Un modello per la sfocatura di immagini fotografiche

1 Modello di perturbazione di un segnale unidimensionale

Dato un segnale unidimensionale, questo può essere discretizzato considerandolo come una successione infinita di interi (un vettore di lunghezza infinita) $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Una perturbazione lineare di questo segnale potrá, allo stesso modo, essere considerata come una applicazione lineare che modifica ogni componente del vettore in funzione delle componenti vicine; arriviamo quindi a modellizzare la perturbazione di un segnale come un prodotto tra una matrice a banda (con banda di lunghezza k che rappresenta la perturbazione locale di ogni componente del vettore) e un vettore:

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & \cdots & a_k & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & \cdots & a_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso peró, il segnale ha una lunghezza finita (che chiamiamo n), dobbiamo perciò operare un *taglio* alla matrice e al vettore, senza modificare le soluzioni. Possiamo procedere in due modi:

1. Consideriamo il sistema come rettangolare con piú incognite che equazioni, in questo modo la matrice di perturbazione sará comunque a banda di dimensione $(n) \times (n + k - 1)$, avremo poi che il vettore incognito avrà lunghezza $n + k - 1$ e il vettore soluzione avrá lunghezza n.

$$\begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \times & \cdots & \times & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \times & \cdots & \times & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix}.$$

2. Consideriamo il sistema come rettangolare con piú equazioni che incognite, anche in questo modo la matrice di perturbazione sará a banda, di

dimensione $(n+k-1)\times(n)$ e il vettore incognito avrá dimensione n e quello soluzione $n+k-1$.

$$\begin{bmatrix} \times & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \times & 0 & \vdots \\ \times & \vdots & \times & 0 \\ 0 & \times & \vdots & \times \\ 0 & \vdots & \times & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \times \end{bmatrix}.$$

In questo lavoro ci occuperemo del secondo metodo.

2 Trasformazione di un sistema rettangolare a banda in un sistema con matrice circolante

Dato un sistema rettangolare con piú equazioni che incognite, della forma vista nel paragrafo precedente, se questo sistema ha soluzione, possiamo ridurlo a un sistema con matrice circolante, cioè della forma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot C^i = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \quad \text{con } C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia $Ax = b$ un sistema rettangolare a banda con x di lunghezza n eb di lunghezza m $m > n$ (nel nostro caso si avrà $m = n+k-1$) e sia $\bar{A}$ la matrice ottenuta da A trasponendo e aggiungendo degli angoli in basso a sinistra e in alto a destra in questo modo:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & \cdots & a_k & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k & 0 & a_1 & \cdots & a_{k-1} \\ 0 & a_1 & \cdots & a_k & 0 & a_1 & \cdots \\ a_k & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_1 \\ \cdots & a_k & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_2 & \cdots & a_k & 0 & a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix}.$$

Allora abbiamo che $\bar{A} \cdot A$ e matrice circolante $n \times n$ della forma vista precedentemente con

$$c_i = \sum_{j=i+1}^{k} a_j \cdot a_{j+i} \; + \sum_{j=1}^{i-n+k+1} a_j \cdot a_{n-m+i} \quad \text{per } \; i = 0, ..., n-1.$$

Osservazione 1 *Sia A matrice circolante $n \times n$ allora $A = FDF^H$ con $F = (\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \omega_n^{i \cdot j})_{i,j=0,\ldots,n-1}$ matrice unitaria, con $\omega_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ e $D = diag(d_1, ..., d_n)$ con $d_i = \sqrt{n} \cdot F^H(A \cdot e_i)$.*

Perció abbiamo che il sistema $Ax = b$ puó essere trasformato in $Cx = \bar{b}$ con $C = \bar{A} \cdot A$ e $\bar{b} = \bar{A} \cdot b$ che sistema circolante e puó essere risolto in $O(n)$passi.

3 Immagini, caso bidimensionale

Nel caso di immagini abbiamo un segnale bidimensionale e la perturbazione di un segnale del genere puó essere modellizzata attraverso la PSF (*point spread function*), una matrice M di dimensione $(2h+1) \times (2h+1)$ $(k = 2h+1)$ con $m_{i,j} \geq 0$ e $\sum_{i,j} m_{i,j} = 1$, applicata a ogni punto dell'immagine.

Considerando quindi la matrice dell'immagine come un vettore possiamo, anche in questo caso, considerare la sfocatura come un prodotto matrice vettore; abbiamo peró che, a differenza del caso unidimensionale, la matrice non è a banda ma a banda a blocchi, con blocchi a banda. Seguendo sempre il secondo modello proposto arriviamo ad un sistema rettangolare con con piú equazioni che incognite. Procedendo in modo analogo al caso unidimensionale posssiamo trasformare il sistema in un sistema circolante a blocchi con blocchi circolanti. Per questo moltiplichiamo a sinistra di ogni lato dell'uguaglianza $Ax = b$ per una matrice $\hat{A}$ costruita a partire dalla matrice A trasponendo e aggiungendo gli angoli ai blocchi e nei blocchi come nel caso unidimensionale:

$$A^T = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \cdots & A_k & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_1 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_k & 0 & \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_{k-1} \\ 0 & \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_k & 0 & \bar{A}_1 & \cdots \\ \bar{A}_k & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \bar{A}_1 \\ \cdots & \bar{A}_k & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bar{A}_2 & \cdots & \bar{A}_k & 0 & \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_k \end{bmatrix}.$$

Dove gli A_i sono i blocchi a banda della forma vista nel caso unidimensionale e gli $\bar{A}_i$ sono anch'essi ottenuti come visto prima. Abbiamo perció la seguente

Osservazione 1 *Sia $\hat{C} = \hat{A} \cdot A$ questa matrice circolante a blocchi con blocchi circolanti.*

4 Prodotto di Kronecker

Il prodotto di Kronecker ci permette, in maniera agevole di esprimere matrici a blocchi strutturate:

definizionekron

Date A e B matrici $n \times n$ allora

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdot B & a_{1,2} \cdot B & \cdots & a_{1,n} \cdot B \\ a_{2,1} \cdot B & a_{2,2} \cdot B & \cdots & a_{2,n} \cdot B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} \cdot B & \cdots & \cdots & a_{n,1} \cdot B \end{bmatrix}.$$

Abbiamo inoltre che valgono le seguenti

Proprietá Prodotto di Kronecker 1

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \tag{1}$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \tag{2}$$

Da queste considerazioni abbiamo che, data una matrice $\hat{C}$ circolante a blocchi con blocchi circolanti, con le notazioni precedenti abbiamo:

$$\hat{C} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{i,j} C^i \otimes C^j;$$

quindi

$$\hat{C}x = b \Rightarrow (F^H \otimes F^H)\bar{C}(F \otimes F)(F^H \otimes F^H)x = (F^H \otimes F^H)b$$

con $F = \frac{1}{\sqrt{n}}(\omega_n^{(i-1)(j-i)})$, adesso, ponendo $D = diag(1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, ..., \bar{\omega}^{n-1})$, otteniamo che

$$x = (F \otimes F)(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} D^i \otimes D^j)^{-1}(F^H \otimes F^H)b$$

5 Costi ed esperimenti

Sfruttando quanto detto fino ad ora possiamo costruire un algoritmo che, data un immagine sfocata e data la sua PSF, ricostruisca l'immagine originale, costruendo prima la matrice circolante (in tempo $O(n^2 k^2)$)), calcolando poi le trasformate di Fourier (in tempo $O(n^2 \log(n)^2)$) e la soluzione finale. Il costo dell'algoritmo alla fine sará $O(n^2 \log(n)^2)$ per immagini quadrate di dimensione n, $O(mn \log(m) \log(n))$ per immagini rettangolari di dimensioni m e n.

Sono stati effettuati anche degli esempi per controllare l'effettivo funzionamento dell'algoritmo, oltre alla sua stabilitá numerica Gli esperimenti sono stati fatti con una immagine in bianco e nero di dimensione 665×889,la Figura 1. Per verificare il lavoro dell'algoritmo abbiamo utilizzato due tipi di PSF:

- la prima con tutti gli elementi uguali $m_{i,j} = \frac{1}{(2h+1)^2}$ $i, j = 1, ..., 2h + 1$;
- la seconda con distribuzione gaussiana degli elementi nella matrice $m_{i,j} = t \cdot e^{-r(i^2+j^2)}$ $i, j = -h, ..., h$ e $t, r \in \mathbb{R}$.

Abbiamo provato inizialmente a sfocare l'immagine con matrici di spargimento di grandezza crescente per ognuno dei due tipi, ottenendo dei buoni risultati, considerando anche l'esigua quantitá di calcoli effettuati, sotto ci sono alcuni esempi di sfocatura e rifocatura, nelle figure da 2 a 5.

Figure 1: Immagine usata per gli esperimenti

Successivamente abbiamo creato del rumore nel sistema, perturbando l'immagine sfocata. Abbiamo aggiunto numeri casuali (dell'ordine delle unitá, 10^{-1}, 10^{-2}) a ogni elemento della matrice. I risultati ottenuti non sono ottimi; le ultime immagini sono le rifocature delle immagini viste sopra ma con una perturbazione dell'ordine delle unitá. Per far fronte a questo problema e a casi di instabilitá numerica, é stato aggiunto al codice un taglio di valori troppo bassi prima della matrice prima dell'applicazione della FFT.

6 Conclusioni

L'algoritmo costruito presenta alcuni problemi di instabilitá numerica, riducibili in certi casi; ma d'altra parte molto veloce.

Figure 2: Sfocatura Gaussiana forte con PSF di dimensione 11

Figure 3: Rifocata

Figure 4: Sfocatura uniforme con PSF di dimensione 11

Figure 5: Rifocata

Figure 6: Rifocata da sfocatura Gaussiana con rumore

Figure 7: Rifocata da sfocatura uniforme con rumore