UNIVERSITÀ DI PISA

Appunti del corso "Analisi superiore"

C. Ginevra Biondi

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

Appunti del corso "Analisi superiore" tenuto dal prof V.Benci nell'AA 2017/2018

Capitolo 1

Teoria delle distribuzioni

Sia $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ con la topologia $\phi_n \to \phi$ se $\exists K$ compatto tale che $supp(\phi_n) \subset K$ per ogni n e inoltre $\phi_n^{(k)} \to \phi^{(k)}$ uniformemente per ogni k

Definizione: chiamiamo $T \in D(\Omega)'$ una distribuzione

esempio: $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\langle T_f, g\rangle = \int_\Omega fg$
esempio 2: $\langle \delta, g\rangle = g(0)$

1.1 operazioni sulle distribuzioni

abbiamo gratis le operazioni di $+$ e $\langle , \rangle$, osserviamo inoltre che $D(\Omega)'$ non è un'algebra ma un $D(\Omega)$-modulo.
$\langle \psi T, \phi\rangle = \int T\psi\phi = \langle T, \psi\phi\rangle$

Derivazione Definiamo la derivata di una distribuzione come

$$\langle \partial_i T, g\rangle = -\langle T, \partial_i g\rangle$$

Esempio

$$DH(x) = \delta(x)$$

dove H è la funzione di Heavyside. Infatti applicando la definizione

$$\langle H', g\rangle = -\langle H, g'\rangle = -\int_0^\infty g = g(o)$$

□

Traslazione

$$\langle \pi_a T, g\rangle = \langle T, \pi_{-a} g\rangle$$

convergenza debole

Definizione 1.1.1.

$$T_n \rightharpoonup T$$

se $\forall g \in D$

$$\langle T_n, g\rangle \to \langle T, g\rangle$$

successione di funzioni che converge ad una distribuzione

$\begin{cases} f_n = n \text{ su } [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ f_n = 0 \text{ altrove} \end{cases}$

Converge alla δ di Dirac nel senso descritto sopra. Infatti vediamo che

$$\langle f_n, g\rangle = \int_{I_n} ng = \frac{1}{n} ng(\xi_n) \to g(0)$$

□

Problema Come è noto abbiamo che $\frac{1}{x} \notin L^1$, vediamo come possiamo definire una distribuzione associata. Vale $\frac{1}{x} = Dlog|x|$

$$\langle \frac{1}{x}, g\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[-\varepsilon,+\varepsilon]^c} \frac{1}{x} g$$

ora possiamo scrivere $g(x) = g(0) + x\psi(x)$ con $\psi \in C_0^\infty$ per cui

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[-\varepsilon,+\varepsilon]^c} \frac{1}{x} g(0) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[-\varepsilon,+\varepsilon]^c} \psi(x) = \int \psi(x)$$

dunque intanto l'espressione ha senso vicino a 0,inoltre

$$\langle Dlog|x|, g\rangle = \langle -log|x|, g'\rangle = \int -log|x|g' = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[-\varepsilon,+\varepsilon]^c} g' log|x| = -\lim log|x|g|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \lim \int_{[-\varepsilon,+\varepsilon]^c} \frac{1}{x} g$$

Ora però abbiamo che $-\lim log|x|g \mid_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \to 0$ poichè

$$log|x|g \mid_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = log|x|g(0) \mid_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + xlog|x|\psi(x) \mid_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = xlog|x|\psi(x) \mid_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \to 0$$

dato che $xlog|x| \to 0$ per $x \to 0$ □

Integrale di una distribuzione Vogliamo definire un oggetto del tipo

$$T = \int_{-\infty}^{x} S$$

dove S è una distribuzione.

Metodo naïve

$$\langle T, g\rangle = \langle \int_{-\infty}^{x} S, g\rangle = -\langle S, \int_{-\infty}^{x} g\rangle$$

Abbiamo però il problema che se $g \in C_0^\infty$ non è detto in generale che g' sia a supporto compatto e quindi l'espressione non è nemmeno ben definita. Sia allora

$$V = \{g \in D \mid \int g = 0\} = \{g \mid g = D\psi, \psi \in D\}$$

vogliamo definire una proiezione $D \to V$

$$g = g_0 \left[\int g \right] + g_1(x) = P_0 g + P_1 g$$

con $\int g_0 = 1$. In questo modo risulta $P_1 g \in V$, si verifica a mano che la definizione è ben posta e coerente (tutte le operazione che abbiamo fatto sono continue)

Nota 1.1.2. T è soluzione $\Rightarrow T + c$ è soluzione

Definizione 1.1.3 (supporto di una distribuzione)**.** Diciamo che $x \notin suppT$ se $\exists \varepsilon \mid \int Tg = 0$ $\forall g \in D(B_\varepsilon)$

1.2 Funzioni a decrescenza rapida e distribuzioni temperate (Schwartz)

Definizione 1.2.1. Chiamiamo spazio di Schwartz o spazio delle funzioni a decrescenza rapida

$$S = \{g \in C^\infty \mid ||g||_{h,k} < \infty \forall h, k\}$$

Dove

$$||g||_{h,k} = sup_{\mathbb{R}^n} |x^h \partial^k g|$$

Definizione 1.2.2. S' ovvero il duale di S viene chiamato spazio delle distribuzioni temperate

Abbiamo le seguenti inclusioni

$$D \hookrightarrow S \hookrightarrow C^\infty$$

1.3 Trasformata di Fourier

Definizione 1.3.1. Chiamiamo l'operatore $F : L^2 \to L^2$ definito come

$$Fu(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\xi} dx$$

Proposizione 1.3.2. *$F : L^2 \to L^2$ è un'isometria (definita a priori su $L^1 \bigcap L^2$, si estende poi a L^2), ovvero*

$$\langle u, v \rangle = \langle Fu, Fv \rangle$$

con il prodotto scalare di L^2
Inoltre F è un operatore unitario, ovvero il suo spettro si trova sulla circonferenza unitaria.

Ricordiamo tra le proprietà di F

$$F(\partial u) = ixF(u)$$

per cui una proprietaà che ci è comoda è che u assorba tutte le potenze di x per poterne fare l'integrale, ossia per quanto definito sopra $u \in S$.

Nota 1.3.3. $F : S \to S$ è isomorfismo lineare.

1.3.1 Trasformata di Fourier di una distribuzione

Data una distribuzione T ne definiamo la trasformata di Fourier come l'unico operatore tale che

$$\langle FT, g\rangle = \langle T, \overline{F}g\rangle$$

abbiamo inoltre $F : S' \to S'$.

1.3.2 Spazi di Sobolev frazionari

Consideriamo la norma data da

$$||u||^2_{H^k} = \int |D^k u|^2 + |u|^2 = \langle D^k u, D^k u\rangle + \langle u, u\rangle = \langle FD^k u, FD^k u\rangle + \langle Fu, Fu\rangle = \int (1 + |\xi|^{2k})\hat{u}^2$$

La norma data dall'ultimo passaggio è equivalente a

$$\int (1 + |\xi|^2)^k \hat{u}^2$$

Definizione 1.3.4. Una definizione equivalente di spazio di Sobolev è la seguente

$$H^s = \{u \mid ||u||_s < \infty\}$$

dove

$$||u||^2_s = \int (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}^2$$

Si possono così definire i cosiddetti *operatori pseudodifferenziali* come ad esempio $\triangle^{\frac{1}{2}}$

Nota 1.3.5.

$$H^s \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow H^{-s}$$

e inoltre

$$(H^s)' = H^{-s}$$

Infatti

$$|\int uv| = |\int \hat{u}\hat{v}| = |\int (1 + \xi^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\hat{v}(1 + \xi^2)^{-\frac{s}{2}}| \leq \left(\int (1 + \xi^2)^s \hat{u}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1 + \xi^2)^{-s} \hat{v}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

Proposizione 1.3.6. *Le proprietà classiche della trasformata di Fourier valgono anche per le distribuzioni*

Dimostrazione. applicare la definizione □

Esempio(Trasformata di Fourier della δ di Dirac)

$$F(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$F(\delta_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(x - a)e^{-ix\xi}dx = \frac{e^{-ia\xi}}{\sqrt{2\pi}}$$

1.4 Applicazioni della trasformata alle PDE

Esempio: equazione di d'Alambert (corde vibranti)

Consideriamo l'equazione alle derivata parziali

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$

Applicando la trasformata rispetto a x si ottiene la nuova equazione

$$\partial_t^2 \hat{u} + \xi^2 \hat{u} = 0$$

da cui, fissando ξ

$$\hat{u}(t) = C_\xi e^{-i\xi t}$$

per cui otteniamo la soluzione come

$$u(t,x) = \int C_\xi e^{-i\xi t} e^{i\xi x} d\xi = \int C_\xi e^{i\xi(x-t)d\xi}$$

Esempio 2

Sia data

$$P(D)u = f$$

dove P è un polinomio, applicando la trasformata otteniamo

$$P(i\xi)\hat{u} = \hat{f} \Rightarrow u = F^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{P(i\xi)}\right)$$

Esempio 3

$$P(D)u = \delta$$

, chiamiamo

$$\hat{E} = \frac{1}{P(i\xi)}$$

la soluzione fondamentale del problema, vediamo che in effetti la soluzione al problema

$$P(D)u = f$$

è data da

$$u = E * f$$

Infatti

$$\hat{u} = \hat{E}\hat{f} \rightsquigarrow u = E * f = \int G(x,y) f(y) dy$$

(G la funzione di Green)

Esempio 4

$$-\triangle u + u = f \rightsquigarrow \hat{u} = \frac{\hat{f}}{1+\xi^2}$$

1.5 Applicazione al problema dell'Hamiltoniano quantistico

Esaminiamo l'operatore *Hamiltoniano quantistico*

$$H = \frac{1}{2}(-D^2 - x^2)$$

e prendiamo in considerazione il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{4}\int \left(|Du|^2 + x^2u^2\right) dx$$

, abbiamo che

$$dJ_u[v] = \frac{1}{2}\int DuDv + x^2uv = \frac{1}{2}\int \left(-D^2u + x^2u\right) v = \langle Hu, v\rangle$$

Prendiamo ora

$$V = \{u \in L^1_{loc} | Du \in L^2, xu \in L^2\}$$

e

$$M = \{u \in V | \frac{1}{2}\int |u|^2 = 1\}$$

ci chiediamo se sia possibile risolvere il problema

$$min_M J(u)$$

Se dimostriamo che J effettovamente ammette minimo su M allora mediante moltiplicatori di Lagrange ci riduciamo a risolvere il problema

$$J'(u) = \lambda A'(u)$$

dove $A(u) = \int |u|^2$.
da cui il problema di autovettori

$$Huv = \lambda uv$$

Dimostriamo ora che J ammette minimo su M.

Dimostrazione. Ci basta mostrare che J è debolmente semicontinuo inferiormente e che M è compatto. Allora per Weierstrass avremo che J ammette minimo
J è una norma su V per cui un risultato generale ci dice che è debolmente LSC: infatti

$$\lim ||u_n||^2 = \lim(||u||^2 + 2\langle u, w_n\rangle + ||w_n||^2) \geq ||u||^2 = ||\lim u_n||^2$$

con $u_n = u + w_n$, $w_n \rightharpoonup 0$

Vediamo ora che M è compatto. Ricordiamo che vale il seguente risultato di cui daremo dimostrazione più avanti

Teorema 1.5.1 (Sobolev).

$$H^1(B_r) \hookrightarrow L^2(B_r)$$

compattamente

Vogliamo mostrare che l'inclusione

$$V(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

è compatta, ovvero che ogni successione u_n convergente debolmente in V converge fortemente in L^2. Prendiamo quindi

$$u_n \rightharpoonup u$$

in $||.||_V$, vediamo che

$$||u_n - u||_2^2 \to 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n - u|^2 = \int_{B_r} |u_n - u|^2 + \int_{B_r^c} |u_n - u|^2 \leq \int_{B_r} |u_n - u|^2 + \frac{1}{R^2} \int_{B_r^c} |u_n - u|^2 x^2 \leq \int_{B_r} |u_n - u|^2 + \frac{M}{R^2}$$

Ora siccome $||u||_V \geq ||u||_{H^1}$ per il teorema di immersione $\int_{B_r} |u_n - u|^2 \leq \varepsilon$ per n grande abbastanza mentre $\frac{M}{R^2} \leq \varepsilon$ per R abbastanza grande, da cui la tesi

$\square$

Troviamo ora esplicitamente autovalori e autovettori di H. Per quanto visto sopra $\exists \psi_0 \in M$ ed $\exists \lambda_0$ tali che

$$H\psi_0 = \lambda_0 \psi_0$$

ovvero

$$(-D^2 + x^2)\psi_0 = \lambda_0 \psi_0$$

applicando ora la trasformata di Fourier all'espressione sopra otteniamo

$$(-\xi^2 - D_\xi^2)\hat{\psi_0} = \lambda_0 \hat{\psi_0}$$

ora dato che l'operatore resta invariato sotto l'azione della trasformata deve essere lo stesso per la soluzione ψ_0 per cui abbiamo che tale soluzione è una gaussiana

$$\psi_0 = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\frac{1}{2}(-D + x)(D + x) = \frac{1}{2}(-D^2 + x^2 - Dx + xD) = H + \frac{1}{2}[D, x]$ dove chiamiamo $[D, x]$ il commutatore tra D e x, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-D+x) = a^+$ l'operatore di salita (o di creazione) e $\frac{1}{\sqrt{2}}(D+x) = a^-$ l'operatore di discesa (o di distruzione).
calcoliamo ora esplicitamente il commutatore

$$[D, x]\phi = (-Dx + xD)\phi = -D(x\phi) + xD\phi = -xD\phi - \phi + xD\phi = [-1]\phi$$

per cui

$$H + \frac{1}{2}[D, x] = H - \frac{1}{2} \Rightarrow H = a^+ a^- + \frac{1}{2}$$

Calcolo autovalori

Osserviamo intanto che la formula trovata in precedenza

$$\langle Hu, v \rangle = \frac{1}{2} \int \left(-D^2 u + x^2 u\right) v = \frac{1}{2} \int DuDv + x^2 uv = \langle u, Hv \rangle$$

Ci dice che H è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare di L^2 e dalla teoria generale sugli spazi di Hilbert sappiamo allora che H avrà spettro reale discreto[1]

$$He^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}(-D^2 + x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}(-D(e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)) + x^2e^{-\frac{x^2}{2}}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

per cui

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}$$

Proposizione 1.5.2. *$a^+\psi_0$ e $a^-\psi_0$ sono ancora autovettori per H.*

Dimostrazione. Vediamolo per $\psi_1 = a^+\psi_0$

$$H\psi_1 = Ha^+\psi_0 = a^+a^-a^+\psi_0 + \frac{1}{2}a^+\psi_0$$

ma $a^-a^+ = H + \frac{1}{2}$ per cui

$$H\psi_1 = a^+\left(H + \frac{1}{2}\right)\psi_0 + \frac{1}{2}a^+\psi_0 = a^+\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\right)\psi_0 + \frac{1}{2}a^+\psi_0 = (1 + \lambda_0)\,\psi_1$$

Si prova facilmente per induzione che

$$\begin{cases} \psi_{k+1} = a^+\psi_k \\ \lambda_{k+1} = 1 + \lambda_k \end{cases}$$

Allo stesso modo si trova chwe $a^-\psi_k$ è autovettore per H

□

Nota 1.5.3. Abbiamo visto che

$$FH = HF$$

dove F è la trasformata di Fourier, infatti

$$\begin{cases} FH\phi = F(-D^2\phi + x^2\phi) = \xi^2\hat{\phi} - \partial_\xi^2\hat{\phi} \\ HF\phi = H(\hat{\phi}) = -\partial_\xi^2\hat{\phi} + \xi^2\hat{\phi} \end{cases}$$

Per cui gli autovettori di H sono anche autovettori di $F \Rightarrow \psi_k$ sono autofunzioni per F

1.6 Teorema di immersione di Sobolev

Diamo ora una dimostrazione che sfrutta la trasformata di Fourier di un teorema già utilizzato in precedenza.

Teorema 1.6.1 (Sobolev)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, allora si ha che l'immersione*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

è compatta.

[1] L'operatore *Hamiltoniano classico* invece non gode di tale proprietà

Dimostrazione. Data $u_n \rightharpoonup u$ in H_0^1 vogliamo vedere che questa converge fortemente in L^2 a meno di sottosuccessione. Estendiamo le u_n a 0 fuori da Ω (posso farlo in modo continuo visto che sono a supporto compatto), ora abbiamo che u_n limitata in $L^2 \Rightarrow xu_n$ limitata in $L^1 \Rightarrow D\hat{u_n}$ limitata in $L^\infty \Rightarrow \hat{u_n}$ è uniformemente equicontinua (unif. Lipsch.)$\Rightarrow$ per Acoli-Arzelà converge uniformemente sui compatti per cui

$$\hat{u_n}\chi_{B_r} = \hat{v_n} \to v$$

uniformemente.

Abbiamo inoltre che $\hat{u_n} \in L^2$ poichè $u_n \in L^2$, ora

$$||\hat{u_n} - \hat{v_n}||_2^2 = \int_{B_r^c} |\hat{u_n}|^2 \leq \frac{1}{R^2} \int_{B_r^c} \xi^2 |\hat{u_n}|^2 \leq \frac{1}{R^2} \int_{B_r^c} (1+\xi^2)|\hat{u_n}|^2 \leq \frac{1}{R^2} ||u_n||_{H_0^1} \leq \frac{M}{R^2}$$

che possiamo rendere piccolo a piacere aumentando R (ogni successione debolmente convergente è limitata in norma)
Per cui in definitiva abbiamo

$$\lim ||u_n - u||_2 \leq \lim \left(||u_n - v_n|| + ||v_n - v|| + ||u - v||\right) \leq 3\varepsilon$$

$\square$

Capitolo 2

Problemi variazionali

In questo capitolo ci occupiamo di discutere l'esistenza di una soluzione debole e forte per problemi riconducibili a problemi di minimo per un funzionale integrale tra Banach

Definizione 2.0.1. $J(u) : B \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in x se esiste un'applicazione lineare dJ_x

$$J(x+v) = J(x) + dJ_x[v] + o(||v||)$$

Proposizione 2.0.2. *dJ continuo $\Rightarrow J$ differenziabile (dimostrazione analoga al caso di $\mathbb{R}^2$) e inoltre se J differenziabile vale*

$$dJ_x[v] = \frac{d}{dt}J(x+tv)|_{t=0}$$

Esempio classico

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + f(x,u)$$

dove Ω è un limitato di $\mathbb{R}^n$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, in questo caso abbiamo[1]

$$dJ_u[v] = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla v + t^2|\nabla v|^2) + f(x, u+tv)\ |_t = 0 \tag{2.1}$$

$$= \int_\Omega \nabla u \nabla v + \partial_u f v \tag{2.2}$$

$$= \int_\Omega (-\triangle u + \partial_u f)v \tag{2.3}$$

Nota 2.0.3. $D : C^1 \to L^2$, $D : L^2 \to (C^1)'$ (D antisimmetrico), $-\triangle : C^1 \to (C^1)'$ (inoltre $-\triangle$ è operatore simmetrico, in quanto tale ammette uno spettro reale di autovalori isolati)

Proposizione 2.0.4 (Disuguaglianza di Poincarè). *$1 \le p < \infty$,$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato allora $\exists C = C(\Omega, p)$ tale che*

$$||u||_p \le C||\nabla u||_p$$

$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

[1] abbiamo supposto u regolare per poter applicare Gauss-Green nell'ultimo passaggio, inoltre il termine di bordo non dà contributo in quanto la soluzione debole deve essere valida per ogni v nell'ambiente considerato, il che include v nulli al bordo

In particolare dunque se ci troviamo in $H_0^1(\Omega)$ abbiamo

$$||\nabla u||_2^2 \geq const||u||_2^2$$

ovvero il termine quadratico in ∇u si stima dal basso con un termine quadratico in $||u||$

Esempio: esistenza del minimo per un funzionale con potenziale sottoquadratico Consideriamo il problema

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - V(u)$$

con $V(u) \leq M + k|u|^\alpha$, $\alpha \in (0,2)$
un funzionale di questo tipo è limitato inferiormente per quanto osservato prima

Passi per risolvere un problema di minimo di questo tipo:

- vedere che il funzionale è limitato inferiormente
- trovare una successione minimizzante
- vedere che tale successione converge in qualche senso

Nota 2.0.5. $u' \in L^2 \Rightarrow u \in H^1$ e in particolare possiamo scrivere

$$|u(t_2) - u(t_1)| = |\int_{t_1}^{t_2} u'| \leq ||u'||_2(t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

2.1 Teorema del passo montano e condizione di Palais-Smale

Definizione 2.1.1. una successione u_n si dice di $Palais - Smale$ per un funzionale J se
$$\begin{cases} J(u_n) \to c \\ J'(u_n) \to 0 \text{ come operatore} \end{cases}$$

Definizione 2.1.2. Diciamo che un operatore $J : M \to \mathbb{R}$ soddisfa la condizione di $Palais - Smale$ se ogni successione di Palais-Smale per J è compatta, ovvero ha un'estratta convergente fortemente

Lemma 2.1.3 (Lemma di deformazione)**.**

Teorema 2.1.4 (del passo montano per spazi di Hilbert)**.** *Sia V un Hilbert, $J \in C^{1,1}$ (ovvero con derivate prime Lipsch.), $J : V \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\begin{cases} J(0) = 0 \\ J(u) \geq \alpha > 0 \forall u \in B_r(0), u \neq 0 \textit{ per qualche } r \textit{ abbastanza piccolo} \\ \exists e \neq 0 \textit{ tale che } J(e) \leq 0 \\ J \textit{ soddisfa la condizione di Palais-Smale} \end{cases}$$

Allora se $c = inf_{\gamma\in\Gamma} max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$*, dove* $\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], V) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ *allora* $\exists u \mid J(u) = c, J'(u) = 0$ *(ovvero c è un punto critico).*

Dimostrazione. Siano

$$J^a = \{u \in V \mid J(u) \le a\}$$

,

$$J_a = \{u \in V \mid J(u) \ge a\}$$

. Siccome ci troviamo in un Hilbert allora posso identificare dJ con ∇J e abbiamo una nozione di discesa mediante il gradiente.
Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = \frac{-\nabla J}{1+||\nabla J||} \text{ (il denominatore ci garantisce la limitatezza della derivata prima di } \eta \text{)} \\ \eta(0,u) = u \end{cases}$$

Il RHS della prima equazione è limitato e Lipsch. per le ipotesi che abbiamo dato su J, quindi per Cauchy esiste una soluzione globale.[2] Ora per il *lemma di deformazione* se assumiamo che c non è punto critico abbiamo che possiamo deformare $J_{c-\varepsilon}$ in $J^{c+\varepsilon}$ con un semigruppo di omeomorfismi a un parametro.

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in J_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}$$

vale

$$||\nabla J|| \ge b$$

$$dJ_\eta = \langle \nabla J(\eta), \eta' \rangle = \langle \nabla J(\eta), \frac{-\nabla J}{1 + ||\nabla J||} \rangle = \frac{-||\nabla J||^2}{1 + ||\nabla J||} \le -\beta$$

Inoltre esiste T tale che[3]

$$\eta(T, J^\varepsilon) \in J^\varepsilon \Rightarrow \tag{2.4}$$

$$J(\eta(T,u)) - J(\eta(0,u)) = \int_0^T dJ_\eta \le -\beta T \Rightarrow \tag{2.5}$$

$$J(\eta(T,u)) \le c + \varepsilon - \beta T \tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

Dall'ultima disequazione segue che la curva finisce sotto $c - \varepsilon$: allora ho

$$c \le max_{t\in[0,T]} J(T,\gamma) \le c - \varepsilon$$

assurdo: c allora deve essere un punto critico

□

Applicazioni del teorema sopra Discutere l'esistenza del minimo per il funzionale

$$J(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p}|u|^p$$

[2] In realtà il teorema vale anche per funzionali C^1 tra spazi di Banach
[3] Vedere lemma di deformazione

in H_0^1. Vediamo che J è Palais-Smale. Sia u_n una successione PS per J, ovvero

$$J(u_n) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p}|u_n|^p = c + \varepsilon_n \tag{2.8}$$

$$\nabla J(u_n) = -\triangle u_n - |u_n|^{p-2}u_n = \chi_n \rightharpoonup 0 \tag{2.9}$$

$$\tag{2.10}$$

I passo: u_n limitato $\Rightarrow u_n \rightharpoonup u$
II passo: $u_n \to u$
Moltiplichiamo 2.10 per $\frac{1}{p}u_n$ e integrando otteniamo

$$\frac{1}{p}\int_0^1 |\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p}|u_n|^p = \int_0^1 \frac{1}{p}\chi_n u_n$$

Sottraendo ora 2.9 otteniamo

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_0^1 |\nabla u_n|^2 = c + \varepsilon_n + B\int \chi_n u_n \leq c + \varepsilon_n + ||\chi_n||||u_n||$$

Ovvero $||\nabla u_n||^2 \to 0$ e dall'immersione compatta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ abbiamo la tesi □

2.1.1 Condizione di Ambrosetti-Rabinowitz

Consideriamo il funzionale

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - v(u)$$

Dove $v > 0$, v sovraquadratica

vediamo quali ipotesi dobbiamo richiedere su v affinchè sia soddisfatta PS
Osserviamo che questo problema di minimo è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + \nabla v(u) = 0 \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Serve come ulteriore ipotesi v sottoquadratica vicino a 0 ossia $\frac{v(u)}{|u|^2} \to 0$ per $|u| \to 0$ (0 è minimo locale: posso applicare il teorema del passo montano se sussiste PS)

Verifichiamo PS

$$\begin{cases} \int \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - v(u_n) = c + \varepsilon_n \\ -\triangle u_n - v'(u_n) = \chi_n \end{cases}$$

in modo analogo a prima otteniamo

$$\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\int |\nabla u_n|^2 + \int \theta v'(u_n)u_n - v(u_n) = c + \varepsilon_n - \int \theta\chi_n u_n$$

Per fare una stima in modo simile a quanto fatto prima ci serve

$$\int \theta v'(u_n)u_n - v(u_n) \geq 0$$

ovvero

$$\theta v'(u_n)u_n - v(u_n) \geq 0 \Rightarrow v'(u_n)u_n \geq \frac{1}{\theta}v(u_n) \tag{2.11}$$

La condizione 2.11 prende il nome di Ambrosetti-Rabinowitz

2.1.2 Funzionali C^2 e teoremi di immersione di Sobolev

Definizione 2.1.5. Diciamo che un funzionale $J : H \to \mathbb{R}$ è C^2 se $\exists d^2J$ forma quadratica tale che

$$J(u+v) = J(u) + dJ_u[v] + d^2J_u[v]^2$$

Nota 2.1.6. Vale la formula di polarizzazione

Nota 2.1.7. Prendiamo un funzionale della forma

$$J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(x,u) \Rightarrow dJ_u[v] = \int \nabla u \nabla v + F_u v \Rightarrow d_u^2 J[v]^2 = \int |\nabla v|^2 + F_{uu}v^2$$

Proposizione 2.1.8. *Se d^2J è continuo allora $J \in C^2$ (differenziale secondo $Frcht$)*

vediamo quali ipotesi ci servono su F affinchè gli integrali sopra non divergano

Teorema 2.1.9 (Niemitski)**.** *f di Carathodory ovvero $x \to f(x,u)$ misurabile e $u \to f(x,u)$ continua ($u \in L^p$) allora se*

$$f : L^p \to L^q$$

è ben definito allora è anche continuo, ovvero

$$u_n \to u \ in\ L^p \ \Rightarrow f(u_n) \to f(u) \ in\ L^q$$

Dal teorema 2.1.8 segue che se ad esempio $|f| \leq a(x) + u^{\frac{p}{q}}$ con $a \in L^q$ allora il problema è ben definito. Abbiamo già visto che

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \to (f)L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Ora però sfruttando tali inlcusioni otterremmo che f deve avere crescita al più lineare. Introduciamo allora i seguenti teoremi di immersione

2.1.3 Teoremi di immersione di Sobolev

Teorema 2.1.10 (Sobolev)**.**

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

per $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato

Teorema 2.1.11 (Sobolev)**.**

$$L^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

per $s < q$

Corollario 2.1.12.
$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$
per $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ *, in particolare se* $N = 2 \forall p < \infty$

$$\frac{\left(\int |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Teorema 2.1.13 (Morrey)**.**
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$
e inoltre $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *è* α*-Hölder con* $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$

Nota 2.1.14. I teoremi sopra sono validi anche per spazi di Sobolev frazionari

Teorema 2.1.15 (Sobolev-Gagliardo-Niremberg)**.**

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

dove $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

Esponente critico 2* In particolare noi vogliamo massimizzare p nell'espressione

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \to (f)L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

In modo da avere condizioni meno restrittive possibili su $|f| \leq a(x) + u^{\frac{p}{q}}$: prendiamo quindi

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \to (f)L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Definizione 2.1.16. Chiamiamo
$$\frac{2N}{N-2} = 2^*$$
esponente critico (caso N=2 già visto) che è quell'esponente tale che

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

$\forall p \leq 2^*$.

Proposizione 2.1.17. *Per* $p < 2^*$ *l'immersione è anche compatta: infatti*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^{1-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

e inoltre
$$H_0^1 \hookrightarrow L^p$$
e
$$L^q \hookrightarrow H^{-1}$$

sono compatte

Consideriamo il problema seguente

$$\begin{cases} -\triangle u - |u|^{p-2}u = 0 \text{ dove } p > 2 \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

che corrisponde al problema di minimo per il funzionale

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p}|u|^p$$

Abbiamo già verificato che si può applicare il teorema del passo montano, dimostriamo che in effetti u soluzione è più regolare di H_0^1:

bootstrap argument Consideriamo

$$-\triangle u = |u|^{p-2}u$$

, $u \in H_0^1 \Rightarrow \triangle u \in H^1 \Rightarrow u \in H^2 \Rightarrow u \in L^p$ con p dato dal teorema di immersione di Sobolev

Condizioni sufficienti per avere minimo su un funzionale di tipo $\int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(x,u)$
Se abbiamo

$$J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(x,u)$$

con $F' = f$,

$$dJ = -\triangle u + f(x,u)$$

$$d^2J_u[v]^2 = \int |\nabla v|^2 + f'v^2$$

$$f : H_0^1 \to H^{-1}$$

In generale se $|f| < M + |u|^p$, $p < \frac{N+2}{N-2}$, $\frac{f}{u^\alpha} \to 0$ per $u \to 0$ $(\alpha > 2)$ e $0 < f(u) < \theta f'(u)u$ (Ambrosetti-Rabinowitz) ci basta per dire che il funzionale è C^2

Problema

$$\begin{cases} -\triangle u - |u|^{p-2}u + f(x,u) = 0 \ p > 2, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

con f continua limitata, $p \le 2^*$ (altrimenti $J \notin C^2$)

$$J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p}|u|^p + F(x,u)$$

Osserviamo che la parte $J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p}|u|^p$ è LSC e convessa mentre $F(x,u)$ è limitata, quindi il problema è ben posto e ammette minimo.

Problema

$$\begin{cases} -\bigtriangleup u - |u|^{p-2}u - u = 0 \ p > 2, \\ u \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^p(\Omega) \end{cases}$$

$$J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p}|u|^p - \frac{1}{2}u^2$$

Osserviamo che il termine $\frac{1}{p}|u|^p$ non conta per $u \approx 0$, per cui vicino all'origine basta studiare

$$J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}u^2$$

Ossia il problema di Cauchy

$$\begin{cases} -\bigtriangleup u - u = 0 \ p > 2, \\ u \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^p(\Omega) \end{cases}$$

Nota 2.1.18.

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - u^2 = \langle (-\bigtriangleup -1)u, u \rangle$$

In particolare se gli autovalori del laplaciano sono > 1 la forma quadratica è definita positiva.

Base di autovettori per il laplaciano e funzione di Green Essendo il laplaciano un operatore simmetrico per il teorema spettrale si può trovare una base ortonormale di autovettori. In particolare possiamo scrivere

$$\langle (-\bigtriangleup -1)u, u \rangle = \langle \sum (\lambda_m - 1)u_n, u_n \rangle = \sum (\lambda_m - 1)u_n^2$$

Problema

$$\begin{cases} -\bigtriangleup u - |u|^{p-2}u - \lambda u = 0 \ p > 2, \\ u \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^p(\Omega) \end{cases}$$

Vediamo che ci servirà come ipotesi $\lambda \notin \sigma(-\bigtriangleup)$. Consideriamo la variazione seconda del funzionale

$$d^2 J_u[v]^2 = \int |\nabla v|^2 + (p-1)|u|^{p-2}v^2 - \lambda v^2$$

In particolare

$$d^2 J_0 = \int |\nabla v|^2 - \lambda v^2$$

Osserviamo

$$\begin{cases} -\bigtriangleup u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$K : H \to H$$

con $\langle Ku, v\rangle = -\langle u, Kv\rangle$
con

$$(-\triangle^{-1})u = Ku = \int_{\Omega} G(x,y)u(y)dy$$

Dove G è la funzione di Green

Nota 2.1.19. Per quanto appena visto sono ben definite le norme

$$||u||^2_{H^1_0} = \sum \lambda_m u_m^2 \tag{2.12}$$

$$||u||^2_{H^1} = \sum (\lambda_m + 1) u_m^2 \tag{2.13}$$

$$||u||^2_{H^s} = \sum \lambda_m^s u_m^2 \tag{2.14}$$

Inoltre

$$d^2 J[v]^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \lambda v^2 = \sum (\lambda_m - \lambda) v_n^2$$

si capisce quindi che bisogna distinguere i casi $\lambda < \lambda_0$ e $\lambda > \lambda_0$, dove $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < ....$ sono gli autovalori del laplaciano.

Capitolo 3

Calcolo differenziale su varietà Riemanniane e analisi nonlineare

3.1 Calcolo differenziale su varietà

Teorema 3.1.1 (Nash). *Ogni varietà Riemanniana si immerge in un $\mathbb{R}^n$ per qualche n abbastanza grande*

Definizione 3.1.2. Data M varietà definiamo $T_pM = \{\gamma'(0) | \gamma \in C^1; \gamma \in M$ e $\gamma(0) = p\}$ (piano tangente a M in p)

Ovvero $\gamma(t) = p + tv$, $f(p_1) - f(p) = df_p(\gamma'(0)) + o||\gamma'(0)||$

Problema: dati p_0, p_1 è vero che esiste una geodetica che li congiunge, tuttavia il funzionale

$$d(p_0, p_1) = inf_\gamma \int \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle}$$

cresce linearmente in γ': lo spazio in cui trattare il problema sarebbe L^1, che però non ha le buone qualità che ci interessano. Questo problema è legato al fatto che che l'espressione sopra dipende dalla parametrizzazione

Definizione 3.1.3. $m(p_0, p_1) = \{\gamma \in H^1_0(I, M)$ che congiunge p_0 con p_1 $\}$

Facciamo allora una riparametrizzazione PLA di γ, ovvero tale che $||\gamma'|| = 1$ Ora

$$\int_0^1 \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle} \leq \sqrt{\int_0^1 1^2} \sqrt{\int_0^1 \langle \gamma', \gamma' \rangle}$$

dove $\int_0^1 \langle \gamma', \gamma' \rangle$ può essere interpretato come un'energia.
consideriamo allora il funzionale energia

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \gamma', \gamma' \rangle$$

che in quanto norma risulta debolmente LSC: ci basta allora minimizzarlo su m per quanto visto in precedenza. Vediamo intanto che m è debolmente compatto, ovvero $\gamma_n \in m$; $\gamma_n \to \gamma$ in H^1 allora $\gamma \in m$. (qui ci serve come ipotesi che M completa)
ma $\gamma_n \to \gamma$ uniformemente $\Rightarrow \gamma \in m$ $\gamma(t) \in M$, quindi esiste una geodetica γ talde che $\gamma(t) = p_0 + tv$ localmente, $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = p_1$.

Definizione 3.1.4 (Fibrato tangente)**.** Chiameremo $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ il fibrato tangente di M

Fatto: m è varietà Hilbertiana di dimensione infinita.

Problema (uso dei moltiplicatori di Lagrange)

Sia $m_\rho = \{u \in H_0^1(\Omega); \int G(u) = \rho\}$, $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$ e consideriamo il problema

$$min_{m_\rho} J(u)$$

Cominciamo col vedere che m_ρ è varietà. In generale vale la seguente proposizione

Proposizione 3.1.5. *$M = \{x; f(x) = 0\}$ e $\nabla f \neq 0$ $\forall x \in M$ allora M è varietà.*

Sia allora $\Gamma = \int G(u) - \rho$, risulta evidentemente $m_\rho = \{\Gamma = 0\} \subset H_0^1$. Vogliamo $\Gamma \in C^1$, ovvero vogliamo che G non cresca troppo, ad esempio $|G| \leq M + C|u|^{p-1}$ con $p < 2* = \frac{2N}{N-2}$

Nota 3.1.6. $d\Gamma_u[v] = \int G'(u)v$, dunque per avere che m_ρ varietà ci basta G' non identicamente nullo.

Nota 3.1.7. G dispari $\Rightarrow$ funzionale Γ pari.

ora

$$\langle \nabla J_u, v\rangle_m = d_m J_u[v]$$

dove $v \in T_u m$ e $d_m J$ è il differenziale di J sulla varietà (def equivalente).
Per come la abbiamo definita risulta che $\nabla\Gamma$ è ortogonale alla varietà m_ρ, quindi in particolare possiamo scrivere

$$\nabla_m J_u = \nabla J_u - \frac{\langle \nabla J_u, \nabla\Gamma_u\rangle}{||\nabla\Gamma_u||^2}\nabla\Gamma_u$$

Verifichiamo che J verifica $Palais - Smale$, ovvero $\forall u_n$ tale che

- $J(u_n) \to c$
- $\nabla_m J_{u_n} \to 0$ esiste una estratta convergente.

  poniamo per semplicità $g = G'$ e $\lambda_n = \dfrac{\langle \nabla J_{u_n}, \nabla\Gamma_{u_n}\rangle}{||\nabla\Gamma_{u_n}||^2}$

  $$\langle \nabla_m J_{u_n}, v\rangle = \int \nabla u_n \nabla v - \lambda_n g(u_n)v \to 0$$

  per ipotesi PS, da cui

  $$-\triangle u_n = \lambda_n g(u_n) + \varepsilon_n$$

Vogliamo dare delle ipotesi su g affinchè λ_n non diverga a $+\infty$ (esercizio per il lettore)

Definizione 3.1.8. Chiamiamo $m = \{\gamma \in H^1(I, \mathbb{R}^N); \gamma(0) = p_0, \gamma(1) = p_1\}$ il *loop space* (dove $\gamma(t) \in M$; M varietà completa e compatta, abbiamo così garantita l'esistenza di geodetiche tra due punti arbitrari).

Per mostrare che m è una varietà ci basta far vedere chi è lo spazio tangente in ogni punto

$$T_\gamma m = \{v \in H_0^1(I, \mathbb{R}^N); v(t) \in T_{\gamma(t)} m\}$$

(spazio delle variazioni)

Ha senso definire $dJ_\gamma[v]$ perciò possiamo anche chiederci se vale $Palais - Smale$

Definizione 3.1.9. Chiamiamo $D_t\gamma' = \pi_{T_\gamma m}(\partial_t \gamma')$ la derivata covariante di γ, osserviamo inoltre che

$$\int \langle \partial_t \gamma', v\rangle = 0$$

$\forall v \in T_\gamma m$ se γ è geodetica (definizione di geodetica)

Vediamo ora il fatto seguente

Proposizione 3.1.10. *M varietà compatta e completa, $T_\gamma m = \{v \in H_0^1(I, \mathbb{R}^N); v(t) \in T_{\gamma(t)} M\}$, $J(\gamma) = \int \langle \gamma', \gamma' \rangle$ allora J soddisfa $Palais - Smale$*

Dimostrazione. prendiamo una successione γ_n tale che $J(\gamma_n) \to c$ e $\nabla J_{\gamma_n} \to 0$ come operatore, vediamo che esiste una estratta fortemente convergente $\gamma_{n_k} \to \gamma_0$
Ora siccome J è una norma allora è debolmente LSC, quindi a meno di sottosuccesioni $\gamma_n \rightharpoonup \gamma_0$, osserviamo inoltre che evidentemente $\gamma' \in T_\gamma m$

$$\int \langle \gamma', v' \rangle = \int \langle \gamma', D_t v \rangle$$

(trasporto parallelo di v)

Nota 3.1.11. nel casodi varietà non posso in generale considerare $v = \gamma_n - \gamma_0$ per in generale tale quantità $\notin M$: prendiamo allora in considerazione $v(t) = P_{\gamma_n(t)}(\gamma_n(t) - \gamma_0(t))$ la proiezione sul tangente a M in $\gamma_n(t)$

$$v'(t) = P_{\gamma_n(t)}(\gamma_n'(t) - \gamma_0'(t)) + \frac{d}{dt} P_{\gamma_n(t)}(\gamma_n(t) - \gamma_0(t))$$

Ora siccome sono su una varietà compatta γ' è limitato $\gamma_n \to \gamma_0$ uniformemente e debolmente in H_0^1

$$\int \langle \gamma_n', v' \rangle = \varepsilon ||v||$$

□

3.1.1 Esistenza delle geodetiche nei problemi di meccanica

Prendiamo un funzionale del tipo

$$S(\gamma) = \int \frac{1}{2}\langle \gamma', \gamma' \rangle - V(\gamma, t)$$

la cui equazione di $Eulero - Lagrange$ è

$$D_t \gamma' = -\nabla V$$

Notiamo inoltre che per funzionali di questa forma che sono ben posti è sempre verificata l'ipotesi di $Palais - Smale$ sulle varietà compatte (e quindi esistono geodetiche).

3.2 Varianti di problemi visti in precedenza e problemi non variazionali

Problema 1
$$\begin{cases} - \triangle u = f(x,u) \\ u \mid_\partial = g, g \in C^1 \end{cases}$$

In generale per avere soluzione serve che g sia estendibile con continuità a Ω, ad esempio $g \in H^{\frac{1}{2}}$

Problema 2 (di *Dirichelet* classico)
$$\begin{cases} - \triangle u = 0 \\ u \mid_\partial = g, g \in C^0 \end{cases}$$

In generale se g solo C^0 la soluzione diverge. in questo caso si prendono soluzioni approssimanti $g_n \to g$
Problema 3 (di *Neumann* nonlineare)
$$\begin{cases} - \triangle u = f(u) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

cerchiamo una soluzione $u \in H^1(\Omega)$. Vediamo che il problema equivale a minimizzare il funzionale

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u) + \oint_{\partial\Omega} g(x)u$$

dove F è una primitiva di f, infatti ($Gauss - Green$)

$$dJ_u[v] = \int_\Omega (- \triangle u - f(u))v + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \oint_{\partial\Omega} g(x)v$$

ora data l'arbitrarietà di v sia il termine interno che quello di bordo devono essere nulli, da cui l'equivalenza al problema di partenza.

Problema 4

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u = f(u) \\ u \mid_\partial = 0 \end{cases}$$

Questo problema equivale a trovare il minimo del funzionale

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + V(x)\frac{u^2}{2} - F(u)$$

Ci chiediamo dunque quando è che il problema di iminimo ha soluzione. Se $V(x) \geq 0$ e $V \in L^2$ possiamo considerare lo spazio di Sobolev con peso

$$H^1_{0,v}(\Omega) = \{u; ||u||_{H^1_{0,v}} < \infty\}$$

dove $||u||^2_{H^1_{0,v}} = \int |\nabla u|^2 + V(x)u^2$, abbiamo le seguenti inclusioni date dai teoremi di Sobolev

$$H^1_{0,v} \hookrightarrow H^1_0 \hookrightarrow H^{-1} \hookrightarrow H^{-1}_{0,v}$$

Inoltre se $V \geq 0$ possiamo caratterizzare esplicitamente il duale come

$$(L^2(\Omega, V))' = L^2\left(\Omega, \frac{1}{V}\right)$$

Se in generale abbiamo $V = V^+ - V^-$ e V^- limitato il problema è comunque ben posto. Ci serve infatti che lo spettro di $-\triangle + V(x)$ sia limitato inferiormente.

Problema 5

$$\begin{cases} -\nabla(M(x)\nabla u) = f(u) \\ u \mid_\partial = 0 \end{cases}$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} -\sum_{i,j} \partial_{x_i}(a_{i,j}(x)\partial_{x_j} u) = f(u) \\ u \mid_\partial = 0 \end{cases}$$

Vogliamo vedere quali ipotesi servono affinchè il problema sia ben posto. Dove questo avviene abbiamo che il problema variazionale associato è della forma

$$J(u) = \int \sum_{i,j} a_{i,j}\partial_{x_i} u \partial_{x_j} u - F(u)$$

Ora una soluzione debole del problema ha senso anche se la forma non è simmetrica, ovvero l'espressione

$$dJ_u[v] = \int M(x)\nabla u \nabla v - f(u)v$$

ha senso e ci si può chiedere quale sia la soluzione anche se M non simmetrica. Se M simmetrica e definita positiva questa definisce una norma. Una ipotesi ragionevole da richiedere su M è $a_{i,j} \in L^\infty$: abbiamo infatti $\partial_{x_i} u, \partial_{x_j} v \in L^2 \Rightarrow \partial_{x_i} u \partial_{x_j} v \in L^1$ (buona definizione dell'integrale sopra)

vale in effetti la seguente

Proposizione 3.2.1. *Se abbiamo le seguenti condizioni sugli elementi del problema sopra*

$$\begin{cases} a_{i,j} = a_{j,i} \\ a_{i,j}(x) \in L^\infty \\ M \textit{ definita positiva, ovvero } \langle M\xi, \xi \rangle \geq \gamma |\xi|^2 \textit{ (chiamiamo } \gamma > 0 \textit{ costante di ellitticità)} \end{cases}$$

Allora M definisce un problema uniformemente ellittico ben posto

In effetti il problema resta trattabile se $\langle M\xi, \xi \rangle \geq v(x)|\xi|^2$ e $v > 0$ quasi ovunque, in questo caso si prende lo spazio normato da

$$||u||_M^2 = \int \langle M\nabla u, \nabla u \rangle$$

$||u||_M^2 = 0 \iff \nabla u = 0$ quasi ovunque (si può anche sommare la usuale norma L^2)

Problema 5 (esempio di problema del IV ordine)

$$\begin{cases} \triangle^2 u = f(u) \\ \text{condizioni al bordo,} u \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

3.2.1 Problemi non variazionali

Problema 1

$$\begin{cases} - \triangle u + \overrightarrow{v(x)} \nabla u + f(u) = g(x) \\ u \mid_\partial = 0 \end{cases}$$

Problema 2 (esempio di come rendere non variazionale un problema variazionale)

$- \triangle u - f(u) = 0 \rightsquigarrow \partial_t u = \triangle u + f(u)$

Problema 2

$$\begin{cases} - \triangle u - \lambda u + f(x, u, \nabla u) = 0 \\ u \mid_\partial = 0 \end{cases}$$

Dove $\lambda \notin \sigma(-\triangle)$
1 approccio:

$$u = -L^{-}1(f(x, u, \nabla u)) = \int_{\Omega} G(x, y) f(x, u, \nabla u)$$

Se ad esempio f rende RHS una contrazione allora si può applicare il teorema del punto fisso (op. $Fredholm$). Vale la seguente proposizione

Proposizione 3.2.2. *K operatore compatto $B_\rho \to B_\rho$ ha un punto fisso*

2 approccio (mediante il grado topologico)
questo metodo si sviluppa in 3 passi:

riduzione del problema a uno in dimensione finita V_m
trovare soluzioni approssimanti nel problema finito u_m
passare al limite

3.2.2 Utilizzo del grado topologico

Definizione 3.2.3. $F(u) = 0$, $u \in B_r$ definiamo il grado topologico

$$d_2(F, B_r) = \sharp\{u \in B_r | F(u) = 0\}/2\mathbb{Z}$$

Per calcolare il grado topologico ci servono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} dF \neq 0 \text{ (zeri semplici)} \\ F \mid_{\partial B_r} \neq 0 \end{cases}$$

Osserviamo inoltre che se F ha zeri semplici su un compatto allora questi sono in numero finito.

Proposizione 3.2.4. *Il grado topologico è invariante per omotopia*

$$F_t : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dove prendiamo F_0 regolare su B_r e $F_1 \equiv F$
osserviamo che affinchè l'omotopia sia ben definita ci serve $F \mid_{\partial B_r} \neq 0$

Ad esempio se $F \sim Id$ tramite $F_t(u) = (1 - t)u + tF(u)$ su B_r allora il suo grado è 1 (c'è un numero dispari di soluzioni).

Lemma 3.2.5 (Saard)**.** *$F : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^m$ e tale che $dF \neq 0 \forall u \in \{F(u) = 0\}$ (ovvero lo zero è non degenere) allora*

$$M = \{F(u) = 0\} = \{F^{-1}(0)\}$$

è una k-varietà

Nota 3.2.6. Il grado dipende solo da $F \mid_{\partial B_r}$: se questa infatti è $\neq 0$ possiamo prendere $G(u) = \frac{F(u)}{||F(u)||}$, $G : S^{n-1} \to S^{n-1}$
Nota 3.2.7 (teorema del punto fisso). $K : B_r \to B_r$ continua allora $\exists u \mid K(u) = u$ (se $K \neq 0$ sul bordo possiamo restringere un poco $B_r \to B_{r-\varepsilon}$)
equivalente a dire che $F = Id - K$ ammette 0 :

$$F_t = (1 - t)Id + t(Id - K) = Id - tK$$

3.2.3 Maggiorazioni a priori

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} - \triangle u - \lambda u + f(x, u, \nabla u) = 0 \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Dove Ω è un aperto limitato, vogliamo stimare a priori la norma di un'eventuale soluzione u del problema. definiamo ora $F(u) = - \triangle u - \lambda u + f(x, u, \nabla u)$ e aggiungiamo l'ipotesi $|f| \leq M$ u è soluzione debole del problema sopra se

$$\int \nabla u \nabla v - \lambda uv + f(x, u, \nabla u)v = 0$$

$\forall v \in H_0^1$

$$F : H_0^1 \to H^{-1}$$

Ora se u è soluzione avremo in particolare

$$\langle F(u), u \rangle = 0$$

Vogliamo stimare RHS con qualcosa del tipo

$$|\langle F(u), u \rangle| \geq \nu ||u||^2 - K_1 ||u|| - K_2$$

Avremo sicuramente una stima del tipo

$$0 = |\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda u^2 + fu| \geq |\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda u^2| + |\int_\Omega fu|$$

chiamiamo ora per semplicità $A = |\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda u^2|$ e $B = |\int_\Omega fu|$, abbiamo

$$A = |\sum_k^\infty \left(\lambda_k u_k^2 - \lambda u_k^2\right)|$$

dove $- \triangle e_k = \lambda_k e_k$, prendiamo ora λ_m l'autovalore in norma più vicino a λ

Nota 3.2.8. Importante: per fare questa stima ci serve l'ipotesi $\lambda \notin \sigma(-\triangle)$

$$A = |\sum_k^\infty \left((\lambda_k - \lambda)u_k^2\right)| \geq |\lambda - \lambda_m| \sum_k u_k^2 = |\lambda - \lambda_m| ||u||_2^2$$

mentre su B abbiamo la stima

$$B = |\int_\Omega fu| \leq M \int_\Omega |u| \leq M||u||_1 \leq MK||u||_2$$

Da cui finalmente

$$0 = |\langle F(u), u \rangle| \geq |\lambda - \lambda_m| ||u||_2^2 - MK||u||_2 \Rightarrow$$

$$||u||_2 \leq \frac{MK}{|\lambda - \lambda_m|}$$

dove le costanti sono rispettivamente $K = K(\Omega)$ e $M = M(f)$

prendiamo ora $H_0^1(\Omega) = \overline{\cup_m V_m}$, $V_m = span_{k \leq m}(e_k)$ e cerchiamo $u_m \in V_m$. Sia

$$F_m : V_m \to V_m$$

il funzionale del problema approssimato
$$\begin{cases} \langle F_m(u), v \rangle = 0 \\ u_m \in V_m \end{cases}$$

Per quanto appena visto abbiamo la maggiorazione a priori $||u||_2 \leq \frac{MK}{|\lambda - \lambda_m|} < R$ uniforme in m

$$u_m \rightharpoonup u$$

in H_0^1 e

$$u_m \to u$$

in L^2

per passare al limite nella parte non lineare dipendente da f ci serve $u \to f(x, u, \nabla u)$ compatto,

$$\int fv < +\infty \forall v \in L^p(\Omega), p < \frac{2N}{N-2}$$

tuttavia con la nostra ipotesi sulla limitatezza di f non c'è problema.

Problema 3 (diffusione di pesci in un corso d'acqua)

$$\begin{cases} - \triangle u + \overrightarrow{v} \nabla u + |u|^{p-2} u = f(x) \\ u \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^p(\Omega) \end{cases}$$

$\overrightarrow{v} \in L^n$, vedere quali condizioni servono su n affinchè ci sia soluzione ($n = \infty$ ok c'è soluzione)

3.3 Operatori monotoni (crescenti)

Nota 3.3.1. gli operatori lineari > 0 sono monotoni crescenti

Esempio (*p-Laplaciano*)

$$A(u) = - \triangle_p u = - \sum_{i,j} \partial_{x_i} |\nabla u|^{p-2} \partial_{x_j} u = -\nabla \left[|\nabla u|^{p-2} |\nabla u \right]$$

è operatore monotono e il problema tipo da studiare in questo caso è della forma
$$\begin{cases} - \triangle_p u + = f(x) \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

Definizione 3.3.2. $A : V \to V'$ operatore tra Banach si dice

- monotono se $\langle Au_2 - Au_1, u_2 - u_1 \rangle \geq 0$

- strettamente monotono se $\langle Au_2 - Au_1, u_2 - u_1 \rangle > 0$

- uniformemente monotono se $\langle Au_2 - Au_1, u_2 - u_1 \rangle \geq h(||u_2 - u_1||)|u_2 - u_1|$ con $h(0) = 0$, $h(t) > 0 \forall t > 0$, h monotona crescente

- coercitivo se $\frac{\langle Au, u \rangle}{|u|} \to \infty$ per $u \to \infty$

Proposizione 3.3.3. *A strettamente monotono, allora se ammette soluzione questa è unica*

Dimostrazione. Siano $Au_1 = f$ e $Au_2 = f$ allora $\Rightarrow Au_2 - Au_1 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ □

Teorema 3.3.4. *$A : V \to V'$ uniformemente monotono e surgettivo allora A invertibile con inversa Hölderiana*

Dimostrazione. Siano $Au_1 = f_1$, $Au_2 = f_2$ e vediamo che $f_1 \to f_2 \Rightarrow Au_1 \to Au_2$

$$\begin{aligned}
&\langle Au_2 - Au_1, u_2 - u_1 \rangle \geq h(||u_2 - u_1||)|u_2 - u_1| \Rightarrow \\
&\langle f_2 - f_1, u_2 - u_1 \rangle \geq h(||u_2 - u_1||)|u_2 - u_1| \\
&\langle f_2 - f_1, u_2 - u_1 \rangle \geq h(||A^{-1}f_2 - A^{-1}f_1||)|A^{-1}f_2 - A^{-1}f_1| \\
&\langle f_2 - f_1, u_2 - u_1 \rangle \leq ||f_2 - f_1||||A^{-1}f_2 - A^{-1}f_1|| \Rightarrow \\
&h(||A^{-1}f_2 - A^{-1}f_1||) \leq ||f_2 - f_1|| \\
&||A^{-1}f_2 - A^{-1}f_1||) \leq h^{-1}(||f_2 - f_1||)
\end{aligned}$$

□

Nota 3.3.5.
$$\int (- \triangle u_2 - \triangle u_1)(u_2 - u_1) = \int |\nabla(u_2 - u_1)|^2 = ||u_1 - u_2||^2$$
dunque il laplaciano è uniformemente monotono

Teorema 3.3.6 (Teorema di surgettività)**.** *Sia V un Banach separabile riflessivo, $A : V \to V'$ hemicontinuo monotono (continuo sugli spazi di dimensione finita), limitato ($AB_r \subset B_R$) e coercitivo, allora A è surgettivo, ovvero $Au = f$ ha soluzione*

Dimostrazione. $V = \overline{\cup_m V_m}$, cerchiamo soluzioni del problema approssimato

$$\begin{cases} \langle Au_m, v \rangle = \langle f, v \rangle \forall v \in V_m \\ u_m \in V_m \end{cases}$$

(dove in effetti $A = P_m A$ la proiezione su V_m)
Nota 3.3.7. $d_2(B_r, A_m) = 1$: infatti

$$F_t = (1 - t)A + tId$$

funziona come omotopia in quanto la combinazione convessa di vettori che puntano all'esterno punta ancora all'esterno $\Rightarrow F_t \mid_{\partial B_r} \neq 0$

Facciamo ora una maggiorazione a priori $\langle Au, u\rangle \geq l(||u||)||u||$ con $l \to \infty$ per $||u|| \to \infty$ (coercività) dunque possiamo scrivere

$$\langle Au - f, u\rangle \geq l(||u||)||u|| - ||f||||u|| = (l(||u||) - ||f||)||u||$$

Ora se u è soluzione (per R abbastanza frande $l > f$)

$$0 = \langle Au - f, u\rangle \geq (l(||u||) - ||f||)||u|| > 0$$

se u ha norma grande: assurdo

$$\Rightarrow ||u|| < R$$

Questa maggiorazione è uniforme in m e siccome siamo in un Banach riflessivo abbiamo

$$u_m \rightharpoonup u$$

Consideriamo ora

$$\langle Au_m, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

$\forall v \in V_m$, per definizione di convergenza debole si ha $Au_m \rightharpoonup \chi$,

$$\langle \chi, f\rangle = \langle f, v\rangle$$

$\forall v \in V_m, m > n(u_n) \Rightarrow \forall v \in \overline{\cup_m V_m} \Rightarrow \chi = f$

Consideriamo la relazione di monotonia

$$0 \leq \langle Au_m - Av, u_m - v\rangle = \langle Au_m, u_m\rangle - \langle Au_m, v\rangle - \langle Av, u_m\rangle + \langle Av, v\rangle$$

Tutti i membri tranne il primo di RHS sono controllati dalla convergenza debole, ovvero

$$= \langle Au_m, u_m\rangle - \langle \chi, v\rangle - \langle Av, u - v\rangle$$

vediamo ora come possiamo stimare il primo termine

$$= \langle Au_m, u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle$$

a m fissato e

$$\langle f, u_m\rangle \to \langle f, u\rangle$$

$$\langle \chi - Av, u - v\rangle \geq 0$$

$\forall v \in V$ per monotonia, in particolare per $v = u - tw$ si ha

$$\langle \chi - Au, w\rangle \geq 0$$

per $t \to 0^+$

$$\langle \chi - Au, w\rangle \leq 0$$

per $t \to 0^-$

da cui

$$\langle \chi - Au, w\rangle = 0 \Rightarrow \chi = Au$$

□

Capitolo 4

Analisi non standard

Definizione 4.0.1 (definizione assiomatica dei numeri euclidei n.1)**.** Chiamiamo campo dei numeri euclidei $\mathbb{E}$

$$\begin{cases} \{x_n\} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{n\uparrow\alpha} x_n = x \in \mathbb{E} \\ x_n = c \Rightarrow \lim x_n = c \\ \lim n \uparrow \alpha = \alpha \in \mathbb{E} \\ \lim x_n + \lim y_n = \lim(x_n + y_n); \;\; \lim x_n . \lim y_n = \lim(x_n . y_n) \end{cases}$$

4.1 Matematica non Archimedea

Definizione 4.1.1. Diciamo che un campo $\mathbb{F}$ gode del principio di Archimede se $\forall K, M \in \mathbb{F}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $nK > M$

Definizione 4.1.2. Diamo ora alcune definizioni relative agli elementi di un tale campo $\mathbb{F}$

- $\xi \in \mathbb{F}$ si dice infinito se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xi > n$
- ξ si dice infinitesimo se $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\xi| < \frac{1}{N}$
- ξ si dice limitato se $\exists n \mid |\xi| < n$
- ξ si dice apprezzabile se $\exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < \xi < n$
- $a \sim b$ ("a è infinitamente vicno a b") se $|a - b|$ è infinitesimo
- $mon(x) = \{y \mid y \sim x\}$ (monade di x)

- $gal(x) = \{y \mid |x - y| \text{ è limitato }\}$ (galassia di x)

Teorema 4.1.3 (della parte standard)**.** *Sia $\mathbb{F} \supset \mathbb{R}$ un campo non archimedeo, allora $\forall \xi \in \mathbb{F}$ limitato $\exists! x \in \mathbb{R} \mid x \sim \xi$*

idea. Definiamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \xi\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \xi\}$$

applicare il principio di Dedekind □

Corollario 4.1.4. *è ben definita la funzione "parte standard"*

$$st : \mathbb{F}(limitati) \to \mathbb{R}$$

$st(\xi) = x \Rightarrow \xi = x + \varepsilon$ dove ε è un infinitesimo

4.1.1 Esempi di campi non Archimedei

- $\mathbb{R}(\alpha) = \{\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}\}$ dove $p, q \in \mathbb{R}[x]$ e q non nullo

- germi di funzioni meromorfe $f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$

- serie formali

- campo di Levi-Civita $= \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{q_n}\}$ dove $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \to 0$

Definizione 4.1.5.
- un campo $\mathbb{F}$ si dice completo alla Dedekind se ogni sezione ha un elemento separatore

- un campo $\mathbb{F}$ si dice completo alla Scott se due insiemi contigui hanno un elemento separatore, inoltre diciamo che A, B sono contigui se $\forall \varepsilon \in \mathbb{F}$ $\exists a \in A, b \in B$ tali che $|a - b| < \varepsilon$

Nota 4.1.6. Se $\mathbb{F}$ completo alla Scott e soddisfa il principio di Archimede allora è completo alla Dedekind

Nota 4.1.7. I campi non archimedei non sono mai completi alla Dedekind: infatti $\{limitati \cup$ infiniti negativi $\} \cup \{$ infiniti positivi $\} = \mathbb{F}$ ma i due insiemi hanno intersezione vuota

Nota 4.1.8. Il campo di Levi-Civita è completo alla Scott

4.2 Campi iperreali

4.2.1 Definizione n.2 dei numeri euclidei

Definizione 4.2.1. Chiamiamo *numeri euclidei* gli elementi del campo definito come

$$\mathbb{E} = \{\xi \mid \xi = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n;\ a_n \in \mathbb{R}\}$$

Assiomi per la buona definizione della somma su $\mathbb{E}$ Diamo i seguenti assiomi per completare la definizione di $\mathbb{E}$

- $\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$
- $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m\right) = \sum_{m,n} a_n b_m$
- $\sum a_{m,n} = \sum_k c_k$, dove $c_k = \sum_{max(m,n)=k} a_{m,n}$

definizione della somma Diamo ora una definizione rigorosa dell'operatore di somma che abbiamo descritto sopra

Definizione 4.2.2. Sia

$$\sum : F(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{E}$$

l'operatore dalle successioni a valori reali negli euclidei, diamo in modo assiomatico le seguenti proprietà a $\sum$

- $\sum$ lineare
- $\sum$ estende la somma usuale su $\mathbb{R}$
- $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m\right)$ definita come sopra

definizione dell' α-limite Sia

$$\varphi(n) = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$\lim_{n\uparrow\alpha} \varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = J(\varphi)$$

(somma transfinita)

$$J : F(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{E}$$

con

- J lineare surgettivo
- $\varphi(n) \equiv c \Rightarrow J(\varphi) = c$
- $J(\varphi)J(\psi) = J(\varphi\psi)$

Nota 4.2.3. L'α-limite esiste sempre su $\mathbb{E}$

Estensione a $\mathbb{E}$ di funzioni standard

$$f(\xi) = \lim_{n\uparrow\alpha} f(x_n)$$

dove

$$\lim_{n\uparrow\alpha} x_n = \xi$$

4.2.2 Estensione mediante quoziente

Estensione di $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ Sia

$$J : C(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$$

Dove $C(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) = \{$successioni di Cauchy a valori razionali $\}$ e $I = \{$successioni infinitesime $\}$

Proposizione 4.2.4. *$\mathbb{A}$ anello e $I \subset \mathbb{A}$ ideale massimale allora il quoziente $\frac{\mathbb{A}}{I}$ è un campo (e in effetti vale la doppia implicazione)*

Si ha in effetti che I è ideale massimale in C e risulta

$$\mathbb{R} \simeq \frac{C(\mathbb{N}, \mathbb{Q})}{I}$$

Estensione di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{E}$ Vorremmo ora operare una costruzione simile a quella sopra per $\mathbb{E}$. Consideriamo

$$J : F(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{E} \simeq \frac{F(\mathbb{N}, \mathbb{R})}{I}$$

Per qualche ideale massimale I.

Definizione 4.2.5.

$$I_F = \{ \text{ successioni definitivamente nulle } \}$$

Proposizione 4.2.6. *Se non mettiamo $I_F \subset I$ il quoziente sopra risulta $\simeq \mathbb{R}$*

Proposizione 4.2.7 (Zorn)**.** *Ogni ideale è contenuto in un ideale massimale*

Definizione 4.2.8. $Q \subset P(\mathbb{N})$ si dice qualificato rispetto a I se $J(\chi_Q) = 1$

Proposizione 4.2.9. *vediamo alcune proprietà degli insiemi qualificati*

- $R \supset Q$ *e* Q *qualificato* $\Rightarrow R$ *qualificato*
- R, Q *qualificati* $\Rightarrow R \cap Q$ *qualificato*
- Q *qualificato* $\iff Q^c = \mathbb{N}\ Q$ *non qualificato*

Definizione dei chiusi $\mathbb{E} \supset F$ chiuso $\Longleftrightarrow (x_n \in F \cap \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\uparrow\alpha} x_n \in F)$

Definizione 4.2.10 (chiusura)**.** Chiamiamo F^* la chiusura di F secondo la definizione di chiusura data sopra (estensione naturale).
Vediamo che effettivamente F^* soddisfa le proprietà dei chiusi

- $\mathbb{E}, \emptyset$ sono chiusi

- $F^* \cup G^* = (F \cup G)^*$

- $\cap F^* = H^*$

Proviamo il secondo punto

Dimostrazione. $\xi \in (F \cup G)^* \Rightarrow \xi = \lim x_n$, $x_n \in (FUG)$. Definiamo ora $Q = \{n \mid x_n \in F\}$, $R = \{n \mid x_n \in G\}$. Abbiamo che $QUR = \mathbb{N}$ per cui almeno uno dei due è qualificato: allora x_n appartiene a uno dei due definitivamente □

4.2.3 Altra definizione di $\mathbb{E}$

Diamo una ulteriore lista di assiomi con i quali possiamo definire $\mathbb{E}$

- $\forall a_n \in \mathbb{R}\ \exists \lim_{n\uparrow\alpha} a_n$, $\lim_{n\uparrow\alpha} a_n = \xi \in \mathbb{E}$

- $\lim c = c$ $(\mathbb{R} \subset \mathbb{E})$

- $\lim_{n\uparrow\alpha}(x_n + y_n) = \lim_{n\uparrow\alpha} x_n + \lim_{n\uparrow\alpha} y_n$, $\lim_{n\uparrow\alpha} x_n y_n = \lim_{n\uparrow\alpha} x_n \lim_{n\uparrow\alpha} y_n$

4.3 Applicazioni alla teoria della numerosità

Enunciamo ora due formulazioni classiche del problema "numero di elementi di un insieme"

- (Euclide) "il tutto è più grande della parte"

- (Cantor) " A e B hanno lo stesso numero di elementi $\Leftrightarrow$ esiste una bigezione tra i due insiemi "

4.3.1 Modi di contare

Cardinali (ovvero si conta tramite bigezione)

$$\aleph_0 = card(\mathbb{N})$$
$$...$$
$$\aleph_\beta$$

dove β è un ordinale

Ordinali (ovvero si conta mettendo in fila)

$$\omega_0 = ord(\mathbb{N})$$

,

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1$$

Numerosità (non vale Cantor, vale la definizione di Euclide)

$$num(A) = \sum_{i \in A} 1_i$$
$$num(\mathbb{N}) = \alpha$$
$$num(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \alpha + 1$$
$$num(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \alpha^2$$

come si calcola la numerosità

Dobbiamo innanzitutto definire la funzione detta *"etichettatura"* in modo tale che

$$L : A \to \mathbb{N}$$

e $L^{-1}(n)$ è finito, definiamo poi la numerosità di A come

$$num(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |L^{-1}(n)|$$

Problema: dato un certo $k \in \mathbb{R}$ vedere se α è divisibile pèer k: questo in effetti dipende dall'ultrafiltro scelto oltre al filtro di Fréchét. Ad esempio

- $Q_k = \{n \equiv 0(k)\} \Rightarrow \alpha$ divisibile per k
- $Q_{l!} = \{n = l!\}$ α divisibile per ogni naturale
- $Q_{l!^{l!}} = \{n = l!^{l!}\}$ α divisibile per ogni naturale ed esiste $\alpha^{\frac{1}{k}}$ $\forall k$

Definizione 4.3.1. f è standard se è l'estensione di una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definizione 4.3.2. f continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$f(x_0 + \varepsilon) \sim f(x_0)$$

Definizione 4.3.3. f uniformemente continua se $\forall \xi \sim \nu$ si ha $f(\xi) \sim f(\nu)$

4.4 α- limite di insiemi e insiemi iperfiniti

Definiamo
$$\lim_{n\uparrow\alpha} E_n = \{\lim_{n\uparrow\alpha} a_n \mid a_n \in E_n\}$$
In particolare notiamo che anche se $E_n \equiv E \forall n$ in generale
$$\lim_{n\uparrow\alpha} E = E^* \neq E$$

Questo tipo di limite non viene da una topologia, infatti il limite di una successione costante non è la costante stessa.

Definizione 4.4.1. Un insieme che è limite di insiemi si dice *interno*

Definizione 4.4.2. Se E_n finito $\forall n$ allora $\lim_{n\uparrow\alpha} E_n = E$ si dice *iperfinito*

ad esempio
$$\lim_{n\uparrow\alpha}\{0...n\} = \mathbb{N}^*$$

Proposizione 4.4.3. *Gli insiemi iperfiniti hanno max e min*

Teorema 4.4.4. *f standard continua ha max e min su un insieme iperfinito*

$$max_{\mathbb{N}_\alpha} f = \lim_{n\uparrow\alpha} max_{E_n} f$$

Esempio
$$\mathbb{H} = \lim_{n\uparrow\alpha}\{\frac{p}{n} \mid |p| < n^2\}$$

Teorema 4.4.5. *$f : [a,b] \to \mathbb{E}$ standard continua allora ha il max*

Dimostrazione. Sia $x_n \in argmax_{[a,b]\cap\mathbb{H}_n} f$, $\xi = \lim_{n\uparrow\alpha} x_n$ e sia $x_0 = st(\xi)$. Dico che $x_0 \in argmax_{[a,b]} f$. Prendo $y \mid |y - y_n| < \frac{1}{n}$, $y_n \in \mathbb{H}_n$.

$f(x_n) \geq f(y_n) \Rightarrow \lim f(x_n) \geq \lim f(y_n) \geq f(\xi) \geq f(\nu)$

□

Nota 4.4.6. f continua sse commuta con st

4.5 Definizioni di integrale

4.5.1 definizione 1

$$\int_a^b f := st\left(\nu \sum_{x\in\mathbb{H}\cap(a,b)} f(x)\right)$$

Problema
Con questa definizione si ha che
$$\int \chi_{\mathbb{Q}} = 1$$

4.6 Definizione dell'universo standard come insieme

Siano

$$\begin{cases} V_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \\ V_{n+1}(\mathbb{R}) = V_n(\mathbb{R}) \cup P(V_n(\mathbb{R})) \end{cases}$$

E definiamo come insieme universo standard

$$\mathbb{U} = \lim_{n\uparrow\alpha} V_n(\mathbb{R}) = \cup_n V_n$$

e come insieme universo non standard

$$\mathbb{W} = \lim_{n\uparrow\alpha} V_n(\mathbb{E})$$

Noi lavoreremo principalmente con

$$(P_{fin}(\mathbb{U}), \subseteq)$$

Vogliamo definire il limite come insieme diretto. Definiamo $Q(\lambda_0) = \{\lambda \in L \mid \lambda \geq \lambda_0\}$ e U un ultrafiltro $\supset Q(\lambda_0)$, dove $L = P_{fin}(\mathbb{U})$

4.7 Caratterizzazione dei campi iperreali

$\mathbb{R}^*$ è campo iperreale se $\exists I, J$ tali che

$$J_{\mathbb{R}} : F(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

dove $F(I, \mathbb{R})$ sono le *composible functions*, ovvero le funzioni tali che

$$\xi = [\varphi] \Rightarrow f(\xi) = [f(\varphi)]$$

Ad esempio $Q(\lambda_0) \subset ker f$

$\varphi(\lambda)$ un net, vogliamo definire il limite lungo l'ultrafiltro

Per $\varphi(\lambda) \in V_0(\mathbb{R})$ ok, se $\varphi(\lambda) \in V_{k+1}(\mathbb{R})$ allora definiamo

$$\lim_{\lambda\uparrow\Lambda} = \{\lim_{\lambda\uparrow\Lambda} \psi(\lambda) \mid \psi(\lambda) \in \varphi(\lambda)\}$$

Definizione 4.7.1. Chiamiamo f^* la chiusura del grafico di f, dove

$$f^*(\xi) = \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} f(x_\lambda)$$

Definizione 4.7.2.

$$A^o = \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} (A \cap \lambda)$$

notiamo che A^o è iperfinito, ed è in generale più piccolo strettamente di

$$A^* = \{\lim_{\lambda\uparrow\Lambda} a_\lambda \mid a_\lambda \in A\}$$

.

4.7.1 Definizione di D e $\int$ su V_Λ

Sia

$$V_\Lambda = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} V_\lambda$$

vogliamo dare una definizione coerente di D, $\int$ su V_Λ

Poniamo

$$D^* f = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (Df)$$

$$\int^* f = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int f$$

(V è spazio vettoriale per cui hanno senso queste operazioni)

4.8 Soluzione generalizzata di problemi di minimo per funzionali

Vogliamo vedere che un funzionale $J^*(u)$ ammette sempre soluzione generalizzata in V_λ

4.8.1 Struttura di questo spazio

Voglio poter definire δ_a ad esempio su $F = \{$funzioni con numero finito di discontinuità $\}$.

Primo tentativo di definizione

$$\delta_a(x) := \sum e_k(a) c_k(a)$$

$$\int \delta_a(x) v = \sum^N e_k(a) \int c_k(x) v(x)$$

Dove $\{e_k\}$ base ortonormale. Osserviamo che si può definire δ su uno spazio iperfinito

definizione della δ-base Abbiamo così ottenuto una rappresentazione di f, vorremmo tuttavia deinire una base ortonormale che abbia come elementi oggetti simili alla δ di Dirac

Osserviamo che in generale

$$\int \delta_a \delta_b \neq 0$$

Prendiamo allora δ_a^x la delta di Kroneker,

$$v(x) = \sum_{a \in \Gamma} v(a) \delta_a^x$$

ci chiediamo se

$$\int \delta_a^x \delta_b^x = \delta_a^b$$

$$\int^{*} u dx = \sum_{a\in\Gamma} u(a)d(a)$$

$$\int^{*} \delta_a^x dx = d(a)$$

ultrafunzioni associate Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$

$$f \rightsquigarrow f^o$$

dove f^o è lunica funzione tale che

$$\int_\Lambda f^o v dx = \sum_{a\in\Lambda} f(a)v(a)d(a)$$

4.8.2 definizione di limite sugli iperreali

$$(L, U)$$

dove U ultrafiltro, definiamo

$$\begin{cases} \forall\varphi \text{ net } : L \to \mathbb{R}\exists \lim_{\lambda\uparrow\Lambda}\varphi \\ \lim +, \cdot \end{cases}$$

$$J : F(L, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$$

come $J(\varphi) = \varphi(\lambda_0)$

$$f(\xi) := \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} f(x_n)$$

$$\mathbb{R}^* = \frac{F(L, \mathbb{R})}{kerJ}$$

nei casi considerati da noi

$$L = P_{fin}(\mathbb{U})$$

Definizione 4.8.1. $\{textelementicofiniti\} =$ filtro di Fréchét

4.8.3 Griglie

$$u : \Lambda \to \mathbb{E}$$

una funzione di griglia
se f una funzione standard prendiamo come funzione di griglia associata

$$f^o = f^* \mid \Lambda$$

mentre

$$u^o = u \mid \Lambda$$

se u funzione interna alla teoria, ad esempio $u(x) = sen\alpha x$

$$\Gamma = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \Gamma_\lambda$$

$G(\Gamma)$ = funzioni di griglia

$$\langle T, \varphi \rangle_* := \sum_{a \in \Gamma} u_T(a) \varphi^*(a)$$

(applicazione di una distribuzione)

$$D^+ u := \frac{u(x_+) - u(x)}{x_+ - x}$$

(derivata di griglia)

esempio di problema $\begin{cases} - \triangle u = f(x) \\ u \mid_\partial = 0 \end{cases}$

dove $f \in L^1_{loc}$, cerco la soluzione tra le funzioni di griglia che si annullano su $\partial\Omega$

Nota 4.8.2. $\frac{1}{x^\beta}$ per $\beta > N$ non è nemmeno una distribuzione su $\mathbb{R}^N$

$G(\Gamma)$ è spazio iperfinito, ad esempio posso definire se $V = C^1_c(\Omega)$ $V_\Lambda = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} span(V \cap \lambda)$, in particolare voglio $G(\Gamma)$ tale che ci sia un isomorfismo $o : V_\Lambda \to G(\Gamma)$ come $u \to u \mid \Gamma = u^o$

Definizione 4.8.3.

$$D^o f = (\partial f)^o$$

definizione dell'integrale di griglia una possibile definizione è data da

$$\int^* f dx = \sum_{a \in \Gamma} u(a) d(a)$$

ed una possibile norma associata è

$$||u||^2 = \sum_{a \in \Gamma} u(a)^2 d(a)$$

con prodotto scalare corrispondente

$$\langle u, v \rangle = \sum_{a \in \Gamma} v(a) u(a) d(a)$$

Nota 4.8.4. $f \in V \Rightarrow \int f dx = \sum f^o(a) d(a)$

Nota 4.8.5.

$$\int \delta^x_a = 0$$

$$\int^* \delta^x_a = 0$$

per il principio di transfer, ma

$$\int_\Gamma \delta_a^x \neq 0$$

Infatti

$$\int_\Gamma \delta_a^x = \sum_{a\in\Gamma} \delta_a^x d(a) = d(a)$$

definiamo allora la delta di Dirac nel seguente modo

$$\delta_a(x) := \frac{\delta_a^x}{d(a)}$$

In questo modo otteniamo che

$$\int_\Gamma \delta_b(x)v(x)dx = \sum_{a\in\Gamma} \delta_b(a)v(a)d(a) = \sum_{a\in\Gamma} \frac{\delta_b^a}{d(a)} v(a)d(a) = v(b)$$

δ-base Abbiamo così ottenuto una base ortogonale fatta da δ come

$$\{\delta_a(x)\sqrt{d(a)}\}_{a\in\Gamma} = \{\frac{\delta_a^x}{\sqrt{d(a)}}\}_{a\in\Gamma}$$

e la conseguente decomposizione

$$u(x) = \sum_{a\in\Gamma} u(a)\delta_a^x$$

Cosa succede con le distribuzioni

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_\Gamma u_T\varphi$$

$$\langle \mu, v\rangle = \int_\Gamma v(x)u_\mu(x)dx$$

$f^o \in V^o$, $u_T = D^{k+1}(f^o)$

4.9 applicazione ai problemi al contorno

Problema di Yamabe

$$J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}|u|^{2^*}$$

vogliamo vedere se esiste

$$min_{F(\Omega)}J$$

Proposizione 4.9.1.

$$J(u) = \int \frac{1}{2}a(u)|\nabla u|^2 + f(x,u)$$

ammette minimo su un opportuno spazio di ultrafunzioni
$V = \cup V_\lambda$

Risolviamo il problema approssimato
$$\begin{cases} minJ(u) \\ u \in V_\lambda \end{cases}$$

e per come abbiamo definito tale spazio posso sempre fare

$$\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} u_\lambda := u_\Lambda$$

4.9.1 Esempi di spazi di Hilbert non separabili

Esempio 1

Sia $F([0,1]) = \{$ funzioni non nulle solo su un numero finito di punti $\}$

$$\langle u, w \rangle := \sum_{a \in F} u(a)w(a)$$

dove $F \supset supp(u) \cup supp(w)$ finito
Tale spazio si dimostra essere un Hilbert e non è separabile.

Esempio 2 (funzioni quasi-periodiche)

Siano u, w periodiche $\in L^2_{2\pi}$ e sia

$$\langle u, w \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u\overline{w}$$

(media ergodica)

la chiusura di $L^2_{2\pi}$ rispetto a questo prodotto scalare è uno spazio di Hilbert ma una base ortonormale è data da $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ che ha cardinalità più che numerabile[1]

4.9.2 altri esempi di problemi

Nel problema di Yamabe enunciato in precedenza vorremmo poter definire una funzione tale che $\int |u|^{2^*} \equiv 1$ e in particolare vorremmo dare senso all'espressione

$$\delta^{\frac{1}{2^*}}$$

esempio (problema dell'elasticità)

consideriamo il funzionale

$$J(u) = \int \frac{1}{2} a(u)|\nabla u|^2 + f(u)$$

dove chiamiamo a tensore degli sforzi
Abbiamo che

$$dJ_u[v] = \int a(u)\nabla u \nabla v + \frac{1}{2}a'(u)|\nabla u|^2 v + f'(u)v$$

[1]dalla teoria sugli spazi di Hilbert sappiamo che tutte le basi ortonormali di un Hilbert hanno la stessa cardinalità. Chiamiamo questa cardinalità appunto dimensione Hilbertiana

Osserviamo che il termine $a'(u)|\nabla u|^2 v$ può essere problematico in quanto $u \in L^2$, $v \in D$. Mettiamo allora come ipotesi a' limitato, ad esempio prendiamo a costante a tratti del tipo

$$\begin{cases} a = 1 \text{ su } [0,1] \cup (2,3] \\ a = 0 \text{ su } (1,2] \end{cases}$$

e semplifichiamo il problema in modo da ottenere

$$J' = \int_0^1 \frac{a(u)u'^2}{2} - \gamma u$$

e condizione al bordo $u(0) = 0$

L'equazione di Eulero-Lagrange associata diventa

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(au') = -\gamma \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

Ora se γ è tale che $a < 1$ basta risolvere $u'' = -\gamma$ che ha per soluzione un polinomio di secondo grado, altrimenti la soluzione fa un salto in $u = 1$. Abbiamo infatti che u in x_0 "è" δ^2 (x_0 dove a supera 1)

esempio

$$\begin{cases} - \triangle u = f(x) \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ora se $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ abbiamo che esiste una soluzione classica $\in H_0^1$

se invece $f \in L^p$ con $p < 2^*$ abbiamo una soluzione come distribuzione

Ora se $f \notin L^p$ abbiamo che l'integrale energia

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - f(x)u$$

diverge
Esiste soluzione debole come distribuzione ma deve essere almeno $f \in L^1$

$$\int \nabla u \nabla v - f(x)v$$

esempio
Supponiamo di voler risolvere

$$\begin{cases} - \triangle u = \frac{1}{|x|^\alpha} \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Con ad esempio $\Omega = B(0,1)$, abbiamo i seguenti casi

- $\alpha \leq 0$ soluzione classica
- $0 < \alpha < 2^*$ soluzione $\in H_0^1$
- $2^* \leq \alpha < N$ soluzione come distribuzione
- $\alpha > N$ vediamo cosa succede in questo caso

Supponiamo $u(x) = u(|x|)$, abbiamo che il laplaciano di funzioni a simmetria sferica si scrive come

$$\triangle f(\rho) = f''(\rho) + (N-1)\frac{f'(\rho)}{\rho}$$

per cui il'equazione del nostro problema diventa

$$u''(\rho) + (N-1)\frac{u'(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\rho^\alpha}$$

che ha come soluzione

$$u(x) = \frac{A}{|x|^{\alpha-2}} + \frac{B}{|x|^{N-2}} + C$$

$$A = \frac{-1}{(\alpha-2)(\alpha-N)}$$

e dalle condizioni al contorno B deve essere tale che

$$u(x) = A\left(\frac{1}{|x|^{\alpha-2}} - 1\right) + B\left(\frac{1}{|x|^{N-2}} - 1\right)$$

Nel caso classico $B = 0$, soluzione $\in C^2$: il B che ha senso finiscamente è quello che minimizza

$$F(B) = E(u_B) = \int |\nabla u_B|^2 - f(x)u_B$$

$minF(B) = HB^2 + KB + L$, per $B = -\frac{K}{2H}$ (E quadratica in ∇u)
svolgendo i conti otteniamo

$$B = -\frac{K}{2H} = \frac{\int \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\frac{1}{|x|^{N-2}} - 1\right) - \frac{A}{2}\int\left(\nabla\frac{1}{|x|^{\alpha-2}}\right)\left(\nabla\frac{1}{|x|^{N-2}}\right)}{\int |\nabla\frac{1}{|x|^{N-2}}|^2}$$

Se $\alpha < N$ abbiamo che $B \to 0$ e ci riconduciamo al caso classico, altrimenti se $\alpha > N$ abbiamo che $B \to \infty$ e quindi la soluzione non è accettabile ($u \equiv \infty$ ovunque)

esempio (membrana elastica)

$$\begin{cases} -\triangle u = \delta_p \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

abbiamo che $\delta_p \in L^1$ solo in dim=1.

$$u = \frac{1}{|x-p|^{N-2}} + H(x)$$

dove $H(x)$ è liscia.