Sommario

Costruire una funzione che sia α-Hölderiana sulla semiretta $[0, +\infty)$ per ogni $\beta < \alpha < \gamma$, dove β e γ sono fissati.

Indice

Funzioni Hölderiane

GGC
colabufo@mail.dm.unipi.it

7 marzo 2016

1 Preliminari

Premettiamo qualche definizione.
Ricordiamo cosa si intende per funzione Hölderiana.

Definizione Una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice α-Hölderiana, dove $\alpha \in (0,1]$, se $\exists H > 0$ tale che $\forall x, y \in (a,b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x-y|^{\alpha}$$

Ricordiamo anche che

Definizione Una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana con costante di Lipschitz L se $\exists L > 0$ tale che $\forall x, y \in (a,b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

Saranno utili le seguenti proprietà:

Lemma 1.1. *Una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(a,b)$ è lipschitziana in (a,b) se e solo se la sua derivata è limitata nell'intervallo.*

Lemma 1.2. *Una funzione α-hölderiana è anche β-hölderiana per ogni $\beta < \alpha$.*

Osservazione Una funzione lipschitziana è α-hölderiana per ogni α.

Lemma 1.3. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $[f(x)]^k$ è lipschitziana. Allora f è $\frac{1}{k}$-hölderiana.*

2 Esempio

Cominciamo con un esempio. Supponiamo di voler costruire una funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ che sia α-hölderiana per ogni $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$ sulla semiretta $[0,+\infty)$.

Poniamo $f(x) = x^{\phi(x)}$ dove $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che:

$$\lim_{x\to 0} \phi(x) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \phi(x) = \frac{1}{3}.$$

Ad esempio, prendiamo $\phi(x) = \frac{1}{4} + h(x)$ con $h(x)$ che tende a 0 per $x \to 0$ e in modo che sia verificato il limite di $\phi(x)$ per $x \to +\infty$. Una funzione che soddisfa le proprietà richieste può essere

$$h(x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{x}{x+1}.$$

La nostra funzione diventa

$$f(x) = x^{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{x}{x+1}}$$

Verifichiamo la sua hölderianità tramite il criterio della lipschitzianità:

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^4 = 4 \cdot [f(x)]^3 \cdot \phi'(x) = 4x^{3\cdot\phi(x)} \cdot \phi'(x) = \frac{1}{3(x+1)^2} x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{x}{x+1}}$$
$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3 \cdot [f(x)]^2 \cdot \phi'(x) = 3x^{2\cdot\phi(x)} \cdot \phi'(x) = \frac{1}{4(x+1)^2} x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{x}{x+1}}$$

avendo derivate limitate, $x^{4\cdot\phi(x)}$ e $x^{3\cdot\phi(x)}$ sono lipschitziane e di conseguenza $f(x)$ è α-hölderiana per ogni $\alpha \leq \frac{1}{3}$. Inoltre se per assurdo

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}| \leq H|x-y|^{\delta - \frac{1}{3}} \\ \Rightarrow \quad & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{|x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}|}{|x-y|^{1/3}} \leq H|x-y|^{\delta} \end{aligned}$$

ma ponendo $y = 0$ si ottiene che per $x \to 0$ il termine a sinistra tende a $+\infty$ mentre quello di destra a 0, il che è un assurdo. Questo ci dice che $f(x)$ è α-hölderiana con α strettamente più piccolo di $\frac{1}{3}$. La stessa verifica:

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}| \leq H|x-y|^{\frac{1}{4} - \delta} \\ \Rightarrow \quad & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y|^{\delta} \leq H \frac{|x-y|^{1/4}}{|x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}|} \end{aligned}$$

ponendo $y = 0$ e facendo tendere x a $+\infty$ ci dà l'assurdo (il termine a sinistra va a $+\infty$ quello a destra a 0) che ci assicura che $f(x)$ è α-hölderiana con α strettamente più grande di $\frac{1}{4}$.

3 Caso generale

Vediamo ora il caso generale. Costruiamo una funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ che sia α-Hölderiana sulla semiretta $[0,+\infty)$ per ogni $\beta < \alpha < \gamma$, dove β e γ sono fissati. Poniamo

$$f(x) = x^{\phi(x)}$$

come sopra, in modo che $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione derivabile tale che:

$$\lim_{x\to 0} \phi(x) = \beta \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \phi(x) = \gamma.$$

Ad esempio

$$\phi(x) = \beta + (\gamma - \beta) \cdot \frac{x}{x+1}$$

di modo che

$$f(x) = x^{\beta + (\gamma-\beta)\cdot \frac{x}{x+1}}$$

Usando il criterio della lipschitzianità si ottiene:

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^{1/\gamma} = \gamma^{-1} \cdot [f(x)]^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot \phi'(x) = \gamma^{-1} x^{(\frac{1}{\gamma}-1)\cdot\phi(x)} \cdot \phi'(x) = \gamma^{-1} \frac{\gamma-\beta}{(x+1)^2} x^{(\frac{1}{\gamma}-1)(\beta+(\gamma-\beta)\cdot\frac{x}{x+1})}$$

Avendo derivata limitata, $[f(x)]^{1/\gamma}$ è lipschitziana e dunque $f(x)$ è γ-hölderiana (dunque lo è per ogni $\alpha \leq \gamma$). Vediamo che vale il minore stretto:

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}| \leq H|x-y|^{\delta-\gamma} \\ \Rightarrow \quad & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{|x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}|}{|x-y|^{\gamma}} \leq H|x-y|^{\delta} \end{aligned}$$

ma ponendo $y = 0$ si ottiene che per $x \to 0$ il termine a sinistra tende a $+\infty$ mentre quello di destra a 0, il che è dà l'assurdo. Questo ci dice che $f(x)$ è α-hölderiana con α strettamente più piccolo di γ. Analogamente

$$\begin{aligned} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}| \leq H|x-y|^{\beta-\delta} \\ \Rightarrow \quad & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y|^{\delta} \leq H\frac{|x-y|^{\beta}}{|x^{\phi(x)} - y^{\phi(y)}|} \end{aligned}$$

ponendo $y = 0$ e facendo tendere x a $+\infty$ ci dà l'assurdo (il termine a sinistra va a $+\infty$ quello a destra a 0) che ci assicura che $f(x)$ è α-hölderiana con α strettamente più grande di β.

Osservazione Osserviamo che il "trucco" sta nel fatto che per x vicino a 0 $f(x) \sim x^{\beta}$, mentre per x molto grandi $f(x) \sim x^{\gamma}$.