Analisi complessa

GGC

colabufo@mail.dm.unipi.it

2017

Indice

1 Fatti da ricordare

1.1 Notazioni

Indichiamo con $\omega(S)$ l'ordine di una serie formale, cioè il più piccolo n tale che $a_n \neq 0$ se $S(X) = \sum_n a_n X^n$.

Salvo avviso contrario, poniamo ρ il raggio di convergenza di una serie $S(X)$.

Se df è il differenziale di una funzione f di variabili reali x e y, si può scrivere $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ e posto $z = x + iy$ si ottiene $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$. Possiamo introdurre gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

1.2 Definizioni

Definizione Una famiglia $\{S_i(X)\}_{i\in I}$ di serie formali si dice sommabile se per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\omega(S) \geq k$ tranne per un numero finito di indici i.

Definizione La serie derivata $S'(X)$ è data da $\sum_n na_nX^{n-1}$.

Definizione Il logaritmo complesso è per definizione dato da:

$$\log(t) = \log|t| + iarg(t).$$

Definizione Se f e g sono funzioni analitiche e x_0 è un punto tale che $g(x_0) \neq 0$, $f(x) = (x-x_0)^k f_1(x)$, $g(x) = (x-x_0)^h g_1(x)$ e $k < h$, possiamo scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-x_0)^{h-k}} h_1(x)$$

con $h_1(x_0) \neq 0$. Allora diciamo che x_0 è un polo per f/g di molteplicità $h-k$.

Osservazione Possiamo dire che f ha un polo x_0 di molteplicità k se $(x - x_0)^k f := g$ è analitica e ha x_0 come zero di molteplicità k.

Definizione Una funzione si dice meromorfa in D se è definita e analitica in un aperto $U \subseteq D$ ottenuto togliendo da D un insieme di punti isolati, che sono poli per f.

Definizione Una funzione f si dice olomorfa se esiste il limite

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(z_0+u) - f(z_0)}{u}$$

Definizione Si dice che f soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann se

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Se $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ le condizioni sono equivalenti a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Definizione Una mappa conforme è una applicazione che conserva gli angoli.

Proprietà della media f soddisfa la proprietà della media se vale

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$$

Osservazione Si verifica che le funzioni che soddisfano la proprietà della media sono tutte e sole le funzioni armoniche.

Definizione Una serie del tipo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ si chiama serie di Laurent nella corona circolare $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho_2 < |z| < \rho_1\}$ dove ρ_1 e $\frac{1}{\rho_2}$ sono i raggi di convergenza delle serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ e $\sum_{n>0} a_{-n} z^n$.

Definizione Una funzione f definita in una corona si dice sviluppabile in serie di Laurent se esiste una serie di Laurent convergente nella corona la cui somma è f in ogni punto.

Osservazione La convergenza della serie è totale (in norma) in ogni corona chiusa contenuta in quella di partenza e f è olomorfa nella corona. Se esiste una serie di Laurent, questa è unica.

Definizione 0 è un *punto singolare isolato* per la funzione f olomorfa in un disco $0 < |z| < \rho$ se tale f non si può prolungare ad una funzione olomorfa sull'intero disco.
Un punto singolare isolato è detto *polo* se f è meromorfa in un suo intorno, *punto singolare essenziale* se f non è meromorfa in un intorno del punto.

Definizione Si chiama *residuo* di f nel punto singolare 0 il coefficiente a_{-1} dello sviluppo di Laurent di f.
Se γ è un cammino circolare intorno al punto singolare, percorso in senso antiorario, si ha che $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$, ossia il residuo di f nel punto è $Res(f,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$.

Osservazione Il residuo di f nel punto all'infinito si ottiene per cambio di variabili $u = \frac{1}{z}$ e si ottiene che $Res(f,\infty) = -a_{-1}$. Dove a_{-1} è il coefficiente di $u^{-1} = z$ nello sviluppo di Laurent in un intorno di ∞.

1.3 Forme Differenziali

Una rapida carrellata di teoremi e risultati relativi alle forme differenziali.

Definizione Una forma differenziale è una espressione

$$\omega = Pdx + Qdy$$

dove P e Q sono funzioni continue a valori reali o complessi.

Definizione L'integrale di una forma differenziale è definito come segue:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)dt$$

dove $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{C}$).

Definizione Se esiste una funzione F tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

allora si ha

$$\int_\gamma \omega = F(b) - F(a)$$

ed F è detta primitiva di ω.

Definizione Una forma differenziale ω che ammette una primitiva si dice esatta.

Teorema 1.1. *Una forma ω è esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni cammino chiuso γ.*

Definizione Una forma ω si dice chiusa se vale

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Lemma 1.2. *Una forma esatta è necessariamente chiusa.*

Osservazione Una forma chiusa è localmente esatta, cioè ammette una primitiva locale.

Lemma 1.3. *Una forma differenziale ω è chiusa se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni γ che percorre il bordo di un rettangolo tutto contenuto nel dominio della forma.*

Osservazione La forma $\omega = dz/z$ è chiusa ma non esatta in $\mathbb{C}^*$.

Definizione Una funzione si dice multiforme (o polidroma) se ha più determinazioni nel dominio.

Ad esempio $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ è multiforme in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Un esempio ancora più semplice è dato dalla radice $n-$esima di un numero complesso: $\sqrt[n]{z}$.

Definizione $f(t)$ è primitiva di ω lungo il cammino γ se $\forall \tau \in [a, b]$ $\exists F$ primitiva di ω in un intorno U di $\gamma(\tau)$ per cui $F(\gamma(t)) = f(t)$ per ogni t abbastanza vicini a τ.

Teorema 1.4. *Esiste sempre una primitiva lungo un cammino, ed è unica a meno di una costante additiva.*

Lemma 1.5. *Se ω è chiusa, il valore di $\int_\gamma \omega$ è definito per ogni cammino γ continuo, e dipende solo dalla classe di omotopia di γ.*

Definizione Si dice primitiva di ω secondo l'omotopia H una funzione $f(t, u)$ continua tale che $\forall(\tau, \nu)$ esiste una primitiva F di ω in un intorno di $H(\tau, \nu)$ tale che $F(H(t, u)) = f(t, u)$ per ogni (t, u) abbastanza vicino a (τ, ν).

Teorema 1.6. *Tale primitiva esiste sempre ed è unica a meno di costanti additive.*

Lemma 1.7. *Se ω è chiusa in un dominio semplicemente connesso, allora è esatta.*

Definizione Si dice indice del cammino γ rispetto al punto $a \in \mathbb{C}$

$$I(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

Lemma 1.8. *L'indice $I(\gamma, a)$*

- *è costante sulle classi di omotopia di γ in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.*
- *è una funzione continua localmente costante di a per $a \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$.*
- *è nullo sulla classe di 0.*
- *è 1 se γ gira su una circonferenza intorno ad a e 0 se a è esterno alla circonferenza.*

Teorema 1.9. *Sia $f\colon D^2 \to \mathbb{R}^2$ e sia $\gamma = f|_{S^1}$. Se $a \in \mathbb{R}^2 \setminus Im(\gamma)$ e $I(\gamma, a) \neq 0$, allora $\exists b \in D^2 \setminus S^1$ $f(b) = a$.*

Definizione Definiamo il cammino prodotto di due cammini chiusi non passanti per l'origine come $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$.

Osservazione Si verifica facilmente che $I(\gamma, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$. Inoltre se $\forall t$ $\gamma_1(t) \neq 0$ e $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$, allora $\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \neq 0$ per ogni t e $I(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0)$.

1.4 Enunciati

Remark L'anello $\mathbb{K}[[X]]$ è un dominio integro.

Osservazione $\omega(TS) = \omega(T) + \omega(S)$.

Osservazione $(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$; l'elemento neutro per composizione è X.

Osservazione In $\mathbb{K}[[Y]]$ vale l'identità $(1 - Y)(1 + Y + \dots + Y^n + \dots) = 1$.

Teorema 1.10. *Se u_n è una successione di funzioni continue con $\lim_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$, e la serie $\sum_n u_n$ converge totalmente (in norma), allora la serie $\sum_n a_n$ converge e si ha*

$$\sum_n \big(\lim_{x \to x_0} u_n(x)\big) = \lim_{x \to x_0} \big(\sum_n u_n(x)\big)$$

Teorema 1.11. *La serie $\sum_n a_n z^n$ converge totalmente per ogni $r < \rho$ e $|z| \leq r$. In particolare converge assolutamente per ogni z tale che $|z| < \rho$.*

Lemma 1.12 (Lemma di Abel)**.** *$\forall 0 < r < r_0$, se $\exists M > 0$ tale che $\forall n \geq 0 |a_n| r_0^n \leq M$, allora la serie $\sum_n a_n z^n$ converge totalmente per ogni $|z| < r$.*

Remark Il raggio di convergenza della serie $\sum_n a_n X^n$ è dato da:

$$\rho = 1/L \quad \text{con} \quad L = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}$$

Remark Somma e prodotto di serie con raggio di convergenza $\geq \rho$ hanno raggio di convergenza $\geq \rho$.

Remark Prodotto di serie uniformemente convergenti è uniformemente convergente e la serie prodotto è il prodotto delle serie.

Teorema 1.13. *Se S e T sono due serie con raggio di convergenza non nullo, anche la loro composizione $U = S \circ T$ ha raggio di convergenza non nullo ed esiste $r > 0$ tale che $\rho(U) \geq r$, e per ogni z, $|z| \leq r |T(z)| > \rho(S)$ e $S(T(z)) = U(z)$.*

Lemma 1.14. *Se S ha raggio di convergenza non nullo, anche la serie inversa (moltiplicativa) ha raggio di convergenza non nullo.*

Osservazione Una serie S e la sua serie derivata S' hanno lo stesso raggio di convergenza. Inoltre per tutti gli z con $|z| < \rho$ si ha che

$$S'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$$

Osservazione Se esiste una determinazione $f(t)$ del logaritmo complesso, in un aperto connesso U, ogni altra determinazione è della forma $f(t) + 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Remark Ogni serie è una funzione analitica nel suo disco di convergenza.

Teorema 1.15. *La serie $\sum_n \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) X^n$ ha raggio di convergenza $\geq \rho - |x_0|$ e si ha che per ogni $|x - x_0| < \rho - |x_0|, S(x) = \sum_n \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$.*

Teorema 1.16. *Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(D)$. Allora f è analitica in D se e solo se $\forall x_0 \in D\ \exists V \subseteq D, x_0 \in V\ \exists M > 0\ \exists t > 0\ |\frac{1}{p!} f^{(p)}(x)| \leq M t^p\ \forall x \in V\ \forall p \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.17. *Sia f una funzione analitica in un aperto connesso D e sia $x_0 \in D$. Allora sono equivalenti:*

- *$f^{(n)}(x_0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *$\exists U \ni x_0\ f(x) = 0 \forall x \in U$.*
- *$f \equiv 0$ in D.*

Osservazione L'anello delle funzioni analitiche in un aperto connesso è un dominio integro.

Lemma 1.18 (prolungamento analitico)**.** *Se due funzioni analitiche coincidono in un intorno di un punto, sono identiche.*

Lemma 1.19. *Se una funzione analitica in un aperto connesso non è identicamente nulla, l'insieme dei suoi zeri è discreto.*

Corollario 1.20. *Siano f e g analitiche in D aperto e connesso. Allora $f = g$ in D se e solo se l'insieme $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ ha un punto limite in D.*

Remark La derivata di una funzione meromorfa è meromorfa e le funzioni f ed f' hanno gli stessi poli. Se x è un polo di ordine k per f, allora lo è di ordine $k + 1$ per f'.

Lemma 1.21. *Una funzione $f\colon D \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è differenziabile come funzione di due variabili reali e soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.*

Osservazione f è olomorfa se e solo se vale $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Lemma 1.22. *Se f è olomorfa in un aperto connesso e la sua parte reale (o complessa) è costante, allora f è costante.*

Teorema 1.23 (Cauchy-Goursat)**.** *Se f è olomorfa in un aperto $D \subseteq \mathbb{C}$ la forma differenziale $\omega = f(z)dz$ è chiusa.*

Corollario 1.24. *Una funzione olomorfa ammette una primitiva locale che è essa stessa olomorfa.*

Corollario 1.25. *Se f è olomorfa in D, allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni γ chiuso omotopo a costante in D.*

Lemma 1.26. *Se f è continua in un aperto D e olomorfa in $D \setminus r$ dove r è una retta parallela all'asse reale, allora la forma $f(z)dz$ è chiusa.*

Lemma 1.27 (Formula integrale di Cauchy)**.** *Se f è olomorfa in un aperto D, $a \in D$ e γ cammino chiuso in D che non passa per a e omotopo a costante si ha:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = I(\gamma, a)f(a).$$

Lemma 1.28. *Se f è olomorfa in un disco aperto di raggio ρ, allora f è sviluppabile in serie nel disco. Cioè esiste una serie con raggio di convergenza almeno ρ e la somma della serie è f in ogni punto del disco.*

Corollario 1.29. *Ogni funzione olomorfa è analitica e viceversa. Quindi per le funzioni di variabile complessa vale l'equivalenza tra essere olomorfa e analitica e ogni teorema eninciato per le funzioni analitiche vale anche per le funzioni olomorfe.*

Teorema 1.30 (Morera)**.** *Sia f continua in un aperto D. Se la forma differenziale $f(z)dz$ è chiusa, allora f è olomorfa in D.*

Corollario 1.31. *Se f è continua su D e olomorfa in $D \setminus r$ dove r è una retta, allora f è olomorfa in D.*

Lemma 1.32 (Principio di simmetria di Schwarz)**.** *Sia D è un aperto connesso di $\mathbb{C}$ simmetrico rispetto all'asse reale. Possiamo scrivere $D = D^+ \cup D^-$. Presa $f\colon D^+ \to \mathbb{C}$ tale che $f|_\mathbb{R} \in \mathbb{R}$, possiamo estenderla ad $h\colon D \to \mathbb{C}$ definita da:*

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & se\; y \geq 0 \\ \overline{f(\bar{z})} & se\; y < 0 \end{cases}$$

con $z = x + iy$. Tale h è unica per il principio del prolungamento analitico.

Osservazione Se $f = P + iQ$, la matrice

$$\begin{pmatrix} P_x & -Q_y \\ Q_y & P_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

è una trasformazione $\mathbb{C}$-lineare che consiste nella moltiplicazione per lo scalare $a + ib$. Le condizioni di Cauchy-Riemann implicano che le funzioni olomorfe che hanno derivata diversa da 0 sono mappe conformi, in particolare il loro differenziale è una similitudine diretta.

$f(z)dz$ è chiusa $\iff$ $f(z)$ è olomorfa e $df \neq 0 \Rightarrow df$ similitudine diretta.

Remark Scrivendo $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$ le condizioni di Cauchy-Riemann dicono $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. In particolare df è proporzionale a dz e il coefficiente di proporzionalità è $f'(z)$. Analogamente possiamo dare la definizione di funzione *antiolomorfa*:

Definizione g si dice antiolomorfa se $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$.

Ne segue che g è antiolomorfa se e solo se $\bar{g}$ è olomorfa. Il differenziale dg è proporzionale a $d\bar{z}$ ed è una similitudine inversa (anch'esso è una mappa conforme).

Teorema 1.33 (Liouville)**.** *f olomorfa e limitata sul piano complesso è costante.*

Teorema 1.34 (Principio del massimo)**.** *$f\colon D \to \mathbb{C}$ continua, con la proprietà della media e con un massimo relativo interno $\Rightarrow f$ localmente costante.*

Corollario 1.35. *f continua in $\bar{D}$, non costante e con la proprietà della media in $D \Rightarrow f$ assume il massimo in un punto del bordo ∂D.*

Osservazione f continua in un disco chiuso e olomorfa nell'aperto, allora il $\max_{\partial D}|f| \geq f(z)$ per ogni $z \in D$.

Osservazione Se f è olomorfa su $\mathbb{C}$ e olomorfa all'infinito, allora è costante. Infatti basta applicare il teorema/corollario sulla sfera di Riemann che è compatta. In particolare le funzioni $e^z, \sin(z)\cos(z)$ e i polinomi non sono olomorfe all'infinito.

Teorema 1.36 (Lemma di Schwarz)**.** *Sia f olomorfa nel disco unitario (aperto) tale che $f(0) = 0$ e $|f(z)| < 1$ per ogni z con $|z| < 1$. Allora $|f(z)| \leq |z|\ \forall |z| < 1$. Se esiste $z_0 \neq 0$ per cui $|f(z_0)| = |z_0|$, allora vale $f(z) = \lambda z$ per un qualche λ di modulo 1.*

Teorema 1.37. *Ogni funzione olomorfa in una corona è sviluppabile in serie di Laurent nella corona.*

Teorema 1.38. *f olomorfa su una corona circolare. Allora esistono f_1 olomorfa nel disco grande e f_2 olomorfa fuori dal disco piccolo tali che $f = f_1 + f_2$ e tali f_i sono uniche se si impone che $f_2 \to 0$ quando $|z| \to +\infty$.*

Disuguaglianza di Cauchy

$$\begin{aligned} a_n r^n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})d\theta \\ |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi r^n} M(r) \int_0^{2\pi} |e^{-in\theta}| d\theta \\ \text{con } M(r) &= \sup\{|f(z)| : |z| = r\} \quad \text{e} \quad |e^{-in\theta}| = 1 \\ |a_n| &\leq \frac{M(r)}{r^n} \end{aligned}$$

Lemma 1.39. *Sia f una funzione olomorfa nel disco $0, |z| < \rho$. Allora f si prolunga ad una funzione olomorfa su tutto il disco se e solo se è limitata in un intorno di* 0.

Osservazione L'origine è un punto singolare isolato se e solo se i coefficienti dello sviluppo di Laurent con indice negativo non sono tutti nulli.

Osservazione Se i coefficienti con indice negativo dello sviluppo di Laurent di f non nulli sono un numero finito, esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $z^n f(z) = g(z)$ è olomorfa in un intorno di 0, dunque $f(z) = \frac{g(z)}{z^n}$ è meromorfa in un intorno di 0.
In tal caso 0 è un **polo** per f.
Se esiste un numero infinito di coefficienti non nulli con indice negativo dello sviluppo di Laurent di f, allora f non è meromorfa in un intorno dell'origine. In questo caso 0 è chiamato **punto singolare essenziale** della funzione f.

Teorema 1.40 (Weierstrass)**.** *Se 0 è un punto singolare essenziale isolato di una funzione olomorfa in un disco $0 < |z| < \rho$, allora $\forall \epsilon > 0$ $f(0 < |z| < \epsilon)$ è un denso in $\mathbb{C}$.*

Teorema 1.41 (Picard)**.** *Se 0 è punto singolare essenziale per f olomorfa, allora f mappa ogni corona $0 < |z| < \epsilon$ in $\mathbb{C}$ meno al più un punto.*

Teorema 1.42. *f olomorfa in una corona. γ cammino chiuso nella corona, allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = I(\gamma, 0)a_{-1}$$

Teorema 1.43 (dei Residui)**.** *Sia un compatto $K \subseteq D$ aperto della sfera di Riemann S^2, con bordo Γ orientato. Sia $f\colon D \to \mathbb{C}$ olomorfa tranne in un insieme di punti singolari isolati Z. Supponiamo che $\Gamma \cap Z = \varnothing$ e $\infty \notin \Gamma$. Allora K contiene un numero finito di punti isolati z_k e vale la formula*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in K} Res(f, z_k)$$

Teorema 1.44. *Sia f meromorfa non costante in un aperto D e sia Γ il bordo orientato di $K \subseteq D$ compatto. Supponiamo che f non abbia poli su Γ e che $a \notin Im(f)$. Allora, detti Z la somma delle molteplicità delle radici di $f(z) - a = 0$ e P la somma delle molteplicità dei poli di f in K, si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)dz}{f(z) - a} = Z - P$$

Corollario 1.45. *Una funzione meromorfa sulla sfera di Riemann S^2 ha tanti zeri quanti poli.*

Teorema 1.46 (Mappa aperta)**.** *Una funzione olomorfa definita su un connesso e non costante è aperta.*

Teorema 1.47. *Se z_0 è radice di molteplicità k di $f(z) - a = 0$, ed f è olomorfa non costante in un intorno di z_0, allora per ogni intorno $V \ni z_0$ abbastanza piccolo e ogni $b \neq a$ vicino ad a esistono k radici semplici in V dell'equazione $f(z) = b$.*

Teorema 1.48 (Rouché)**.** *Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni olomorfe su un aperto D e sia $\Gamma = \partial K$ dove $K \subseteq D$ compatto. Se vale $|f(z)| > |g(z)|\ \forall z \in \Gamma$, allora il numero di zeri di $f(z) + g(z)$ in K è uguale al numero di zeri di $f(z)$ in K.*

Dimostrazione. Sappiamo che, essendo $f(z)$ e $g(z)$ olomorfe, anche la loro somma $h(z) := f(z) + g(z)$ è olomorfa. Inoltre, poiché f non ha poli sul bordo del compatto, il numero di zeri in K è dato da $Z_f := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ (la condizione $|f(z)| > |g(z)|$ ci assicura che f non si annulla mai sul bordo del compatto). Ma allora Z_f non è altro che la variazione dell'argomento di $f(z)$ sul cammino chiuso Γ, ovvero l'indice $I(f \circ \Gamma, 0)$. Ma questo è uguale all'indice $I((f+g) \circ \Gamma, 0) = \int_\Gamma \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)}dz =: Z_{f+g}$, e questo completa la dimostrazione. $\square$

2 Sul teorema dei residui

2.1 Calcolo dei residui

- Caso di un *polo semplice*:
$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad P, Q \text{ olomorfe con } P(z_0) \neq 0 = Q(z_0)$$
allora vale $Res(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

- Caso di un *polo multiplo*:
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad g(z_0) \neq 0$$
allora $Res(f, z_0)$ è il coefficiente di $(z - z_0)^{k-1}$ nello sviluppo di Taylor di $g(z)$ centrato in z_0. Il che equivale a dire:
$$Res(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z)$$

- Residuo della *derivata logaritmica*: Se f è meromorfa in un intorno di z_0, $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.
$$Res\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ k & \text{se } k > 0 \\ -k & \text{se } k < 0 \end{cases}$$
Ovvero il residuo della derivata logaritmica è la molteplicità dello zero o del polo di f (in questo caso cambiata di segno).

2.2 Calcolo di integrali col metodo dei residui

⟩⟩ `Funzioni razionali`
Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ due polinomi reali di grado n e m. Se $m \geq n + 2$ e $Q_m(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, allora
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} \left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\right)$$
dove z_k sono gli zeri di $Q_m(z)$ contenuti nel semipiano complesso $Im(z) > 0$.

⟩⟩ `Funzioni razionali per esponenziale`
Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ due polinomi reali di grado n e m. Se $m \geq n + 1$ e $Q_m(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, allora $\forall a > 0$ si ha:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k Res_{z=z_k} \left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{iaz}\right)$$

dove z_k sono gli zeri di $Q_m(z)$ contenuti nel semipiano complesso $Im(z) > 0$.

⟩⟩ `Funzioni razionali in seno e coseno`
Avendosi $R(\sin t, \cos t)$ senza poli sulla circonferenza unitaria, si pone $z = e^{it}$ e si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = 2\pi \sum_k Res_{z=z_k}\left(\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\right)$$

⟩⟩ `Funzioni razionali e potenza`
Se $R(x)$ è una funzione razionale in x e $\alpha \in (0,1)$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}dx = \frac{2\pi i}{(1-e^{-2\pi i\alpha})} \sum_k Res_{z=z_k}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right)$$

⟩⟩ `Funzione razionale e logaritmo`
Se $R(x)$ è una funzione razionale reale senza poli sul semiasse positivo, si consideri la funzione $f(z) = R(z)\log^2 z$:

$$\int_0^{+\infty} R(x)\log x dx = -\frac{1}{2}\Re\left(\sum_k Res_{z=z_k}(f(z))\right)$$

e

$$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\Im\left(\sum_k Res_{z=z_k}(f(z))\right).$$

Nel caso in cui $R(x)$ abbia un polo semplice in $x = 1$ l'integrale ha ancora senso poiché la determinazione principale del logaritmo ammette 1 come zero semplice, dunque si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} R(x)\log x = \pi^2\Re\big(Res_{z=1}(R)\big) - \frac{1}{2}\Re\left(\sum_k Res_{z=z_k}(f(z))\right)$$

in cui la sommatoria è sui poli $z_k \neq 1$.

3 Alcuni esercizi

Esercizio 1. *Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e sia $f : D \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa in $\overset{\circ}{D}$ e continua su ∂D e a valori reali sul bordo. Allora f si estende a funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.*

Soluzione. Basta osservare che se $z \notin D$, allora $\frac{1}{\bar{z}} \in D \setminus \{0\}$ e allora si può porre

$$f(z) = \begin{cases} z & z \in D \\ \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} & z \notin D \end{cases}$$

□

Esercizio 2. *Sia f una funzione olomorfa con singolarità essenziale nel punto z_0 e sia g olomorfa e non costante in un intorno di 0 con $g(0) = z_0$. Allora 0 è una singolarità essenziale per la funzione $f \circ g$. Il punto z_0 rimane una singolarità essenziale per $g \circ f$?*

Soluzione. g è una mappa aperta, dunque manda un disco D centrato in 0 in un aperto U che contiene z_0, dunque $f(U) = f(g(D))$ è un denso in $\mathbb{C}$ per il teorema di Weierstrass e 0 è un punto singolare essenziale.
Supponiamo che g sia un polinomio. Allora se U è intorno aperto di z_0, si ha che $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ cioè $\mathbb{C}$ meno al più 2 punti per il teorema di Picard. Applicando g si ha che $g(\mathbb{C} \setminus \{a, b\}) \supset \mathbb{C} \setminus \{g(a), g(b)\}$ che è un denso, quindi il punto rimane singolarità essenziale. Questo mostra che le singolarità essenziali si conservano per composizione. Si osservi che invece i poli possono essere eliminati per composizione e non possono divenire singolarità essenziali. □

Esercizio 3. *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia f olomorfa su A che non si annulla mai. Allora $\exists g$ olomorfa su A tale che $f(z) = e^{g(z)}$ $\forall z \in A$.*

Soluzione. Essendo A semplicemente connesso, f si solleva ad una applicazione g in modo che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "e"] \\ A \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

commuti. □