Lezione 3

Maria Stella Gelli

21 ottobre 2009

gelli@dm.unipi.it

Osservazione 1.
1. $X = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}\, continue \,|\, f(\pi) = f(-\pi)\}$ ha dimensione infinita, più che numerabile.
2. $(X, \|\cdot\|_\infty)$ non è indotta da un prodotto scalare.
3. $(X, \|\cdot\|_2)$ non è completo.

Dimostrazione.
1. Esibiamo un insieme V numerabile di vettori linearmente indipendenti
$$V = \{e^{inx}, n \in X\}$$
I vettori di V sono a due a due ortogonali, quindi non può esistere $e^{i\bar{n}x} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e^{jnx}$ con $n_j \neq \bar{n}$.
Altrimenti può essere dimostrato considerando gli esponenziali come soluzioni di equazioni differenziali: $n_1, ..., n_N \in \mathbb{Z}$ non ho preso il finale della dimostrazione
2. Se fosse indotta da un prodotto scalare allora varrebbe l'*identità del parallelogramma*
$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$$
Le seguenti stanno in X e non verificano l'identità precedente Disegno 1.
3. Esibisco una successione $\{f_n\}$ di funzioni che stanno in X che è di Cauchy ma non converge a nessun elemento di X.

□

Esercizio 1. Verificare che le topologie $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono effettivamente diverse e che sono una più fine dell'altra.

Esercizio 2 (Unicità dei coefficenti di Fourier in caso di convergenza uniforme). Sia $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c_n} e^{inx}$ con $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ allora

$$\sum \tilde{c}_n e^{inx} \to f(x) \text{ unif. allora } \tilde{c}_n =< f, e^{inx} > \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

sono proprio i coefficenti di Fourier.

Esercizio 3. Consideriamo $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tale che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n|$. Allora la funzione $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ è di classe C^1.

Esercizio 4. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier reale e complessa delle seguenti funzioni specificando quando questo coincida con la funzione stessa:

1. $f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi, \pi]$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi] \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$
3. $f(x) = x \quad x \in (-\pi, \pi)$
4. $f(x) = |\cos(x)| \quad x \in (-\pi, \pi]$
5. $f(x) = e^x \quad x \in [-\pi, \pi)$
6. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$

Esercizio 5. Rifare la dimostrazione del Teorema (convergenza)nel caso di funzioni C^1 a tratti.

Formulario Serie di Fourier

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{1}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) + a_0 \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Valgono inoltre le seguenti uguaglianze che ci permettono di passare da una serie all'altra.

$$\begin{cases} e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \\ e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx) \end{cases} \tag{3}$$

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}). \tag{4}$$

$$\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}). \tag{5}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(cos(nx) - isin(nx))dx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n). \tag{6}$$

$$\text{Data } \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{allora} \quad \begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = \frac{1}{i}(c_{-n} - c_n) \end{cases} \tag{7}$$

$$\text{Date } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \quad \text{allora} \quad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases} \tag{8}$$

Osservazione 2. Possiamo usare il seguente lemma fatto a lezione per calcolare gli sviluppi in serie di Fourier di alcune funzioni in funzione delle loro derivate

Lemma 1. Se $f \in C^1$ a tratti e $C^0(\mathbb{R})$ allora vale $c_n(f') = inc_n(f)$

Questo è il caso generale di un lemma fatto a lezione la cui dimostrazione può essere fatta come *Esercizio.*

Esercizio 6. Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$