Topologia

GGC
colabufo@mail.dm.unipi.it

27 aprile 2016

1 Appendice

Diamo ora una dimostrazione di un importante teorema di topologia generale: il ***Lemma di Urysohn***.

Lemma 1.1. ***(di Urysohn)*** *Se X è uno spazio normale, per ogni coppia di chiusi disgiunti A, B di X, esiste una funzione continua $f: X \to [0,1]$ a valori nell'intervallo $I = [0,1]$, che valga 0 su tutto A e 1 su B.*

Dimostrazione. Prima di procedere con la dimostrazione, facciamo un paio di osservazioni preliminari.

Osservazione 1 Se X è uno spazio metrico, il lemma di Urysohn vale banalmente: basta considerare la funzione

$$f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} \tag{1}$$

dove $d_Z(x) := \inf\{d(x,z) \mid z \in Z \subset X\}$.

Osservazione 2 Il problema posto è risolubile per due sottoinsiemi qualunque A e B se e solo se lo è per le loro chiusure $\overline{A}$ e $\overline{B}$, perché $\forall f: X \to \mathbb{R}$ continua, $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(0)$ sono chiusi. Dunque la condizione che A e B siano chiusi non è restrittiva.

Osservazione 3 Condizione necessaria è che A e B siano separabili tramite aperti disgiunti, perché $f^{-1}\big((\frac{3}{4}, 1]\big)$ e $f^{-1}\big([0, \frac{1}{4})\big)$ sono intorni aperti e disgiunti di A e B. Da qui la richiesta che X sia uno spazio normale.

Otterremo la funzione f come limite di funzioni costanti a tratti. Definire una successione di funzioni siffatte equivale a definire una catena di insiemi

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset (X \setminus B)$$

Osservazione 4 Il bordo ∂A_{i-1} non deve *mai* toccare quello ∂A_i, altrimenti il *salto* della funzione sarebbe *troppo alto* e non ci sarebbe continuità nel punto di contatto.
Se lo spazio è normale, ho però la proprietà che $\forall M \subset X\ \forall N \subset X$ tali che $\overline{M} \subseteq \mathring{N}$ allora $\exists L \subset X$ che verifica $\overline{M} \subset \mathring{L} \subset \overline{L} \subset \mathring{N}$ poiché posso separare M e $X \setminus N$ con opportuni intorni aperti U e V (per esempio prendendo $L = U$).

Dico che la catena crescente di sottoinsiemi di X $\mathfrak{U} = (A_0, \ldots, A_r)$ è *ammissibile* se vale $\overline{A_{i-1}} \subset \mathring{A}_i\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Tale condizione è ben posta per l'*Osservazione 4*.
Ora definisco $f_r \colon X \to [0,1]$ ponendo $f_r(A) = 1,\ f_r(A_k \setminus A_{k-1}) = 1 - \frac{k}{r}$ e $f \equiv 0$ fuori da A_r. Gli insiemi aperti $\mathring{A}_{k+1} \setminus \overline{A_{k-1}}$ li chiameremo *gradini* di $\mathfrak{U}$ e tale funzione f_r è la *funzione uniforme a gradini* della catena $\mathfrak{U}$. Per convenzione poniamo $A_{-1} = \varnothing$ e $A_{r+1} = X$. Si può osservare che i *gradini* ricoprono l'intero spazio dato che $\overline{A_k} \setminus \overline{A_{k-1}} \subset \mathring{A} \setminus \overline{A_{k-1}}$ e le f_r non variano più di $\frac{1}{r}$ su ciascun gradino.
Partendo da $\mathfrak{U}_0 = (A,\ X \setminus B)$ possiamo *raffinare* le catene ammissibili $\mathfrak{U}_r$ grazie alla proprietà di separazione e ottenere $\mathfrak{U}_{r+1} = (A_0, A'_1, A_1, \ldots, A'_r, A_r)$.
In tal modo la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e limitata e quindi converge a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$ che è la funzione cercata.

Infatti f è continua: $|f(x) - f_n(x)| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$; e f_n non varia più di $\frac{1}{2}$ su ogni gradino di $\mathfrak{U}_n$. Quindi f non può variare più di $\frac{1}{2^{n-1}}$ su ogni gradino.
$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ e il gradino di $\mathfrak{U}_n$ che contiene x è tale che $f(\mathfrak{U}_n) \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \varepsilon)$, cioè $\mathfrak{U}_n$ è a valori nell'intervallo centrato in $f(x)$ e di raggio ε. Ciò implica che f è continua. Per costruzione si ha poi $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$. $\square$