

# A tandem queue with server slow-down and blocking

Mario Correddu

Università di Pisa

Metodi numerici per catene di Markov  
prof. Beatrice Meini

August 10, 2023

Risolvere il problema *upper-level* :

$$\min_{x,y} F(x,y) \quad t.c. \quad G(x,y) \leq 0 \quad y \in S(x), \quad (1)$$

$S(x)$  definito a partire dal problema *lower-level*:

$$\min_z f(x,z) \quad t.c. \quad g(x,z) \leq 0$$

in cui si ha:

$$S(x) = \operatorname{argmin}_z \{f(x,z) | g(x,z) \leq 0\}$$

Risolvere il problema *upper-level* :

$$\min_{x,y} F(x,y) \quad t.c. \quad G(x,y) \leq 0 \quad y \in S(x), \quad (1)$$

$S(x)$  definito a partire dal problema *lower-level*:

$$\min_z f(x,z) \quad t.c. \quad g(x,z) \leq 0$$

in cui si ha:

$$S(x) = \operatorname{argmin}_z \{f(x,z) | g(x,z) \leq 0\}$$

Supponiamo  $F, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  e  
 $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  siano di classe  $C^2$

E

$$S(x) \neq \emptyset$$

Supponiamo  $F, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  e  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  siano di classe  $C^2$

E

$$S(x) \neq \emptyset$$

Definiamo:

$$\varphi(x) := \min_z \{f(x, z) \mid g(x, z) \leq 0\} \quad (2)$$

Il nuovo problema diventa:

$$\min_{x,y} F(x, y) \quad t.c. \quad G(x, y) \leq 0 \quad g(x, y) \leq 0 \quad f(x, y) \leq \varphi(x)$$

- un algoritmo che permetta la risoluzione dei problemi a partire dalla riformulazione
- presentare delle proprietà che garantiscano la convergenza globale del metodo
- presentare delle proprietà che portino alla convergenza a un minimo locale stretto

# Notazioni

Fissiamo i punti  $(\bar{x}, \bar{y})$  e  $(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ :

Definiamo:

$$I^1 := I^G(\bar{x}, \bar{y}) := \{i \mid G_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$$

$$I^2 := I^g(\bar{x}, \bar{y}) \quad e \quad I^3 := I^g(\bar{x}, \bar{z})$$

$$\eta^1 := \eta^G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) := \{i \mid \bar{u}_i = 0, G_i(\bar{x}, \bar{y}) < 0\},$$

$$\theta^1 := \theta^G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) := \{i \mid \bar{u}_i = 0, G_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\},$$

$$\nu^1 := \nu^G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) := \{i \mid \bar{u}_i > 0, G_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\},$$

$$\eta^2 := \eta^g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}), \quad \theta^2 := \theta^g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}), \quad \nu^2 := \nu^g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$$

e

$$\eta^3 := \eta^g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w}), \quad \theta^3 := \theta^g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w}), \quad \nu^3 := \nu^g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w})$$

.

$$\min_{x,y} F(x,y) + \lambda(f(x,y) - \varphi(x)) \quad t.c. \quad G(x,y) \leq 0 \quad g(x,y) \leq 0 \quad (3)$$

### Definition

il problema 1 è partially calm in uno dei suoi punti ammissibili  $(\bar{x}, \bar{y})$  se esistono  $\lambda \in (0, \infty)$  e un intorno  $U$  di  $(\bar{x}, \bar{y}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$  tali che:

$$F(x,y) - F(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda|\zeta| \geq 0$$

per ogni  $(x,y,\zeta) \in U$  con  $G(x,y) \leq 0$ ,  $g(x,y) \leq 0$ ,  
 $f(x,y) - \varphi(x) + \zeta = 0$ .



## Theorem

*Sia  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto di minimo locale per il problema 1. Allora il problema è partially calm in  $(\bar{x}, \bar{y})$  se e solo se esiste  $\lambda \in (0, \infty)$  tale che  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un punto di ottimo per 3.*

## Definition

le condizioni upper-level di Mangasarian Fromovitz (UMFCQ) valgono, per un punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , se esiste  $d \in \mathbb{R}^{n+m}$ , tale che:

$$\nabla G_i(\bar{x}, \bar{y})^T d < 0 \text{ per ogni } i \in I^1 \quad \text{e} \quad \nabla g_j(\bar{x}, \bar{y})^T d < 0 \text{ per ogni } j \in I^2$$

## Definition

Dato  $\bar{x}$  vale la condizione lower-level di Mangasarian Fromovitz (LMFCQ) se per ogni  $z \in S(\bar{x})$ , esiste  $d \in \mathbb{R}^m$  tale che :

$$\nabla g_j(\bar{x}, z)^T d < 0 \text{ per tutti } i, j \text{ vincoli attivi in } (\bar{x}, z)$$

## Theorem

Sia  $(x, y)$  un punto di minimo locale per il problema 1, partially calm. Siano  $f$  e  $g_1, \dots, g_q$  convesse e supponiamo che valgano UMFCQ nel punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  e LMFCQ nel punto  $\bar{x}$ . Allora esistono  $\lambda \in (0, \infty)$  e  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $(v, w) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  e  $z \in \mathbb{R}^m$  tali che valgono :

$$\nabla_1 F(x, y) + \nabla_1 G(x, y)u + \nabla_1 g(x, y)v + \lambda \nabla_1 f(x, y) - \lambda \nabla_1 \ell(x, z, w) = 0 \quad (4)$$

$$\nabla_2 F(x, y) + \nabla_2 G(x, y)u + \nabla_2 g(x, y)v + \lambda \nabla_2 f(x, y) = 0 \quad (5)$$

$$\nabla_2 f(x, z) + \nabla_2 g(x, z)w = 0 \quad (6)$$

$$u \geq 0 \quad G(x, y) \leq 0 \quad u^T G(x, y) = 0 \quad (7)$$

$$v \geq 0 \quad g(x, y) \leq 0 \quad v^T g(x, y) = 0 \quad (8)$$

$$w \geq 0 \quad g(x, z) \leq 0 \quad w^T g(x, z) = 0 \quad (9)$$

- $\varphi$  è convessa
- vale una versione generalizzata del teorema di Fritz John:

$$0 \in \nabla F(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla G(\bar{x}, \bar{y})u + \nabla g(\bar{x}, \bar{y})v + \lambda \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \begin{pmatrix} \partial(-\varphi)(\bar{x}) \\ \{0\} \end{pmatrix}$$

- 

$$\partial\varphi(x) = \nabla_1 f(x, z) + \{w \nabla_1 g(x, z) \mid w \geq 0, w_i = 0 \text{ per i vincoli i inattivi}\}$$

Sia

$$\phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$$

.

# Riformulazione del sistema

Sia

$$\phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$$

. Poniamo:

$$\phi^G(x, y, u) = \begin{pmatrix} \phi(-G_1(x, y), u_1) \\ \vdots \\ \phi(-G_p(x, y), u_p) \end{pmatrix} \quad e \quad \phi^g(x, y, v) = \begin{pmatrix} \phi(-g_1(x, y), v_1) \\ \vdots \\ \phi(-g_p(x, y), v_p) \end{pmatrix}$$

Sia

$$\phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$$

. Poniamo:

$$\phi^G(x, y, u) = \begin{pmatrix} \phi(-G_1(x, y), u_1) \\ \vdots \\ \phi(-G_p(x, y), u_p) \end{pmatrix} \quad e \quad \phi^g(x, y, v) = \begin{pmatrix} \phi(-g_1(x, y), v_1) \\ \vdots \\ \phi(-g_p(x, y), v_p) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{L}^\lambda(x, y, u, v) = F(x, y) + u^T G(x, y) + v^T g(x, y) + \lambda f(x, y)$$

$$L^\lambda(x, y, z, u, v, w) = \mathcal{L}^\lambda(x, y, u, v) - \lambda \ell(x, z, w)$$

# Riformulazione del sistema

Definiamo per  $\zeta := (x, y, z, u, v, w)$ :

$$\Phi^\lambda(\zeta) := \begin{bmatrix} \nabla L^\lambda(\zeta) \\ \phi^G(x, y, u) \\ \phi^g(x, y, v) \\ \phi^g(x, z, w) \end{bmatrix}$$

Allora il sistema del teorema è equivalente a chiedere  $\Phi^\lambda(\zeta) = 0$



# Riformulazione del sistema

Definiamo per  $\zeta := (x, y, z, u, v, w)$ :

$$\Phi^\lambda(\zeta) := \begin{bmatrix} \nabla L^\lambda(\zeta) \\ \phi^G(x, y, u) \\ \phi^g(x, y, v) \\ \phi^g(x, z, w) \end{bmatrix}$$

Allora il sistema del teorema è equivalente a chiedere  $\Phi^\lambda(\zeta) = 0$   
Consideriamo ora:

$$\Psi^\lambda(\zeta) := \frac{1}{2} \|\Phi^\lambda(\zeta)\|^2$$

differenziabile con derivata continua.

## Definition

Data  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , Lipschitz intorno a un punto  $\bar{x}$  lo Jacobiano generalizzato secondo Clarke è definito come :

$$\partial\psi(\bar{x}) := \text{conv}(\partial_B\psi(\bar{x}))$$

dove

$$\partial_B\psi(\bar{x}) := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla\psi(x^n) \mid x^n \rightarrow \bar{x}, x^n \in D_\psi \right\}$$

## Definition

Data  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , Lipschitz intorno a un punto  $\bar{x}$ ,  $\psi$  è detta semismooth in  $\bar{x}$  se esiste per ogni  $d \in \mathbb{R}^n$  il limite:

$$\lim_{\substack{V \in \partial\psi(\bar{x} + td') \\ d' \rightarrow d, \quad t \rightarrow 0}} Vd'$$

---

## Algorithm Semismooth Newton algorithm

---

Passo 0: Si scelgono  $\lambda > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\epsilon \geq 0$ ,  $t > 2$ ,  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\zeta_0 := (x^0, y^0, z^0, u^0, v^0, w^0)$ .

Sia  $k = 0$

Passo 1: while  $\|\Psi^\lambda(\zeta^k)\| > \epsilon$  repeat:

Passo 2: Scegli  $W^k \in \partial_B \Psi^\lambda(\zeta^k)$  e calcola la soluzione del sistema :

$$W^k d = -\Phi^\lambda(\zeta^k)$$

Se il sistema non ha soluzione o la condizione  $\nabla \Psi^\lambda(\zeta^k)^T d^k \leq -\beta \|d^k\|^t$  è violata allora si pone semplicemente:

$$d^k := -\nabla \Psi^\lambda(\zeta^k)$$

Passo 3: trova il più piccolo intero  $s_k$  tale che

$$\Psi^\lambda(\zeta^k + \rho^{s_k} d^k) \leq \Psi^\lambda(\zeta^k) + \sigma \rho^{s_k} \nabla \Psi^\lambda(\zeta^k)^T d^k$$

Passo 4: Poni  $\alpha_k = \rho^{s_k}$ ,  $\zeta^{k+1} := \zeta^k + \alpha_k d^k$ ,  $k := k + 1$

---

## Definition

Sia  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Diremo che  $h$  è BD-regolare nel punto  $x$  se ogni elemento di  $\partial_B h(x)$  è non singolare. Similarmente  $h$  sarà CD-regolare in  $x$  se ogni elemento di  $\partial h(x)$  è non singolare

## Theorem

*Valgono le seguenti:*

- (a) Ogni punto di accumulazione della successione  $\{\zeta_k\}$  generata dall' algoritmo è un punto stazionario di  $\Psi$ .*
- (b) Se uno dei punti limiti della successione  $\{\zeta_k\}$ , supponiamo  $\zeta^*$ , è una soluzione BD-regolare del sistema  $\Phi^\lambda = 0$ , allora la convergenza è superlineare; se inoltre le  $F, G, f, g$  ammettono anche Hessiano Lipshitziano, allora la convergenza è quadratica.*

## Definition

La qualificazione dei vincoli lower-level data da indipendenza lineare (LLICQ) è data da

$$\{\nabla_2 g_i(\bar{x}, \bar{z}) | g_i(\bar{x}, \bar{z}) = 0\}$$

è linearmente indipendente.

La qualificazione dei vincoli versione upper level di indipendenza lineare (ULICQ) è data dalla proprietà:

$$\{\nabla G_i(\bar{x}, \bar{y}) : i \in I_1\} \cup \{\nabla g_j(\bar{x}, \bar{y}) : j \in I_2\} \quad (10)$$

sono una famiglia linearmente indipendente

## Definition

La qualificazione dei vincoli lower-level data da indipendenza lineare (LLICQ) è data da

$$\{\nabla_2 g_i(\bar{x}, \bar{z}) | g_i(\bar{x}, \bar{z}) = 0\}$$

è linearmente indipendente.

La qualificazione dei vincoli versione upper level di indipendenza lineare (ULICQ) è data dalla proprietà:

$$\{\nabla G_i(\bar{x}, \bar{y}) : i \in I_1\} \cup \{\nabla g_j(\bar{x}, \bar{y}) : j \in I_2\} \quad (10)$$

sono una famiglia linearmente indipendente

Il cono delle direzioni ammissibili dato da:

$$Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := \{d | \nabla G_i(\bar{x}, \bar{y})d^{1,2} = 0, \quad i \in \nu^1, \quad \nabla g_j(\bar{x}, \bar{y})d^{1,2} = 0, \\ j \in \nu^2, \quad \nabla g_j(\bar{x}, \bar{z})d^{1,3} = 0, \quad j \in \nu^3\}$$

## Theorem

Sia  $\bar{\zeta} := (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ , che soddisfa il sistema 4-9 per un certo  $\lambda > 0$ . Supponi che valga la versione upper level di qualificazione dei vincoli data da indipendenza lineare (ULICQ) e la qualificazione dei vincoli lower-level data da indipendenza lineare (LLICQ) nel punto  $(\bar{x}, \bar{z})$ . Se inoltre:

$$(d^{1,2})^T \nabla^2 \mathcal{L}^\lambda(\bar{\zeta}) d^{1,2} > \lambda (d^{1,3})^T \nabla^2 \ell(\bar{\zeta}) d^{1,3} \quad (11)$$

per ogni  $d \in Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \setminus \{0\}$  e  $\theta^3(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w}) = \emptyset$  allora  $\Phi^\lambda$  è CD-regolare nel punto  $\bar{\zeta}$ .

## Definition

Data una funzione  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la sua derivata direzionale in  $\bar{x}$  nella direzione  $d$  è definita come:

$$\psi'(\bar{x}; d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (\psi(\bar{x} + td) - \psi(\bar{x}))$$

## Definition

Data una funzione  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la sua derivata direzionale seconda in  $\bar{x}$  nella direzione  $d$  ed  $e$  è definita come:

$$\psi''_{\lambda}(\bar{x}, \bar{y}; d; e) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \left[ \psi \left( \bar{x} + td + \frac{1}{2}t^2e \right) - \psi(\bar{x}) - t\psi'(\bar{x}; d) \right]$$



## Theorem

sotto opportune ipotesi valgono le seguenti formule per le derivate direzionali di  $\varphi$ :

$$\varphi'(\bar{x}, d) = \min_{z \in S(\bar{x})} \nabla_1 \ell(\bar{x}, z, w_z)^T d$$

$$\varphi''(\bar{x}; d, e) = \min_{z \in S_1(\bar{x}; d)} \left\{ \nabla^2 \ell(\bar{x}, z, w_z) e + \xi_d(\bar{x}, z) \right\}$$

dove  $S_1(\bar{x}; d) = \operatorname{argmin}_{z \in S(\bar{x})} \nabla_1 \ell(\bar{x}, z, w_z)^T d$ , mentre  $\xi_d(\bar{x}, z)$  è definito da

$$\begin{cases} \xi_d(\bar{x}, z) = \min_{e \in \mathcal{Z}_d(\bar{x}, z)} (d, e)^T \nabla^2 \ell(\bar{x}, z, w_z) (d, e) \\ \mathcal{Z}_d(\bar{x}, z) = \left\{ e \in \mathbb{R}^m \mid \nabla_1 g_i(\bar{x}, z)^T d + \nabla_2 g_i(\bar{x}, z)^T e, \quad i \in I^3 \right\} \end{cases}$$

Il cono delle direzioni ammissibili è dato da:

$$C^\lambda(\bar{x}, \bar{y}) = \{d \mid \nabla G_i(\bar{x}, \bar{y})^T d = 0 \text{ per } i \in \nu^1, \quad \nabla G_i(\bar{x}, \bar{y})^T d \leq 0 \text{ per } i \in \theta^1, \\ \nabla g_i(\bar{x}, \bar{y})^T d = 0 \text{ per } i \in \nu^2, \quad \nabla g_i(\bar{x}, \bar{y})^T d \leq 0 \text{ per } i \in \theta^2 \\ \nabla F(\bar{x}, \bar{y})^T d + \lambda f(\bar{x}, \bar{y})^T d - \lambda \nabla_1 \ell(\bar{x}, z, w)^T d^1 \leq 0 \text{ per } z \in S(\bar{x})\}$$

Il cono delle direzioni ammissibili è dato da:

$$C^\lambda(\bar{x}, \bar{y}) = \{d \mid \nabla G_i(\bar{x}, \bar{y})^T d = 0 \text{ per } i \in \nu^1, \quad \nabla G_i(\bar{x}, \bar{y})^T d \leq 0 \text{ per } i \in \theta^1, \\ \nabla g_i(\bar{x}, \bar{y})^T d = 0 \text{ per } i \in \nu^2, \quad \nabla g_i(\bar{x}, \bar{y})^T d \leq 0 \text{ per } i \in \theta^2 \\ \nabla F(\bar{x}, \bar{y})^T d + \lambda f(\bar{x}, \bar{y})^T d - \lambda \nabla_1 \ell(\bar{x}, z, w)^T d^1 \leq 0 \text{ per } z \in S(\bar{x})\}$$

La lagrangiana modificata:

$$\bar{\mathcal{L}}_\kappa^\lambda(x, y, u, w) = \kappa(F(x, y) + \lambda f(x, y)) + \sum_{i \in I^1(d)} u_i G_i(x, y) + \sum_{j \in I^2(d)} v_j g_j(x, y)$$

dove  $I^1(d)$  e  $I^2(d)$  sono gli indici appartenenti rispettivamente a  $I^1$  e  $I^2$  tali che  $\nabla G_i(x, y)d = 0$  e  $\nabla g_j(x, y)d = 0$ .

## Theorem

Sia  $\zeta := (x, y, z, u, v, w)$  che soddisfa le condizioni 4-9 per qualche  $\lambda > 0$ . Supponi che il problema lower level sia convesso nel punto  $\bar{x}$  e che le condizioni di derivabilità valgano per tutti i  $d \in C^\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ .

Allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un punto di ottimo locale stretto del problema 3 se per ogni  $d \in C^\lambda(\bar{x}, \bar{y}) \setminus \{0\}$ , esistono dei vettori  $u, v, z^t$  e  $\kappa_t$ , dove  $z^t \in S_1(\bar{x}, d^1)$ , per  $t = 1, \dots, k$  per un certo  $k$ , tali che:

$$(d)^T \nabla \bar{\mathcal{L}}_{\kappa_0}^\lambda(\bar{x}, \bar{y}, u, w) d > \lambda \sum_{t=1}^k \kappa_t \xi_{d^1}(\bar{x}, z^t)$$

dove,  $\xi_{d^1}(\bar{x}, z^t)$ , sono quantità che dipendono dalla definizione di derivata seconda di  $\varphi$ ,  $\kappa_0 = \sum_{t=1}^k \kappa_t$

$$\nabla_1 \bar{\mathcal{L}}_{\kappa_0}^\lambda(\bar{x}, \bar{y}, u, v) - \lambda \sum_{t=1}^k \kappa_t \nabla_1 \ell(\bar{x}, z^t, w^t) = 0$$

$$\nabla_2 \bar{\mathcal{L}}_{\kappa_0}^\lambda(\bar{x}, \bar{y}, u, v) = 0$$

dove  $\Lambda(\bar{x}, z^t) = \{w^t\}$ , e

$$\kappa_0 + \sum_{i \in I^1(d)} u_i + \sum_{j \in I^2(d)} v_j = 1$$

$$\kappa_0 \geq 0, \quad u_i \geq 0 \text{ per } i \in I^1(d), \quad v_j \geq 0 \text{ per } j \in I^2(d)$$

## Idea di dimostrazione

- ①  $\phi_\lambda$  ammette derivata direzionale e vale

$$\phi'_\lambda(\bar{x}, \bar{y}; d) \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^{n+m}$$

- ②  $\phi_\lambda$  ammette derivata direzionale seconda e soddisfa la condizione:

$$\inf_{e \in \mathbb{R}^{n+m}} \phi''(\bar{x}, \bar{y}; d; e) > 0 \quad \text{per tutti i } d \neq 0 \quad \text{t.c.} \quad \phi'_\lambda(\bar{x}, \bar{y}; d) = 0$$

- ③  $\phi_\lambda$  soddisfa quella che viene chiamata condizione di epiregolarità del secondo ordine, ovvero:  
per ogni  $d \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $t \geq 0$ , e ogni cammino  $e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  tale che  $te(t) \rightarrow 0$  per  $t \downarrow 0$  vale:

$$\phi_\lambda \left( (\bar{x}, \bar{y}) + td + \frac{1}{2} t^2 e(t) \right) \geq \phi_\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + t \phi'_\lambda(\bar{x}, \bar{y}; d) + \frac{1}{2} t^2 \phi''_\lambda(\bar{x}, \bar{y}; d; e(t)) + o(t^2)$$

Dei problemi presenti nella libreria, i veri valori ottimi sono noti per il 70% di essi. Per ognuno dei valori del parametro di penalizzazione osserviamo che il metodo converge sempre almeno il 87 delle volte. Inoltre l'ordine di convergenza sperimentale è stato osservato essere oltre 1.5 per oltre il 70% dei problemi.

# Numerical experiments



Grazie per l'attenzione

- [1] A. Fischer, A. B. Zemkoho, and S. Zhou, “Semismooth newton-type method for bilevel optimization: Global convergence and extensive numerical experiments,” *Optimization Methods and Software*, vol. 37, no. 5, pp. 1770–1804, 2022. doi: 10.1080/10556788.2021.1977810. eprint: <https://doi.org/10.1080/10556788.2021.1977810> (cit. on p. 1).