_n(g) \to \alpha(g)$ per ogni $g \in G$, in seguito sarà sempre considerata la topologia di sottospazio su $\mathcal{H}(G)$ piuttosto che quella di quoziente. Le due topologie infatti in generale sono diverse, con la prima di Hausdorff al contrario della seconda.

Corollario 1.9. *Lo spazio $\mathcal{Q}(G)$ si decompone come somma diretta*

$$\mathcal{Q}(G) = \mathcal{H}(G) \oplus \overline{C}_b^1(G; \mathbb{R}).$$

Inoltre la restrizione di $\overline{\delta}$ a $\mathcal{H}(G)$ induce un isomorfismo

$$\mathcal{H}(G)/\operatorname{Hom}(G, \mathbb{R}) \cong EH_b^2(G; \mathbb{R}).$$

Capitolo 2

Quasimorfismi tra gruppi

In questo capitolo introdurremo una definizione categoriale dei quasimorfismi tra gruppi in modo da estendere la definizione classica di quasimorfismi reali in modo più generale possibile.

Definizione 2.1. Dati due gruppi G, H una mappa $f\colon G \longrightarrow H$ è detta *quasimorfismo* se per ogni $\alpha \in \mathcal{Q}(H)$ si ha $f^*\alpha \in \mathcal{Q}(G)$. La categoria $\mathfrak{QGrp}$ dei *quasigruppi* è definita come la categoria avente come oggetti i gruppi e come frecce i quasimorfismi.

Dalla definizione è ovvio che la composizione di quasimorfismi sia ancora un quasimorfismo, per cui $\mathfrak{QGrp}$ è una categoria.

Data la relazione di equivalenza per quasimorfismi reali definiamo inoltre:

Definizione 2.2. Due quasimorfismi $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{QGrp}}(G, H)$ sono equivalenti (si denota $f \sim g$) se per ogni $\alpha \in \mathcal{Q}(H)$ si ha $f^*\alpha \sim g^*\alpha$. Scriviamo $[f]$ per la classe di equivalenza del quasimorfismo f. La categoria $\mathfrak{HQGrp}$ dei *quasigruppi omogenei* è definita come la categoria i cui oggetti sono i gruppi e le cui frecce sono le classi di equivalenza di quasimorfismi.

Una immediata verifica permette di notare che la composizione di classi di equivalenza è ben definita, per cui $\mathfrak{HQGrp}$ è una categoria.

In realtà per verificare che $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{QGrp}}(G, H)$ è sufficiente provare che per ogni $\alpha \in \mathcal{H}(H)$ vale $f^*\alpha \in \mathcal{Q}(G)$. Infatti ogni quasimorfismo α può essere scritto in modo unico come $\alpha = \widehat{\alpha} + b$ con $\widehat{\alpha}$ un quasimorfismo omogeneo e $b\colon H \longrightarrow \mathbb{R}$

una applicazione limitata. Da ciò si ha $f^*\alpha = f^*\widehat{\alpha} + f^*b$ e la tesi è verificata poiché f^*b è limitata. Con le stesse argomentazioni si prova anche che due quasimorfismi $f_1, f_2 \colon G \longrightarrow H$ sono equivalenti se e solo se $f_1^*\alpha - f_2^*\alpha$ è limitato per ogni $\alpha \in \mathcal{H}(H)$. A sua volta quest'ultima caratterizzazione è equivalente alla condizione che per ogni $\alpha \in \mathcal{H}(H)$ le omogeneizzazioni $\widehat{f_1^*\alpha}$ e $\widehat{f_2^*\alpha}$ coincidano.

Il seguente criterio è spesso utile nel costruire quasimorfismi:

Lemma 2.3. *Data una applicazione $f \colon G \longrightarrow H$, se esiste un insieme finito $E \subseteq H$ per cui per ogni $g_1, g_2 \in G$ esiste un $h \in H$ tale che*

$$f(g_1g_2) \in Ef(g_1)EhEh^{-1}Ef(g_2)E,$$

allora f è un quasimorfismo.

Dimostrazione. Siano $\alpha \in \mathcal{H}(H)$ e $g_1, g_2 \in G$. Per ipotesi esiste $h \in H$ tale che $\alpha(f(g_1g_2)) \in \alpha(Ef(g_1)EhEh^{-1}Ef(g_2)E)$. Allora

$$\begin{aligned}
D(f^*\alpha) &= \sup_{g_1,g_2\in G} |f^*\alpha(g_1g_2) - f^*\alpha(g_1) - f^*\alpha(g_2)| \leq \\
&\leq \sup_{g_1,g_2\in G} \sup_{e_j\in E} \left|\alpha(e_1f(g_1)e_2he_3h^{-1}e_4f(g_2)e_5) - \alpha(f(g_1)) - \alpha(f(g_2))\right| \leq \\
&\leq |\alpha(f(g_1)f(g_2)) - \alpha(f(g_1)) - \alpha(f(g_2))| + 7D(\alpha) + 5\max_{e\in E}\alpha(e) \leq \\
&\leq 8D(\alpha) + 5\max_{e\in E}\alpha(e) < +\infty.
\end{aligned}$$

□

A questo punto è necessario verificare che le nuove definizioni date siano compatibili con le definizioni di quasimorfismi reali e della relazione di equivalenza definita in precedenza su tali spazi.

Lemma 2.4. *Le due nozioni di quasimorfismi per mappe $f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ coincidono. Analogamente, anche le nozioni di equivalenza coincidono.*

Dimostrazione. Sia f una mappa avente difetto limitato e sia $\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$. Per il Lemma 1.6 si ha $\alpha = \lambda \cdot id$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$, da cui $f^*\alpha = \lambda \cdot id \in \mathcal{Q}(G)$, che mostra che f è anche un quasimorfismo nella nuova accezione. Il viceversa è ovvio dato che $f^*id = f$. La dimostrazione riguardante le nozioni di equivalenza è analoga. □

Corollario 2.5. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{QGrp}}(G,\mathbb{R}) = \mathcal{Q}(G)$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{HQGrp}}(G,\mathbb{R}) = \mathcal{H}(G)$.

Definizione 2.6. Il gruppo dei *quasiautomorfismi* di un gruppo G è

$$\mathrm{QOut}(G) := \mathrm{Aut}_{\mathfrak{HQGrp}}(G).$$

Introduciamo inoltre le notazioni

$$\mathcal{Q}(G,H) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{QGrp}}(G,H), \qquad \mathcal{H}(G,H) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{HQGrp}}(G,H),$$

e manteniamo la notazione $\widehat{\alpha}$ per denotare l'omogeneizzazione di un quasimorfismo α.

La caratterizzazione dei quasimorfismi omogenei fatta in precedenza può essere riscritta come segue:

Lemma 2.7. *La mappa*

$$\iota\colon \mathcal{H}(G,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Vect}}(\mathcal{H}(H),\mathcal{H}(G)), \qquad \iota(f)(\alpha) = \widehat{f^*\alpha},$$

e dunque anche la mappa $\mathrm{QOut}(G) = \mathcal{H}(G,G)^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Vect}}(\mathcal{H}(G))$*, è iniettiva.*

Come immediata conseguenza di questa riscrittura e dell'invarianza per coniugio dei quasimorfismi omogenei reali si deduce che:

Corollario 2.8. *L'applicazione naturale* $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Grp}}(G) \longrightarrow \mathrm{QOut}(G)$ *si fattorizza tramite* $\mathrm{Out}(G)$*. Denotiamo con* $\mathrm{qout}_G\colon \mathrm{Out}(G) \longrightarrow \mathrm{QOut}(G)$ *la mappa canonica che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Grp}}(G) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{QOut}(G) \\
& \mathrm{Out}(G) \arrow[ur, "\mathrm{qout}_G"'] &
\end{tikzcd}$$

In generale la mappa qout_G non è né iniettiva né surgettiva, ma vedremo nel Capitolo 4 che nel caso particolare in cui $G = F_n$ essa è sempre iniettiva.
In seguito identificheremo sempre $\mathrm{QOut}(G)$ con il corrispondente sottogruppo di $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Vect}}(\mathcal{H}(G))$.

Proposizione 2.9. $\mathrm{QOut}(G)$ *agisce in modo continuo su* $\mathcal{H}(G)$ *rispetto alla topologia della convergenza puntuale.*

Dimostrazione. Se $\alpha_n \to \alpha$ puntualmente in $\mathcal{H}(G)$ e $[\varphi] \in \mathrm{QOut}(G)$, allora $\varphi^*\alpha_n(g) = \alpha_n(\varphi(g)) \to \alpha(\varphi(g)) = \varphi^*\alpha(g)$ per ogni $g \in G$. □

Corollario 2.10. *Se* $V < \mathcal{H}(G)$ *è un sottospazio denso rispetto alla topologia della convergenza puntuale, allora ogni* $f \in \mathrm{QOut}(G)$ *è unicamente determinato dalla sua restrizione* $f|_V \colon V \longrightarrow \mathcal{H}(G)$.

Tale corollario sarà particolarmente utile nel seguito, per lo studio dei quasimorfismi omogenei di un gruppo libero non abeliano finitamente generato F.

Capitolo 3

Gruppi liberi: il Teorema di Grigorchuk

Lo scopo di questo capitolo è di introdurre importanti famiglie di quasimorfismi reali per un gruppo libero non abeliano finitamente generato F e di esibire un suo sottospazio denso di dimensione numerabile che sia $\mathrm{Out}(F)$-invariante. Per fare ciò ci appoggeremo a dei risultati dovuti a R.I. Grigorchuk.

Sia S una base di F, ovvero un sottoinsieme libero che genera F, e identifichiamo F con l'insieme delle parole ridotte su $S \cup S^{-1}$, includendo anche la parola vuota ε. Date due parole w_1, w_2 su $S \cup S^{-1}$ scriveremo $w_1 = w_2$ se coincidono e $w_1 \equiv w_2$ se definiscono lo stesso elemento di F. Ovviamente per parole ridotte queste due nozioni coincidono.
Date due parole ridotte $w = y_1 \cdots y_l$ e $w_0 = x_1 \cdots x_n$ su $S \cup S^{-1}$, una w_0-sottoparola di w è una sequenza $y_j \cdots y_{j+n-1}$ con $y_i = x_{i-j+1}$ per ogni $i \in \{j, \ldots, j+n-1\}$. Due w_0-sottoparole $y_j \cdots y_{j+n-1}$ e $y_k \cdots y_{k+n-1}$ si dice che si *sovrappongono* se $\{j, \ldots, j+n-1\} \cap \{k, \ldots, k+n-1\} \neq \emptyset$. Una famiglia di w_0-sottoparole di w si dice che *non si sovrappone* se i suoi elementi non si sovrappongono a due a due. Denotiamo con $\#_{w_0}(w)$ il numero massimo di w_0-sottoparole distinte (ma potenzialmente sovrapposte) di w e con $\#^*_{w_0}(w)$ il numero massimo di w_0-sottoparole non sovrapposte di w.

Definizione 3.1. Data una parola ridotta w_0 su $S \cup S^{-1}$ definiamo le mappe $\varphi_{w_0} \colon F \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $\varphi^*_{w_0} \colon F \longrightarrow \mathbb{Z}$ come segue: per ogni elemento $g \in F$ sia w_g l'unica parola ridotta su $S \cup S^{-1}$ tale che $g \equiv w_g$; a questo punto poniamo

$$\varphi_{w_0}(g) := \#_{w_0}(w_g) - \#_{w_0^{-1}}(w_g) \qquad \text{e} \qquad \varphi^*_{w_0}(g) := \#^*_{w_0}(w_g) - \#^*_{w_0^{-1}}(w_g).$$

È banale verificare che le due mappe appena definite siano quasimorfismi, chiamati rispettivamente *quasimorfismo di conteggio sovrapposto* e *quasimorfismo di conteggio non sovrapposto* associati alla parola w_0. In seguito lavoreremo quasi esclusivamente con φ_{w_0} e perciò li chiameremo semplicemente *quasimorfismi di conteggio.*
In generale i quasimorfismi di conteggio non sono omogenei. Le omogeneizzazioni $\widehat{\varphi_{w_0}}$ sono dette più brevemente *hoc-quasimorfismi* (dall'inglese *homogenized overlapping counting quasimorphisms*). Andremo a provare il seguente teorema, che risulta essere una modifica al Teorema di Grigorchuk [Gri94]:

Teorema 3.2. *Sia $\mathcal{H}^*(F,S)$ il sottospazio di $\mathcal{H}(F)$ generato dagli hoc-quasimorfismi rispetto all'insieme libero di generatori S. Allora*

(i) *$\mathcal{H}^*(F,S)$ è invariante sotto l'azione di $\mathrm{Out}(F)$, e dunque indipendente dalla scelta dell'insieme S.*

(ii) *$\mathcal{H}^*(F) := \mathcal{H}^*(F,S)$ è denso in $\mathcal{H}(F)$ rispetto alla topologia della convergenza puntuale.*

(iii) *$\mathcal{H}^*(F)$ ha dimensione numerabile.*

La dimostrazione del teorema è rimandata a fine capitolo, dopo aver introdotto ulteriori nozioni utili in tal senso.

Generalizziamo innanzitutto le nozioni di sottoparola e di parole sovrapposte. Siano $w_1 = x_1 \cdots x_n$ e $w_2 = y_1 \cdots y_m$ due parole ridotte su $S \cup S^{-1}$. Diciamo che un suffisso proprio di w_1 è un prefisso proprio di w_2 se esiste un intero $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tale che $n - i < m$ e per ogni $t \in \{1, \ldots, n-i\}$ si ha $x_{t+i} = y_t$. Si dice che w_2 è una sottoparola di w_1 se esiste un intero $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tale che $n - i \geq m$ e per ogni $t \in \{1, \ldots, m\}$ si ha $x_{t+i} = y_t$. Diciamo che w_1 e w_2 si sovrappongono se un prefisso proprio di una è un suffisso proprio dell'altra o una delle parole è una sottoparola propria dell'altra. Scriviamo $w_1 \pitchfork w_2$ se le due parole non si sovrappongono e chiamiamo *w non auto-sovrapposta* se $w \pitchfork w$.

Definizione 3.3. Un insieme $\{w_1, \ldots, w_k\}$ di k parole distinte, ridotte e non vuote si dice *indipendente* se valgono le seguenti condizioni:

(i) L'insieme $\left\{w_1 \ldots, w_k, w_1^{-1}, \ldots, w_k^{-1}\right\}$ ha cardinalità $2k$.

(ii) Per ogni $u, u' \in \left\{w_1 \ldots, w_k, w_1^{-1}, \ldots, w_k^{-1}\right\}$ (non necessariamente distinti) si ha $u \pitchfork u'$.

In questo caso diciamo che le parole $w_1, \ldots, w_k$ sono mutuamente indipendenti. Una parola w si dice *auto-indipendente* se il singoletto $\{w\}$ è indipendente.

Lemma 3.4. *Sia w una parola su $S \cup S^{-1}$ non vuota e ciclicamente ridotta. Allora anche w^{-1} è ciclicamente ridotta e non vuota. In questo caso, w e w^{-1} sono distinte e non si sovrappongono.*

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia. Supponiamo per assurdo che w e w^{-1} si sovrappongano o coincidano. Allora, a meno di scambiare w con w^{-1}, possiamo assumere che esista $t \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $w = x_1 \cdots x_n$, $w^{-1} = y_1 \cdots y_n$ e

$$y_j = x_{n-j+1}^{-1} \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad y_l = x_{n-t+l} \quad (l = 1, \ldots, t).$$

Distinguiamo due casi: se $t = 2r$ è pari allora abbiamo $x_{n-r+1}^{-1} = y_r = x_{n-r}$ contraddicendo il fatto che w sia ridotta; se $t = 2r + 1$, allora $x_{n-r}^{-1} = y_{r+1} = x_{n-r}$ che risulta impossibile. □

Corollario 3.5. *Sia w una parola non vuota ridotta su $S \cup S^{-1}$.*

(i) Se w (o equivalentemente w^{-1}) è ciclicamente ridotta e non auto-sovrapposta, allora w (e dunque w^{-1}) è auto-indipendente.

(ii) Se w è auto-indipendente allora $\varphi_w = \varphi_w^*$.

Corollario 3.6. *Se w è ciclicamente ridotta e non vuota, allora $\widehat{\varphi_w^*}(w) = 1$.*

Dimostrazione. Poiché w è ciclicamente ridotta abbiamo $\#_w^*(w^n) = n$. Per il Lemma 3.4 w non si sovrappone con w^{-1}, e quindi $\#_{w^{-1}}^*(w^n) = 0$. Da ciò si deduce che $\varphi_w^*(w^n) = n$ e la tesi del corollario. □

Denotiamo con $\mathcal{G}(S)$ l'insieme delle parole ciclicamente ridotte e non auto-sovrapposte su $S \cup S^{-1}$. Consideriamo un ordinamento totale $\leq$ su $S \cup S^{-1}$ e l'ordine lessicografico indotto $\preceq$ sulle parole ridotte. Osserviamo che se due parole in $\mathcal{G}(S)$ sono coniugate, allora sono necessariamente permutazioni cicliche l'una dell'altra. Tra tutte le permutazioni cicliche di una parola esiste un unico elemento minimale rispetto a $\preceq$, a cui ci riferiremo come *coniugio-minimale*. Data $w \in \mathcal{G}(S)$ sia w^* il coniugio-minimale della classe di coniugio $[w]$ e sia w^{-*} il coniugio-minimale di $[w^{-1}]$. Definiamo allora

$$w^\dagger := \min\left\{w^*, w^{-*}\right\}$$

e sia $\mathcal{G}(S, \leq)^+$ l'insieme di tutti i $w^\dagger$ per $w \in \mathcal{G}(S)$. Per costruzione abbiamo $\mathcal{G}(S, \leq)^+ \cap (\mathcal{G}(S, \leq)^+)^{-1} = \emptyset$ e in più $\mathcal{G}(S, \leq)^+ \cup (\mathcal{G}(S, \leq)^+)^{-1}$ interseca ogni classe di coniugio in $\mathcal{G}(S)$ in esattamente un elemento.

Nelle notazioni introdotte enunciamo quindi il Teorema di Grigorchuk, che non dimostreremo e la cui dimostrazione può essere trovata in [Gri94]:

Teorema 3.7. (Grigorchuk [Gri94]). *Per ogni scelta di ordinamento $\leq$ su $S \cup S^{-1}$ la famiglia $\{\widehat{\varphi_g} \mid g \in \mathcal{G}(S, \leq)^+\}$ è linearmente indipendente e genera un sottospazio denso in $\mathcal{H}(F)$ rispetto alla topologia della convergenza puntuale.*

Studiamo adesso l'effetto dell'azione di $\mathrm{Out}(F)$ sugli hoc-quasimorfismi. Osserviamo innanzitutto che l'azione di $\mathrm{Out}(F)$ su $\mathcal{Q}(F)$ preserva le funzioni limitate, dunque induce una azione sul quoziente $\mathcal{Q}(F)/\sim$ e con l'identificazione $\mathcal{Q}(F)/\sim\, \cong \mathcal{H}(F)$ l'azione coincide con quella su $\mathcal{H}(F)$. Dunque per studiare l'effetto dell'azione di $\mathrm{Out}(F)$ sugli hoc-quasimorfismi è sufficiente lavorare con i quasimorfismi di conteggio (sovrapposti non omogenei), che risultano più comodi nella trattazione.

Assumiamo che $F = F_n$ sia libero su n generatori con sistema di generatori $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Allora $\mathrm{Out}(F_n)$ è generato come gruppo dalle *trasformazioni di Nielsen* P_1, P_2, I, T che sono determinate dalle seguenti trasformazioni della base:

$$\begin{aligned} P_1(a_1, \ldots, a_n) &= (a_2, a_1, \ldots, a_n) \\ P_2(a_1, \ldots, a_n) &= (a_2, \ldots, a_n, a_1) \\ I(a_1, \ldots, a_n) &= (a_1^{-1}, a_2, \ldots, a_n) \\ T(a_1, \ldots, a_n) &= (a_1 a_2, a_2, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

Le prime tre trasformazioni hanno ordine finito, mentre $T^{-1} = P_1 I P_1 T P_1 I P_1$; segue che le trasformazioni di Nielsen generano $\mathrm{Out}(F_n)$ come semigruppo. Poiché P_1, P_2, I preservano le parole ridotte, si ha che per ogni quasimorfismo di conteggio φ_{w_0} vale

$$P_j^* \varphi_{w_0}(w) = \varphi_{P_j^{-1}(w_0)}(w), \qquad I^* \varphi_{w_0}(w) = \varphi_{I^{-1}(w_0)}(w).$$

In particolare, $\mathcal{H}^*(F_n, S)$ è invariante rispetto a queste trasformazioni, perciò resta soltanto da capirne il comportamento sotto l'azione di T.

Per T, le lettere a_1, a_2 giocano un ruolo particolare: per snellire le notazioni denotiamo $a := a_1$ e $b := a_2$. Per definizione di T abbiamo $T(s) = T^{-1}(s) = s$ per ogni $s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{a, a^{-1}\}$. Inoltre

$$T(a) = ab, \qquad T(a^{-1}) = b^{-1}a^{-1}, \qquad T^{-1}(a) = ab^{-1}, \qquad T^{-1}(a^{-1}) = ba^{-1}.$$

Introduciamo adesso una forma normale per gli elementi di F_n: ogni $g \in F_n$ è unicamente rappresentato da una parola ridotta della forma

$$g \equiv w = b^{n_0} s_1 b^{n_1} \cdots s_l b^{n_l}$$

con $l \geq 0,\ n_j \in \mathbb{Z},\ s_j \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{b, b^{-1}\}$, e per ogni $1 \leq j \leq l-1$ $n_j = 0 \Rightarrow s_j \neq s_{j+1}^{-1}$.
Rappresenteremo w scrivendo

$$g \equiv_S (n_0, s_1, n_1, \ldots, s_l, n_l).$$

Dunque, applicando T, otteniamo

$$T(g) \equiv_S (\widetilde{n_0}, s_1, \widetilde{n_1}, \ldots, s_l, \widetilde{n_l}),$$

dove, con la convenzione $s_0 = s_{l+1} = \varepsilon$,

$$\widetilde{n_j} = \begin{cases} n_j + 1 & \text{se } s_j = a \wedge s_{j+1} \neq a^{-1} \\ n_j & \text{se } (s_j = a \wedge s_{j+1} = a^{-1}) \vee (s_j \neq a \wedge s_{j+1} \neq a^{-1}) \\ n_j - 1 & \text{se } s_j \neq a \wedge s_{j+1} = a^{-1} \end{cases}$$

condizione che può essere riscritta più brevemente in $\widetilde{n_j} = n_j + \#_a(s_j) - \#_{a^{-1}}(s_{j+1})$. In modo analogo si ha anche che

$$T^{-1}(g) \equiv_S (\widetilde{n_0}^*, s_1, \widetilde{n_1}^*, \ldots, s_l, \widetilde{n_l}^*),$$

dove $\widetilde{n_j}^* = n_j - \#_a(s_j) + \#_{a^{-1}}(s_{j+1})$.

Per descrivere l'azione di T su certi quasimorfismi di conteggio, definiamo l'*operatore di troncamento* τ_b su parole ridotte come segue: dato w in forma normale, allora

$$\tau_b(w) = s_1 b^{n_1} \cdots b^{l-1} s_l.$$

Diciamo che una parola w è *b-troncata* se non inizia né finisce con la lettera b, ovvero se $\tau_b(w) = w$. Poiché la trasformazione T non modifica le lettere s_j, si ha una corrispondenza biunivoca tra sottoparole b-troncate di $g \in F_n$ e le sottoparole b-troncate di $T(g)$. Questa osservazione sta alla base del seguente lemma:

Lemma 3.8. *Sia w una parola ridotta che non sia una potenza di b. Allora $T^*\varphi_w$ sta a distanza finita da una somma finita di quasimorfismi di conteggio. In particolare, $T^*\widehat{\varphi_w} \in \mathcal{H}^*(F_n, S)$.*

Dimostrazione. Usando la forma normale definita in precedenza possiamo scrivere $w \equiv_S (m_0, r_1, m_1, \ldots, r_k, m_k)$. Sia $g \equiv_S (n_0, s_1, n_1, \ldots, s_l, n_l)$ una generica parola in F_n. Il nostro scopo è quello di determinare una formula per $\#_w(T(g))$. Come osservato sopra esiste una corrispondenza bigettiva tra sottoparole b-troncate di $T(g)$ e sottoparole b-troncate di g.
Se $w' = (0, s_{t+1}, n_{t+1}, \ldots, s_{t+k}, 0)$ è una sottoparola b-troncata di $T(g)$ allora la sua corrispondente sottoparola di g è $\widetilde{w'}^* = (0, s_{t+1}, \widetilde{n_{t+1}}^*, \ldots, s_{t+k}, 0)$ e viceversa. In particolare, il numero di occorrenze di w' in $T(g)$ è lo stesso del numero di occorrenze di $\widetilde{w'}^*$ in g.
Per contare le occorrenze di w in $T(g)$ procediamo come segue: ogni w-sottoparola di $T(g)$ porta ad una sottoparola w' come sopra che soddisfa $r_i = s_{i+t}$ e $m_i = n_{i+t}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. La corrispondente sottoparola $\widetilde{w'}^*$ di g dunque soddisfa $\widetilde{m_i}^* = \widetilde{n_{i+t}}^*$. Chiamiamo una w' come sopra che deriva da una occorrenza w estendibile; ciò significa che w' è preceduta da almeno $|m_0|$ copie di b o b^{-1} in base al segno di m_0 e seguita da almeno $|m_k|$ copie di b o b^{-1} (in base al segno di m_k). Riformuliamo adesso queste condizioni in termini di g. Per semplicità di trattazione escludiamo i casi estremali $t = 0$ e $t + k = l$, che portano ad un errore di conteggio di $\#_w(T(g))$ di al più 2, non importante ai fini della dimostrazione. L'assunzione ci assicura che s_t e s_{t+k+1} esistono e sono ben definiti. Affinché una w' sia estendibile devono valere le seguenti condizioni: per l'estremo sinistro della parola, è necessario che $m_0 n_t \geq 0$ e $|n_t| \geq |m_0|$. Allo stesso modo, per l'estremo desto, occorre che $m_k n_{t+k} \geq 0$ e $|n_{t+k}| \geq |m_k|$.

Traduciamo queste condizioni su w' in condizioni su $\widetilde{w'}^*$. Per l'estremo sinistro della parola, deve valere una delle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} m_0 = 0, & & \\ m_0 > 0 & \wedge \quad \widetilde{n_t}^* \geq m_0 + 1, & \\ m_0 > 0 & \wedge \quad \widetilde{n_t}^* = m_0 & \wedge \quad (s_t = a \vee r_1 \neq a^{-1}), \\ m_0 > 0 & \wedge \quad \widetilde{n_t}^* = m_0 - 1 & \wedge \quad (s_t = a \wedge r_1 \neq a^{-1}), \\ m_0 < 0 & \wedge \quad \widetilde{n_t}^* \leq m_0 - 1, & \\ m_0 < 0 & \wedge \quad \widetilde{n_t}^* = m_0 & \wedge \quad (s_t \neq a \vee r_1 = a^{-1}), \\ m_0 < 0 & \wedge \quad \widetilde{n_t}^* = m_0 + 1 & \wedge \quad (s_t \neq a \wedge r_1 = a^{-1}). \end{cases}$$

Osserviamo che tutte queste condizioni sono disgiunte. Poiché m_0 e r_1 sono determinati dalla parola fissata w, le condizioni dipendono solamente da s_t e $\widetilde{n_t}^*$. Inoltre, nei casi in cui sono coinvolte delle disuguaglianze per $\widetilde{n_t}^*$ il valore di s_t è irrilevante. Dunque il fatto che le condizioni siano soddisfatte dipende solo dalle $|m_0| + 1$ lettere precedenti a $\widetilde{w'}^*$. Le condizioni per l'estremo destro sono analoghe per simmetria (considerando gli inversi) e quindi valgono le stesse conclusioni. Questo implica che le condizioni possono essere espresse da un insieme finito di parole $\mathcal{W}$ in cui $\widetilde{w'}^*$ deve essere contenuta. Più precisamente: sia $\mathcal{W}_{\text{left}} :=$

$$\begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{se } m_0 = 0, \\ \{b^{m_0}\} \cup \{ab^{m_0-1}\} & \text{se } m_0 > 0 \wedge r_{t+1} \neq a^{-1}, \\ \{b^{m_0+1}\} \cup \{ab^{m_0}\} & \text{se } m_0 > 0 \wedge r_{t+1} = a^{-1}, \\ \{sb^{m_0} \mid s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{a, b, b^{-1}\}\} \cup \{b^{m_0-1}\} & \text{se } m_0 < 0 \wedge r_{t+1} \neq a^{-1}, \\ \{sb^{m_0+1} \mid s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{a, b, b^{-1}\}\} \cup \{b^{m_0}\} & \text{se } m_0 < 0 \wedge r_{t+1} = a^{-1}. \end{cases}$$

Allo stesso modo definiamo $\mathcal{W}_{\text{right}}$ e consideriamo $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\text{left}} \cdot \widetilde{w'}^* \cdot \mathcal{W}_{\text{right}}$. Se w' è una parola b-troncata di $T(g)$ che non sia un caso estremale e $\widetilde{w'}^*$ è la corrispondente parola b-troncata di g allora w' è estendibile se e solo se $\widetilde{w'}^*$ è contenuta in una $\mathcal{W}$-sottoparola di g.
Per definizione, il numero di occorrenze di w in $T(g)$ è esattamente il numero di w' estendibili o, equivalentemente, delle corrispondenti $\widetilde{w'}^*$. Diciamo che questo numero è dato precisamente dal numero di sottoparole di g che sono uguali ad una certa parola in $\mathcal{W}$. In altre parole, diciamo che ogni $\widetilde{w'}^*$ può essere estesa in modo unico ad un elemento di $\mathcal{W}$. Una parola in $\mathcal{W}$ è un'estensione di una parola uguale a $\widetilde{w'}^*$ se è ottenuta concatenando una parola di $\mathcal{W}_{\text{left}}$ a sinistra e una di $\mathcal{W}_{\text{right}}$ a destra.
Dobbiamo provare che per ogni sottoparola uguale a $\widetilde{w'}^*$ esiste al più una estensione a parola di $\mathcal{W}$ e che ogni parola di $\mathcal{W}$ è estensione di al più una sottoparola uguale a $\widetilde{w'}^*$. Un altro modo per dire ciò è il seguente: se $w_l\widetilde{w'}^*w_r = w'_l\widetilde{w'}^*w'_r$ con $w_l, w'_l \in \mathcal{W}_{\text{left}}$ e $w_r, w'_r \in \mathcal{W}_{\text{right}}$ allora $w_l = w'_l$ e $w_r = w'_r$. Ma ciò è verificato automaticamente dal fatto che nessuna parola in $\mathcal{W}_{\text{left}}$ può essere estesa ad un'altra in $\mathcal{W}_{\text{left}}$ aggiungendo lettere a destra, e la stessa cosa simmetrica vale per $\mathcal{W}_{\text{right}}$.

Abbiamo dunque provato che $|\#_w(T(g)) - \sum_{u \in \mathcal{W}} \#_u(g)| \leq 2$. Effettuando lo stesso ragionamento con gli inversi, questo implica che $T^*\varphi_w$ è equivalente a $\sum_{u \in \mathcal{W}} \varphi_u$. □

Per dimostrare la T-invarianza di $\mathcal{H}^*(F_n, S)$ resta da verificare l'invarianza dei quasimorfismi di conteggio della forma φ_{b^k}. Per fare ciò usiamo il seguente lemma:

Lemma 3.9. *Sia $s \in S \cup S^{-1}$ e sia w una parola ridotta avente come ultima lettera s. Allora il quasimorfismo*

$$\varphi_w - \sum_{s' \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{s^{-1}\}} \varphi_{ws'}$$

è limitato, e dunque ha omogeneizzazione banale.

Dimostrazione. Assumiamo che w appaia come sottoparola di una parola ridotta w_0. Allora o w contiene l'ultima lettera di w_0 o esiste una lettera $s' \neq s^{-1}$ dopo l'occorrenza di w. Il quasimorfismo perciò conta la differenza tra il numero di occorrenze di w contenenti l'ultima lettera e il numero di occorrenze di w^{-1} contenenti la prima lettera, ed è limitato in valore assoluto da 1. □

Come semplice conseguenza abbiamo quanto voluto:

Lemma 3.10. *Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $T^*\widehat{\varphi_{b^k}} \in \mathcal{H}^*(F_n, S)$.*

Dimostrazione. Poiché $\varphi_{b^{-k}} = -\varphi_{b^k}$, è sufficiente provare la tesi per $k > 0$.
Per $k = 1$ si ha $T^*\varphi_b = \varphi_a + \varphi_b$. Per $k > 1$, per il lemma precedente (ponendo $w = b^{k-1}$)

$$\varphi_{b^k} \sim \varphi_{b^{k-1}} - \sum_{s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{b, b^{-1}\}} \varphi_{b^{k-1}s}$$

e la tesi segue per induzione utilizzando quanto dimostrato per parole non potenze di b. □

Riassemblando tutti i risultati ottenuti si ha:

Corollario 3.11. *Lo spazio $\mathcal{H}^*(F_n, S)$ è invariante sotto l'azione di* $\mathrm{Out}(F_n)$.

A questo punto siamo pronti per completare la dimostrazione del teorema principale di questo capitolo, il Teorema 3.2.

Dimostrazione del Teorema 3.2. Abbiamo appena visto che $\mathcal{H}^*(F_n, S)$ è invariante sotto l'azione di $\mathrm{Out}(F_n)$. Poiché $\mathrm{Out}(F_n)$ agisce transitivamente sugli insiemi liberi di generatori di F_n, segue che $\mathcal{H}^*(F_n, S)$ è indipendente dalla scelta di S. Questo prova (i).
Inoltre, $\mathcal{H}^*(F_n, S)$ contiene la famiglia $\{\widehat{\varphi_g} \mid g \in \mathcal{G}(S, \leq)^+\}$. Per il Teorema di Grigorchuk (Teorema 3.7), questa genera un sottospazio denso di dimensione numerabile in $\mathcal{H}(F_n)$, dunque anche $\mathcal{H}^*(F_n, S)$ è denso e di dimensione almeno numerabile. Esso però è generato da una quantità numerabile di elementi, dunque ha dimensione numerabile. Ciò prova (ii) e (iii) e conclude la dimostrazione. □

Capitolo 4

Quasiautomorfismi di un gruppo libero

Per riuscire a descrivere lo spazio dei quasimorfismi reali omogenei nel caso di un gruppo libero finitamente generato F_n occorre studiare lo spazio $\mathrm{QOut}(F_n)$ dei quasiautomorfismi.

Riprendendo le notazioni dei capitoli precedenti osserviamo per prima cosa che il gruppo $\mathrm{Out}(F_n)$ si immerge in $\mathrm{QOut}(F_n)$:

Proposizione 4.1. *La mappa* $\mathrm{qout}_{F_n} : \mathrm{Out}(F_n) \hookrightarrow \mathrm{QOut}(F_n)$ *è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Grp}}(F_n)$ rappresentante di una classe $[f] \in \mathrm{Ker}(\mathrm{qout}_{F_n})$. Scriviamo $f(a_j)$ come parola ridotta del tipo $f(a_j) \equiv x_j w_j x_j^{-1}$ per un certo $x_j \in F_n$ e un w_j ciclicamente ridotto. Consideriamo il quasimorfismo di conteggio non sovrapposto $\varphi^*_{w_j}$ e la sua omogeneizzazione $\widehat{\varphi^*_{w_j}}$. Poiché $f^*\widehat{\varphi^*_{w_j}} = \widehat{\varphi^*_{w_j}}$ si deduce, grazie al Corollario 3.6, che

$$\widehat{\varphi^*_{w_j}}(a_j) = \widehat{\varphi^*_{w_j}}(f(a_j)) = \widehat{\varphi^*_{w_j}}(x_j w_j x_j^{-1}) = \widehat{\varphi^*_{w_j}}(w_j) = 1.$$

Questo implica che, essendo

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\varphi^*_{w_j}(a_j^N)}{N} = \widehat{\varphi^*_{w_j}}(a_j) = 1,$$

per N sufficientemente grande si ha $\varphi^*_{w_j}(a_j^N) > 0$, ovvero che w_j è una sottoparola di a_j^N. Sia quindi $w_j = a_j^k$ per un certo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dal fatto che

$$\widehat{\varphi^*_{a_j^k}}(a_j) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\varphi^*_{a_j^k}(a_j^N)}{N} = \lim_{N \to +\infty} \frac{\#^*_{a_j^k}(a_j^N)}{N} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \cdot \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = \frac{1}{k}$$

si ottiene allora che $k = 1$ e perciò $w_j = a_j$.
Abbiamo quindi dimostrato che per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha $f(a_j) = x_j a_j x_j^{-1}$. Resta adesso da provare che x_j è indipendente dall'indice j. Se per assurdo così non fosse, senza perdita di generalità possiamo supporre $x_1 \neq x_2$. Scriviamo x_1 e x_2 come espressioni ridotte del tipo $x_1 = tu = t_1 \cdots t_l u_1 \cdots u_h$ e $x_2 = tv = t_1 \cdots t_l v_1 \cdots v_k$ con $t_j, u_j, v_j \in S \cup S^{-1}$, $h + k \geq 1$ e $u_1 \neq v_1$. Questo implica che le scritture $u^{-1}v$ e $v^{-1}u$ sono ridotte. In particolare, calcolando $f(a_1a_2)$ come

$$f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2) = x_1a_1x_1^{-1}x_2a_2x_2^{-1} = tua_1u^{-1}va_2v^{-1}t^{-1}$$

l'espressione ottenuta è ridotta. Abbreviamo $r := ua_1u^{-1}va_2v^{-1}$, che risulta essere ciclicamente ridotta e osserviamo che $|r| \geq 4$. In più, vale, ancora per il Corollario 3.6,

$$\widehat{\varphi_r^*}(a_1a_2) = \widehat{\varphi_r^*}(f(a_1a_2)) = \widehat{\varphi_r^*}(trt^{-1}) = \widehat{\varphi_r^*}(r) = 1.$$

Con le stesse argomentazioni di prima, r è una sottoparola di $(a_1a_2)^N$ per un qualche N con N grande, ovvero

$$r = \begin{cases} (a_1a_2)^k a_1 \\ (a_2a_1)^k a_2 \\ (a_1a_2)^k \\ (a_2a_1)^k \end{cases}$$

per un certo $k \geq 0$ nei primi due casi, $k > 0$ nei restanti due. Con calcoli analoghi a quelli fatti per a_j^k, si ha

$$1 = \widehat{\varphi^*_{(a_1a_2)^k a_1}}(a_1a_2) = \widehat{\varphi^*_{(a_2a_1)^k a_2}}(a_1a_2) = \frac{1}{k+1},$$

da cui $k = 0$, e

$$1 = \widehat{\varphi^*_{(a_1a_2)^k}}(a_1a_2) = \widehat{\varphi^*_{(a_2a_1)^k}}(a_1a_2) = \frac{1}{k},$$

da cui necessariamente $k = 1$. Ma allora $r \in \{a_1, a_2, a_1a_2, a_2a_1\}$; in particolare $|r| \leq 2$, in contraddizione con quanto osservato sopra. □

Lo studio del gruppo $\mathrm{QOut}(F_n)$ sarà fatto tramite costruzioni esplicite di quasimorfismi, per cui ci sarà utile la seguente proposizione che permette di riconoscere mappe che siano quasimorfismi.

Proposizione 4.2. *Sia G un gruppo qualsiasi e sia $h\colon F_n \longrightarrow G$ una mappa arbitraria. Se esiste un sottoinsieme finito $E \subseteq G$ tale che:*

(i) Comunque prese due parole w_1 e w_2 per cui w_1w_2 è ridotta, si ha $h(w_1w_2) \in Eh(w_1)Eh(w_2)E$,

(ii) Per ogni $g \in F_n$ vale $h(g^{-1}) \in Eh(g)^{-1}E$,

allora h è un quasimorfismo.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre che E sia chiuso per elementi inversi. Dati $g, g' \in F_n$ possiamo sempre trovare parole ridotte w, w', x tali che $g \equiv wx$, $g' \equiv x^{-1}w'$, e $wx, x^{-1}x'$ e ww' siano tutte ridotte. Sia adesso h come da ipotesi. Allora $h(gg') = h(ww') \in Eh(w)Eh(w')E$. Inoltre $h(g) \in Eh(w)Eh(x)E$, che implica che $h(w) \in Eh(g)Eh(x)^{-1}E$. Allo stesso modo concludiamo che $h(w') \in Eh(x)Eh(g')E$. Mettendo insieme le tre relazioni troviamo che $h(gg') \in E^2h(g)Eh(x)^{-1}E^3h(x)Eh(g')E^2$. Definendo $\widetilde{E} := (E \cup \{\varepsilon\})^3$ la relazione si traduce in

$$h(gg') \in \widetilde{E}h(g)\widetilde{E}h(x)^{-1}\widetilde{E}h(x)\widetilde{E}h(g')\widetilde{E}$$

e la tesi segue dal Lemma 2.3 riguardante il riconoscimento di quasimorfismi. $\square$

Utilizziamo adesso il criterio per descrivere una classe di quasiendomorfismi di gruppi liberi che modificano una parola localmente. Dato un $k > 0$, sia $f\colon (S \cup S^{-1})^k_{\text{red}} \longrightarrow F_n$ una mappa dall'insieme delle parole ridotte su $S \cup S^{-1}$ di lunghezza k in F_n tale che per ogni u ridotta si ha $f(u^{-1}) = f(u)^{-1}$. Chiamiamo una mappa di questo tipo *trasformazione locale di lunghezza k*. Definiamo adesso $\varphi_f\colon F_n \longrightarrow F_n$ come segue: data una parola ridotta $w = w_1 \cdots w_m$, con $w_i \in S \cup S^{-1}$,

$$\varphi_f(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } m < k \\ f(w_1 \cdots w_k)f(w_2 \cdots w_{k+1}) \cdots f(w_{m-k+1} \cdots w_m) & \text{se } m \geq k. \end{cases}$$

Lemma 4.3. *Per ogni trasformazione locale f la mappa φ_f è un quasimorfismo.*

Dimostrazione. Per dimostrare quanto voluto utilizzeremo la Proposizione 4.2. Per quanto riguarda la prima condizione, poniamo $E = \left(\{\varepsilon\} \cup f((S \cup S^{-1})^k_{\text{red}})\right)^k$. Siano $w = w_1 \cdots w_t$ e $w' = w_{t+1} \cdots w_m$ parole in F_n tali che ww' sia ridotta. Allora

$$\varphi_f(ww') = f(w_1 \cdots w_k)f(w_2 \cdots w_{k+1}) \cdots f(w_{m-n+1} \cdots w_m)$$

è una parola, per definizione di E, contenuta in

$$E\varphi_f(w)E\varphi_f(w')E =$$

$$Ef(w_1 \cdots w_k) \cdots f(w_{t-k+1} \cdots w_t)Ef(w_{t+1} \cdots w_{t+k}) \cdots f(w_{m-k+1} \cdots w_m)E.$$

Per la seconda proprietà, osserviamo che per una parola ridotta w si ha

$$\begin{aligned}\varphi_f(w^{-1}) &= f(w_m^{-1}\cdots w_{m-k+1}^{-1})\cdots f(w_k^{-1}\cdots w_1^{-1}) = \\ &= f(w_{m-k+1}\cdots w_m)^{-1}\cdots f(w_1\cdots w_k)^{-1} = \\ &= \varphi_f(w)^{-1}.\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione del lemma. □

Definizione 4.4. Data una trasformazione locale f, il quasimorfismo φ_f è chiamato *quasimorfismo locale* modellato su f.

4.1 Parte di torsione in $\mathrm{QOut}(F_n)$

Una informazione importante nello studio di $\mathrm{QOut}(F_n)$ ci viene data data a partire dagli elementi di torsione.

Definiamo il gruppo $W(\mathbb{Z})$ delle permutazioni di $\mathbb{Z}$ tali che la distanza degli elementi con le loro immagini sia limitata, ovvero

$$W(\mathbb{Z}) := \{f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ bigettiva e } \|f - id\|_\infty < +\infty\}\,.$$

Per il Teorema di Cayley ogni gruppo finito è isomorfo ad un sottogruppo di $W(\mathbb{Z})$. Andremo adesso a dimostrare il seguente risultato:

Teorema 4.5. *Per ogni $n \geq 2$ il gruppo $W(\mathbb{Z})$ si immerge in $\mathrm{QOut}(F_n)$. In particolare il gruppo $\mathrm{QOut}(F_n)$ ha cardinalità non numerabile e contiene elementi di torsione per ogni ordine.*

Per provare questo teorema occorre introdurre una ulteriore classe di quasiendomorfismi di F_n, che non modificano le parole solo localmente. Per gli scopi del teorema useremo la seguente immersione di $W(\mathbb{Z})$. Innanzitutto immergiamo $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{N}$ mappando i in $2i + 2$ per $i \geq 0$ e in $-2i - 1$ per $i < 0$. Questo induce un immersione di $W(\mathbb{Z})$ nel monoide

$$B(\mathbb{N}) := \{\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid \sigma(0) = 0,\ \|\sigma - id\|_\infty < +\infty\}\,.$$

Sarà quindi sufficiente costruire un omomorfismo iniettivo di monoidi da $B(\mathbb{N})$ in $\mathcal{H}(F_n, F_n)^\times$. Preso un $\sigma \in B(\mathbb{N})$ definiamo una mappa $\pi_\sigma\colon F_n \longrightarrow F_n$ come segue: per ogni $g \in F_n$ possiamo rappresentare g in maniera unica come

$w_1 a_n^{i_1} w_2 \cdots w_{l-1} a_n^{i_{l-1}} w_l$ con $w_j \in F_{n-1} \cong \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ e $w_2, \ldots, w_{l-1} \neq \varepsilon$, e $i_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ per $j = 1, \ldots, l$. Definiamo quindi

$$\pi_\sigma(g) = w_1 a_n^{i'_1} w_2 \cdots w_{l-1} a_n^{i'_{l-1}} w_l$$

dove

$$i'_k = \begin{cases} \sigma(i_k) & \text{se } i_k > 0 \\ -\sigma(-i_k) & \text{se } i_k < 0. \end{cases}$$

In pratica andiamo a rimpiazzare ogni occorrenza di a_n^i o a_n^{-i} compresa tra potenze di altre lettere con $a_n^{\sigma(i)}$ e $a_n^{-\sigma(i)}$. Applicando la Proposizione 4.2 con

$$E := \left\{ a_n^i \;\middle|\; |i| \leq \|\sigma - id\|_\infty \right\}$$

si prova che π_σ è un quasimorfismo per ogni $\sigma \in B(\mathbb{N})$, e banalmente la mappa $\sigma \mapsto \pi_\sigma$ è un omomorfismo di monoidi.

Per concludere la dimostrazione del teorema resta da mostrare solamente che la mappa $B(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathrm{QOut}(F_n)$ data da $\sigma \mapsto \pi_\sigma$ è iniettiva.

Siano $\sigma, \sigma' \in B(\mathbb{N})$ distinti. Vogliamo dire che le funzioni π_σ e $\pi_{\sigma'}$ non sono equivalenti. Supponiamo senza perdita di generalità che per un certo i si abbia $\sigma(i) = j > \sigma'(i)$. Sia $\varphi_{a_n^j}$ il quasimorfismo di conteggio che conta il numero di occorrenze di a_n^j e denotiamo $w := a_1 a_n^i a_1$. Allora

$$\pi_\sigma^* \varphi_{a_n^j}(w^k) = \varphi_{a_n^j}((a_1 a_n^j a_1)^k) = k,$$

mentre $\pi_{\sigma'}^* \varphi_{a_n^j}(w^k) = 0$. Facendo variare $k \in \mathbb{N}$ si ottiene quindi che $\pi_\sigma^* \varphi_{a_n^j} \nsim \pi_{\sigma'}^* \varphi_{a_n^j}$ e dunque $\pi_\sigma \nsim \pi_{\sigma'}$.

Corollario 4.6. *Chiamando* $\mathrm{QOut}_{(k)}(F_n)$ *il sottogruppo caratteristico di* $\mathrm{QOut}(F_n)$ *generato da tutti gli elementi di ordine al più* k *e* $\mathrm{Out}_{(fin)}(F_n)$ *il sottogruppo caratteristico generato da tutti gli elementi di ordine finito, per il Teorema 4.5 si ha che tutti questi gruppi sono non banali e formano una catena*

$$\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n) \triangleleft \mathrm{QOut}_{(3)}(F_n) \triangleleft \cdots \triangleleft \mathrm{QOut}_{(fin)}(F_n) \triangleleft \mathrm{QOut}(F_n)$$

di sottogruppi caratteristici.

Introduciamo adesso una terza classe di quasiautomorfismi di F_n, il cui effetto sulle parole ridotte è rimpiazzare certe sottoparole.

Definizione 4.7. Data una parola ridotta w su $S \cup S^{-1}$, una *decomposizione di w* è una sequenza di parole ridotte $(u_1, \dots, u_t)$ tali che la concatenazione $u_1 \cdots u_t$ è ridotta e coincide con w. Dato un insieme $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ di parole ridotte indipendenti il *numero di occorrenze di parole di W* nella decomposizione $(u_1, \dots, u_t)$ è il numero di indici $i \in \{1, \dots, t\}$ per cui $u_i \in W \cup W^{-1}$. Una decomposizione $(u_1 \dots, u_t)$ è detta W-massimale se tale numero è massimale. Una decomposizione $(u_1, \dots, u_{t+1})$ è un raffinamento semplice di $(u'_1, \dots, u'_t)$ se esiste un k tale che $u_i = u'_i$ per $i < k$, $u_k u_{k+1} = u'_k$ e $u_{i+1} = u'_i$ per $i > k$. Una decomposizione è un raffinamento di un'altra se è ottenuta ripetendo raffinamenti semplici.

Lemma 4.8. *Dato un insieme di parole indipendenti $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ e una parola w, esiste un'unica decomposizione W-massimale $(u_1, \dots, u_t)$ di w che sia minimale rispetto al raffinamento tra tutte le decomposizioni W-massimali.*

Dimostrazione. L'esistenza di una decomposizione W-massimale minimale è ovvia. Siano $u = (u_1, \dots, u_t)$ e $u' = (u'_1, \dots, u'_{t'})$ due decomposizioni W-massimali e supponiamo che entrambe siano minimali rispetto al raffinamento. Per induzione è sufficiente mostrare che $u_1 = u'_1$. Se per assurdo così non fosse, poiché le parole in W sono indipendenti si ha che almeno una tra u_1 e u'_1 non sta in $W \cup W^{-1}$ (hanno lo stesso prefisso). Senza perdita di generalità possiamo supporre che $u_1 \notin W \cup W^{-1}$. Per ipotesi u è minimale rispetto al raffinamento, dunque $u_2 \in W \cup W^{-1}$ (altrimenti la decomposizione $(u_1 u_2, u_3, \dots, u_t)$ sarebbe ancora W-massimale e u sarebbe un raffinamento di questa). Se $u'_1 \in W \cup W^{-1}$ allora u'_1 non può essere né più lunga né più corta di u_1: infatti, nel primo caso si avrebbe che u'_1 e u_2 si sovrapporrebbero contraddicendo l'indipendenza di W, mentre nel secondo caso si potrebbe effettuare un raffinamento di u spezzando u_1 e aumentando il numero di occorrenze di parole di W, contraddicendo l'ipotesi di W-massimalità di u. Se anche $u'_1 \notin W \cup W^{-1}$, per la stessa argomentazione fatta in precedenza $u_2 \in W \cup W^{-1}$. Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che u'_1 sia più corto di u_1: questo implica, a causa dell'indipendenza di W, che la lunghezza di $u'_1 u'_2$ è al più la lunghezza di u_1. Ancora, potremmo spezzare u_1 in modo tale da aumentare il numero di occorrenze di parole di W giungendo ad un assurdo. □

In seguito ci riferiremo a questa decomposizione unica come la *W-decomposizione* di w.

Definizione 4.9. Sia $W := \{w_1, w_2\}$ l'insieme costituito da due parole indipendenti che hanno la stessa lettera iniziale e la stessa lettera finale. Data una parola ridotta $w \in F_n$ con W-decomposizione $(u_1, \dots, u_t)$, definiamo la parola

$w' := u'_1 \cdots u'_t$ dove

$$u'_i := \begin{cases} w_2 & \text{se } u_i = w_1 \\ w_1 & \text{se } u_i = w_2 \\ w_2^{-1} & \text{se } u_i = w_1^{-1} \\ w_1^{-1} & \text{se } u_i = w_2^{-1} \\ u_i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La mappa $f_{w_1,w_2} \colon F_n \longrightarrow F_n$ tale che $f_{w_1,w_2}(w) = w'$ è chiamata *quasimorfismo di rimpiazzamento* associato alla coppia $\{w_1, w_2\}$.

Osserviamo che f_{w_1,w_2} è un quasimorfismo grazie al criterio, scegliendo E come l'insieme di tutte le parole di lunghezza al più $\max\{|w_1|, |w_2|\}$. Nella pratica, la funzione f_{w_1,w_2} rimpiazza tutte le occorrenze di $w_1^{\pm 1}$ con occorrenze di $w_2^{\pm 1}$ e viceversa. Poiché le parole rimpiazzate iniziano e finiscono con le medesime lettere, si ha che i quasimorfismi di rimpiazzamento mappano parole ridotte in parole ridotte. Inoltre, f_{w_1,w_2} manda $\{w_1, w_2\}$-decomposizioni in $\{w_1, w_2\}$-decomposizioni. Poiché $f^2_{w_1,w_2} = id$ si ha che

$$f_{w_1,w_2} \in \mathrm{QOut}_{(2)}(F_n).$$

Studiamo adesso l'azione dei quasimorfismi di rimpiazzamento sui quasimorfismi di conteggio. Per costruzione di f_{w_1,w_2} il numero di occorrenze della parola w_2 in w è maggiore o uguale del numero di occorrenze di w_1 in $f_{w_1,w_2}(w)$. Essendo f_{w_1,w_2} una involuzione, si conclude che

$$f^*_{w_1,w_2}\varphi_{w_1} = \varphi_{w_2}, \qquad f^*_{w_1,w_2}\varphi_{w_2} = \varphi_{w_1}.$$

Abbiamo perciò dimostrato che:

Lemma 4.10. *Siano w_1 e w_2 due parole auto-indipendenti con la prima e l'ultima lettera in comune. Se l'insieme $\{w_1, w_2\}$ è indipendente, allora $\widehat{\varphi_{w_1}}$ e $\widehat{\varphi_{w_2}}$ sono contenuti nella stessa orbita in $\mathcal{H}(F_n)$ rispetto all'azione di $\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$.*

Enunciamo anche altri due lemmi riguardanti coppie di parole indipendenti, dalla dimostrazione pressoché banale:

Lemma 4.11. *Sia w una parola auto-indipendente di lunghezza ≥ 2 con lettera iniziale $a \in S \cup S^{-1}$ e lettera finale $b \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{a, a^{-1}\}$. Allora esistono degli interi positivi i, j tali che $\{w, a^i b^j\}$ sia un insieme indipendente.*

Dimostrazione. Sia ℓ la lunghezza di w. Si verifica allora banalmente che $\left\{w, a^\ell b^\ell\right\}$ è un insieme indipendente. $\square$

Lemma 4.12. *Per ogni coppia di elementi distinti e indipendenti $a, b \in S \cup S^{-1}$ e per ogni intero positivo i, j l'insieme $\{ab^{-1}a^{-1}b, a^i b^j\}$ è indipendente.*

Dimostrazione. Poiché $a^i b^j$ non contiene né la lettera a^{-1} né la lettera b^{-1}, nessun prefisso (suffisso) di $ab^{-1}a^{-1}b$ di lunghezza maggiore o uguale a 2 può essere un suffisso (prefisso) di $a^i b^j$. Il caso di prefissi (suffissi) di lunghezza 1 è banale. $\square$

Corollario 4.13. *Siano $a, b \in S \cup S^{-1}$ con $a \notin \{b, b^{-1}\}$ e sia*

$$\begin{aligned}\Phi(F_n, S) : = &\left\{\widehat{\varphi_w} \;\middle|\; w \text{ auto-indipendente e ciclicamente ridotta su } S \cup S^{-1}\right\}\\ &\subseteq \mathcal{H}^*(F_n) \subseteq \mathcal{H}(F_n).\end{aligned}$$

Allora ogni $\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$-orbita che interseca $\Phi(F_n, S)$ contiene almeno uno tra $\widehat{\varphi_a}$ e $\widehat{\varphi_{ab}}$. In particolare, il numero di tali orbite è al più 2.

Dimostrazione. Sia w una parola auto-indipendente e ciclicamente ridotta su $S \cup S^{-1}$. Se $|w| = 1$, allora $w = a$ per una certa lettera a e non c'è niente da dimostrare. Se invece $|w| \geq 2$ con una certa lettera iniziale a e una lettera finale $b \notin \{a, a^{-1}\}$, combinando i Lemmi 4.10, 4.11 e 4.12 si ottiene che il quasimorfismo $\widehat{\varphi_w}$ sta nella stessa $\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$-orbita di $\widehat{\varphi_{ab}}$.
Fissata una coppia $\{a, b\}$ come nelle ipotesi, per mostrare che ogni quasimorfismo in $\Phi(F_n, S)$ sta nella stessa $\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$-orbita di $\widehat{\varphi_a}$ o di $\widehat{\varphi_{ab}}$ consideriamo, con P_1, P_2, I trasformazioni di Nielsen già introdotte, i seguenti automorfismi esterni di F_n:

$$C_k := P_2^{-k} P_1 P_2^k, \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

che agisce sull'insieme di generatori $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ scambiando tra di loro a_{k+1} e a_{k+2} (con la convenzione che $a_{n+1} = a_1$),

$$D_{h,k} := C_h C_{h+1} \cdots C_{k-1} C_k C_{k-1} \cdots C_{h+1} C_h, \qquad 0 \leq h \leq k \leq n-2$$

che scambia le lettere a_{h+1} e a_{k+2} lasciando invariate le lettere restanti, e

$$\overline{D_{h,k}} := D_{h,k} P_2^{-k-1} I P_2^{k-h+1} I P_2^h, \qquad 0 \leq h \leq k \leq n-2$$

che trasforma gli elementi a_{h+1} e a_{k+2} rispettivamente in a_{k+2}^{-1} e a_{h+1}^{-1}. Tali automorfismi sono tutti involuzioni, perciò appartengono certamente a $\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$. Inoltre esse agiscono transitivamente sull'insieme

$$\left(S \cup S^{-1}\right)^2 \setminus \left\{(s, r) \;\middle|\; s \in \left\{r, r^{-1}\right\}\right\}$$

e $A^* \widehat{\varphi_w} = \widehat{\varphi_{A^{-1}(w)}}$ per ogni $A \in \left\{D_{h,k}, \overline{D_{h,k}} \;\middle|\; 0 \leq h \leq k \leq n-2\right\}$, da cui la tesi. $\square$

Il corollario mostra la presenza di al più due orbite che intersecano $\Phi(F_n, S)$, ma non dà alcuna informazione sulla possibilità che $\widehat{\varphi_a}$ e $\widehat{\varphi_{ab}}$ con a, b come nelle ipotesi stiano nella stessa orbita. In effetti non sappiamo se un elemento che colleghi le due orbite esista in $\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$ e neanche in $\mathrm{QOut}(F_n)$. Il seguente lemma però prepara il terreno per mostrare che $\widehat{\varphi_{ab}}$ è contenuto nella chiusura del sottospazio generato dall'orbita di $\widehat{\varphi_a}$.

Lemma 4.14. *Se $\{w_1, w_2\}$ è un insieme di parole indipendenti con la prima e l'ultima lettera in comune allora*

$$f^*_{w_1,w_2}\varphi_a = \varphi_a + (\varphi_a(w_2) - \varphi_a(w_1))\,(\varphi_{w_1} - \varphi_{w_2})\,.$$

Dimostrazione. Confrontando il numero di occorrenze di a in $f_{w_1,w_2}(w)$ con quelle in w si osserva che per ogni occorrenza di w_1 in w, $\#_a(w_1)$ copie di a vengono rimosse, mentre $\#_a(w_2)$ copie di a vengono aggiunte. Allo stesso modo, per ogni occorrenza di w_2 in w, $\#_a(w_2)$ copie di a vengono rimosse e $\#_a(w_1)$ copie di a aggiunte. Combinando ciò con conti analoghi per a^{-1} si ottiene la tesi. □

Corollario 4.15. *Siano $a, b \in S \cup S^{-1}$ con $a \notin \{b, b^{-1}\}$. Allora*

$$\widehat{\varphi_{ab}} \in \overline{\mathrm{Span}(\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n) \cdot \widehat{\varphi_a})}.$$

Dimostrazione. Consideriamo le parole $w := ab^{-1}a^{-1}b$ e $w_k := ab^{-k}aba^{-1}b$ con $k \geq 1$. Definiamo inoltre per ogni $k \geq 1$ l'insieme $W_k := \{w, w_k\}$ che risulta essere un insieme indipendente di parole con stesse lettere iniziali e finali. Possiamo dunque considerare il quasimorfismo di rimpiazzamento $f_{w_k,w}$. Applicando il Lemma 4.14 e passando agli omogeneizzati vale

$$f^*_{w_k,w}\widehat{\varphi_a} = \widehat{\varphi_a} + \widehat{\varphi_{ab^{-1}a^{-1}b}} - \widehat{\varphi_{ab^{-k}aba^{-1}b}}$$

essendo $\varphi_a(ab^{-1}a^{-1}b) = 0$ e $\varphi_a(ab^{-k}aba^{-1}b) = 1$. Poiché le parole $ab^{-1}a^{-1}b$ e ab sono indipendenti, grazie al Lemma 4.10 esiste $g \in \mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$ tale che $g^*\widehat{\varphi_{ab^{-1}a^{-1}b}} = \widehat{\varphi_{ab}}$. Ponendo $g_k := f_{w_k,w}g \in \mathrm{QOut}_{(2)}(F_n)$, vale

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_{ab}} &= g^*\widehat{\varphi_{ab^{-1}a^{-1}b}} = g^*(f^*_{w_k,w}\widehat{\varphi_a} - \widehat{\varphi_a} + \widehat{\varphi_{ab^{-k}aba^{-1}b}}) = \\ &= g_k^*\widehat{\varphi_a} - g^*\widehat{\varphi_a} + g^*\widehat{\varphi_{ab^{-k}aba^{-1}b}}.\end{aligned}$$

Poiché tutti gli elementi di F_n hanno lunghezza finita, passando al limite per $k \to +\infty$ si ha $\widehat{\varphi_{ab^{-k}aba^{-1}b}} \to 0$ e quindi anche $g^*\widehat{\varphi_{ab^{-k}aba^{-1}b}} \to g^*0 = 0$ per continuità dell'azione. Deduciamo allora che

$$\widehat{\varphi_{ab}} = \lim_{k\to+\infty} (g_k^*\widehat{\varphi_a} - g^*\widehat{\varphi_a}) \in \overline{\mathrm{Span}(\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n) \cdot \widehat{\varphi_a})}.$$

□

Osservando banalmente che $\widehat{\varphi_a} \in \mathrm{Hom}(F_n, \mathbb{R})$ e riprendendo il Teorema di Grigorchuk (Teorema 3.7) arriviamo infine al risultato cercato:

Teorema 4.16. *Per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$\mathcal{H}(F_n) = \overline{\mathrm{Span}(\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n) \cdot \mathrm{Hom}(F_n, \mathbb{R}))}.$$

Dimostrazione. Per i Corollari 4.13 e 4.15 vale

$$\Phi(F_n, S) \subseteq \overline{\mathrm{Span}(\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n) \cdot \mathrm{Hom}(F_n, \mathbb{R}))}.$$

Inoltre si ha anche l'inclusione $\{\widehat{\varphi_g} \mid g \in \mathcal{G}(S, \leq)^+\} \subseteq \Phi(F_n, S)$ con il primo insieme denso grazie al Teorema di Grigorchuk. Dunque

$$\mathcal{H}(F_n) = \overline{\mathrm{Span}(\Phi(F_n, S))} \subseteq \overline{\mathrm{Span}(\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n) \cdot \mathrm{Hom}(F_n, \mathbb{R}))} \subseteq \mathcal{H}(F_n),$$

le inclusioni sono tutte delle uguaglianze e perciò

$$\mathcal{H}(F_n) = \overline{\mathrm{Span}(\mathrm{QOut}_{(2)}(F_n) \cdot \mathrm{Hom}(F_n, \mathbb{R}))}.$$

□

Bibliografia

[EF97] David B.A. Epstein and Koji Fujiwara. The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups. *Topology*, 36(6):1275–1289, 1997.

[Fri16] Roberto Frigerio. *Bounded Cohomology of Discrete Groups.* arXiv:1610.08339, 2016.

[Gri94] Rostislav Ivanovich Grigorchuk. Some results on bounded cohomology. In *Combinatorial and Geometric Group Theory, Edinburgh 1993*, volume 204 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 111–163. 1994.

[HS16] Tobias Hartnick and Pascal Schweitzer. On quasiautomorphism groups of free groups and their transitivity properties. *Journal of Algebra*, 450:242–281, 2016.

[Iva90] Nikolai V. Ivanov. Second bounded cohomology group. *Journal of Soviet Mathematics*, 52(1):2822–2824, 1990.

Ringraziamenti

In occasione di questo primo piccolo traguardo, vorrei spendere qualche parola per ringraziare chi, ognuno a modo suo, mi ha accompagnato in questo percorso.
Innanzitutto un sentito ringraziamento va al mio relatore, il Prof. Roberto Frigerio, per la disponibilità sempre mostratami.
Grazie alla mia famiglia, che mi ha sempre incoraggiato e senza il cui supporto non sarei arrivato dove sono adesso.
Un grande ringraziamento va a tutti gli amici di Pisa, in special modo ai coinquilini di Casa Montello e agli amici del Dipartimento, per questi splendidi tre anni passati insieme.
Infine voglio ringraziare anche tutti gli amici di Colle Val d'Elsa, le professoresse del Liceo A.Volta che hanno coltivato la mia passione per la matematica e chiunque in generale mi abbia aiutato negli anni a crescere.