LE DISPENSE DA NON CREDERE!

ANALISI COMPLESSA

Corso del prof.
Giuseppe Tomassini
Scuola Normale Superiore,
A.A. 2008/2009

Appunti di
Antonio De Capua

Versione del 21/12/2009

Indice

Parte I

Fondamenti di analisi complessa

Lezione 1

1.1 Richiami

1. Cammini differenziali
2. Forme differenziali di grado 1
3. Integrali

[Per questi argomenti introduttivi, vedere l'eserciziario di Sam.]

1.2 Funzioni $\mathbb{C}$-differenziabili e funzioni olomorfe

Notazioni. Con z indichiamo sia il punto (x, y) nel piano complesso $\mathbb{C}$ (identificato con $\mathbb{R}^2$), sia il numero complesso $x + iy$. Inoltre $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (nel seguito faremo spesso uso di questa identificazione); $\Re z = x$ e $\Im z = y$ designeranno la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso z.

Definizione 1.1 *Il* disco *di centro z_0 e raggio r è l'aperto di $\mathbb{C}$ definito da*

$$\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Ricordiamo che una funzione $f = f(x, y)$ si dice $\mathbb{R}$-*differenziabile* in (x_0, y_0) se $\exists\ A, B \in \mathbb{R}$ tali che, per (x, y) nell'intorno di (x_0, y_0)

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0) = O_2(z - z_0) \tag{1.1}$$

(dove $O_2(z - z_0)$ è un numero tale che $O_2(z - z_0)/\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0$ se $(x, y) \to (x_0, y_0)$). Da 1.1 segue che f è parzialmente derivabile rispetto a x e y in (x_0, y_0) e che $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$.

Osservazioni.

1. La continuità di f e l'esistenza delle derivate parziali non garantiscono la $\mathbb{R}$-differenziabilità in (x_0, y_0).

   Esempio. $f = \sqrt{|xy|}$ non è $\mathbb{R}$-differenziabile in $(0, 0)$ ma $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

2. Se $\exists f_x,\ f_y$ in (x_0, y_0) ed una è continua in un intorno allora f è $\mathbb{R}$-differenziabile in (x_0, y_0).

3. La condizione precedente è sufficiente, ma non necessaria.

   Esempio. La funzione
   $$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ x^2 + y^2 & \text{altrove} \end{cases}$$
   è $\mathbb{R}$-differenziabile in (0,0) ma non è parzialmente derivabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

◇

Definizione 1.2 *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua su D, aperto del piano complesso $\mathbb{C}$. f si dice* $\mathbb{C}$-differenziabile *in z_0 se $\exists\, L \in \mathbb{C}$ tale che per z nell'intorno di z_0*

$$f(z) - f(z_0) - L(z - z_0) = O_2(z - z_0) \tag{1.2}$$

cioè se esiste il limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L \tag{1.3}$$

L si chiama la *derivata complessa* di f in z_0 e si denota con $f'(z_0)$.

La condizione di $\mathbb{C}$-differenziabilità è molto più forte dell'analoga di $\mathbb{R}$-differenziabilità. Infatti

Proposizione 1.1 *f è $\mathbb{C}$-differenziabile in $z_0 = (x_0, y_0)$ se e solo se è $\mathbb{R}$-differenziabile e*

$$f_x + i f_y = 0 \tag{1.4}$$

Dim. ⇒) Supponiamo che $\exists\, f'(z_0)$. Allora vale 1.3 e, se $z = (x, y_0)$ si ha

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f_x(x_0, y_0)$$

e se $z = (x_0, y)$ si ha

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = -i f_y(x_0, y_0)$$

da cui la 1.4. Si ha inoltre

$$\begin{gathered} \Re f(x,y) - \Re f(x_0,y_0) - [\Re f_x(x_0,y_0)](x - x_0) - [\Re f_y(x_0,y_0)](y - y_0) = \\ = \Re f(x,y) - \Re f(x_0,y_0) - \{[\Re f_x(x_0,y_0)][\Re(z - z_0)] - [\Im f_x(x_0,y_0)][\Im(z - z_0)]\} = \\ = \Re f(z) - \Re f(z_0) - \Re[f'(z_0) \cdot (z - z_0)] = O_2(z - z_0) \end{gathered}$$

ed analogamente per la parte immaginaria: quindi f non è solo derivabile in (x_0, y_0), ma $\mathbb{R}$-differenziabile.

$\Leftarrow$) Viceversa, supponiamo f $\mathbb{R}$-differenziabile e che valga 1.4. Allora

$$f(z) - f(z_0) - f_x(z_0)(x - x_0) - f_y(z_0)(y - y_0) = O_2(z - z_0)$$
$$\Downarrow \text{ per la } 1.4$$
$$f(z) - f(z_0) - f_x(z_0)(z - z_0) = O_2(z - z_0)$$
$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f_x(z_0) + \lim_{z\to z_0} \frac{O_2(z-z_0)}{z-z_0} = f_x(z_0).$$

$\square$

Osservazioni.

1. L'esistenza di f_x, f_y e la condizione 1.4 non bastano per assicurare la $\mathbb{C}$-differenziabilità, come mostra l'esempio già dato in $\mathbb{R}^2$.
2. Se f è $\mathbb{C}$-differenziabile in z_0 si ha $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$. Ciò vuol dire che, se $f'(z_0) = a+ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora lo jacobiano di f in (x_0, y_0) come funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
3. Se $U = \Re(f)$, $V = \Im(f)$ designano rispettivamente la parte reale ed immaginaria di f, la 1.4 equivale al sistema
$$\begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \end{cases} \tag{1.5}$$
La 1.5 è detta *condizione di Cauchy-Riemann.*

◇

Definizione 1.3 *Un* dominio *di* $\mathbb{C}$ *è un suo sottoinsieme aperto e connesso.*

Salvo esplicita indicazione, con $C^0(D)$ si indicheranno le funzioni continue $D \to \mathbb{C}$.

Definizione 1.4 *Sia* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un dominio. Una funzione* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *si dice* olomorfa *su* D *se è* $\mathbb{C}$*-differenziabile in ogni punto di* D.

L'insieme $\mathcal{O}(D)$ delle funzioni olomorfe in D è una $\mathbb{C}$-algebra (cioè uno spazio vettoriale su cui è definita un'operazione di moltiplicazione, rispetto alla quale è chiuso) con le usuali operazioni di somma e prodotto.

Le funzioni $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfe si dicono *intere.*

Esempi.

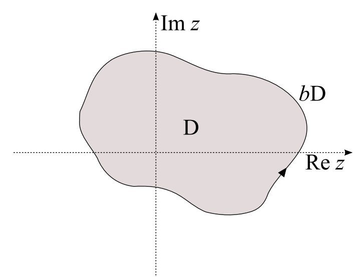
1. La funzione $f(z) = \overline{z}$ non è $\mathbb{C}$-differenziabile in nessun punto di $\mathbb{C}$.
2. L'algebra $\mathbb{C}[z]$ dei polinomi è una sottoalgebra di $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.
3. Una funzione razionale $P(z)/Q(z)$ è olomorfa dove $Q(z) \neq 0$.
4. La somma di una serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ è olomorfa nel suo disco di convergenza.
5. Le funzioni e^z, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sinh z$, $\cosh z$ sono olomorfe intere.
6. Si dimostri che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sviluppabile in serie di Taylor (i.e. analitica reale) si estende olomorficamente in un intorno dell'asse reale.
7. La composizione $f \circ g$ di due funzioni olomorfe è olomorfa.
8. Dal sistema 1.5 segue che se D è un dominio, le sole funzioni olomorfe a valori reali o puramente immaginari sono le costanti.

Tutti gli esempi dati riguardano funzioni differenziabili (i.e. di classe C^∞). Non è un caso. Come vedremo vale una proprietà ben più forte: una funzione olomorfa è localmente la somma di una serie $\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$. Questo risultato fondamentale è una delle conseguenze di un celebre teorema di Cauchy (uno dei fondatori della teoria) che stabilisce una *formula di rappresentazione* per le funzioni olomorfe su un dominio limitato, che "dipende solo" dai valori della funzione sulla frontiera.

Lezione 2

2.1 I teoremi di Cauchy

Sia D un dominio limitato di $\mathbb{C}$ con frontiera bD regolare (o regolare a tratti). Valgono i seguenti *teoremi di Cauchy*:



Teorema 2.1 *Se $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\overline{D})$ (i.e. f è olomorfa in D e continua su $\overline{D}$),*

$$\int_{bD} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Teorema 2.2 *Se $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\overline{D})$, per ogni $z \in D$ si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

bD è la frontiera di D con l'orientazione positiva. Per ogni F continua su bD,

$$\int_{bD} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

designa l'integrale della forma differenziale $F\mathrm{d}x + iF\mathrm{d}y$. Per definizione, $\int_{-bD} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\int_{bD} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ dove $-bD$ è la frontiera di D con l'orientazione opposta.

Per i nostri scopi sarà sufficiente dare la dimostrazione dei due teoremi di solo per domini particolari.

2.2 Il primo teorema di Cauchy

Ci accingiamo a dimostrare il primo teorema di Cauchy per un dominio D rettangolare. Fermo restando che supponiamo $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$, trattiamo prima il caso $f \in C^1(D)$ e poi quello più generale.

Dim. del 1° teorema con $f \in C^1(D)$. Sia $D = (a, b) \times (c, d)$.

Possiamo supporre $f \in C^1(\overline{D})$: se così non è, approssimiamo D con una successione di rettangoli

$$D_\varepsilon = (a + \varepsilon, b - \varepsilon) \times (c + \varepsilon, d - \varepsilon) \longrightarrow D :$$

allora $f \in C^1(\overline{D_\varepsilon})$ per ogni ε, e quindi la nostra dimostrazione varrà per ogni D_ε. Da questo seguirà, al limite, la tesi per D.

Si ha

$$\int_{bD} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_a^b f(x,c)\mathrm{d}x + i\int_c^d f(b,y)\mathrm{d}y + \int_b^a f(x,d)\mathrm{d}x + i\int_d^c f(a,y)\mathrm{d}y = \\ = I_1 + iI_2 + I_3 + iI_4.$$

Poiché $f_x + if_y = 0$, si ha

$$0 = \int_a^b \mathrm{d}x \left[\int_c^d (f_x + if_y)\mathrm{d}y\right] = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f_x\mathrm{d}y + i\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f_y\mathrm{d}y.$$

Portiamo fuori dall'integrale le derivate che non interessano le variabili di integrazione e, ricordando $f \in C^1(\bar{D})$, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + i\int_a^b [f(x,d) - f(x,c)]\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ne segue (ancora per il teorema fondamentale del calcolo integrale):

$$0 = \int_c^d f(b,y)\mathrm{d}y - \int_c^d f(a,y)\mathrm{d}y + i\int_a^b f(x,d)\mathrm{d}x - i\int_a^b f(x,c)\mathrm{d}x$$

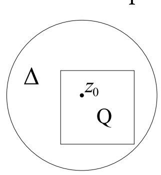
cioè $0 = I_2 + I_4 - iI_3 - iI_1 = -i(I_1 + iI_2 + I_3 + iI_4)$, c.v.d. □

Osservazione. Se si suppone che f è $C^1(D)$, il primo teorema di Cauchy è un corollario del *teorema di Green*:

$$\int_{bD} F\mathrm{d}x + G\mathrm{d}y = \int_D (G_x - F_y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

valido per una 1-forma $F\mathrm{d}x + G\mathrm{d}y$, continua in $\overline{D}$ e di classe C^1 in D. Infatti, posto $F = f$ e $G = if$ si ha $F_y = G_x$ per la condizione di Cauchy-Riemann. La nostra dimostrazione è di fatto una dimostrazione del teorema di Green in un caso particolare. ◇

Prima di procedere con il caso più generale $f \in C^0(\overline{D})$, dimostriamo il fatto seguente:



Lemma 2.1 *Dato $z_0 \in D$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ tale che per ogni quadrato $Q \subseteq \Delta(z_0,\delta)$ con i lati paralleli agli assi e contenente z_0 si abbia*

$$\left|\int_{bQ} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \le 4\sqrt{2}\varepsilon \cdot \mathrm{Area}(Q).$$

Dim. Sia $Q = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$. Poiché f è $\mathbb{C}$-differenziabile in z_0, $\exists\delta$ tale che

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \le \varepsilon|z - z_0|$$

per ogni $z \in \Delta(z_0, \delta)$.

Per quanto già dimostrato, si ha

$$\int_{bQ} [f(z_0) + f'(z_0)(\zeta - z_0)]\mathrm{d}\zeta = 0$$

(infatti stiamo integrando una funzione C^1). Pertanto, se $L^2 = \text{Area}(Q)$, si ha

$$\frac{1}{L^2}\left|\int_{bQ} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| = \frac{1}{L^2}\left|\int_{bQ} [f(\zeta) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0)]\mathrm{d}\zeta\right|.$$

poiché $Q \subseteq \Delta(z_0, \delta)$, $|f(\zeta) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0)| \le \varepsilon|\zeta - z_0|$, quindi

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{bQ} [f(\zeta) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0)]\mathrm{d}\zeta \le \\ &\le \varepsilon \left(\textstyle\int_{a_1}^{a_2} |x - x_0 + ib_1 - iy_0|\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} |x - x_0 + ib_2 - iy_0|\mathrm{d}x + \right. \\ &\left. + \textstyle\int_{b_1}^{b_2} |a_1 - x_0 + iy - iy_0|\mathrm{d}y + \int_{b_1}^{b_2} |a_2 - x_0 + iy - iy_0|\mathrm{d}y\right). \end{aligned}$$

Poiché $z_0 \in Q$, si ha poi $|\zeta - z_0| \le L\sqrt{2}$ per ogni $\zeta \in Q$. Ne segue la disuguaglianza:

$$\frac{1}{L^2}\left|\int_{bQ} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \le 4\sqrt{2}\varepsilon.$$

□

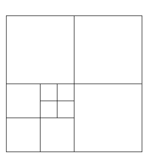
Osservazioni. Se un dominio (a bordo regolare) D è tale che $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$, e $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, si ha $\int_{bD} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{bD_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{bD_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$: infatti, il tratto di bordo in comune a D_1 e D_2 viene "percorso in versi opposti" facendo i due integrali, quindi questi due passaggi danno due contributi opposti che si elidono, lasciando solo l'integrale fatto su bD. Questo è vero per una qualunque "unione" finita di domini.

Supponiamo di avere un D non semplicemente connesso (cioè, che il complementare abbia delle componenti connesse compatte): allora gli integrali sui bordi interni del dominio sono da intendersi percorrendo il bordo nel verso opposto a quello esterno: lo si può capire pensando ad un dominio non semplicemente connesso come al limite di una successione di domini semplicemente connessi. ◇

Dim. del 1° teorema (in un dominio rettangolare). Supponiamo per assurdo che esista un quadrato $Q \subseteq D$ tale che $I = \int_{bQ} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \neq 0$, $I = A + iB$. A meno di moltiplicare per -1, $\pm i$, possiamo porre $A > 0$.

Sia $\eta > 0$ tale che $A - \eta\text{Area}(Q) > 0$; detto Q' un quadrato, definiamo

$$k(Q') = \Re\left(\textstyle\int_{bQ'} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right) - \eta\text{Area}(Q').$$



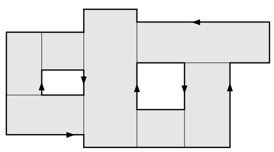
È possibile costruire una successione di quadrati Q_n tale che: $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $\text{diam}(Q_n) < 1/n$ definitivamente, e $A_n - \eta\text{Area}(Q_n) > 0$, dove $A_n = \Re\int_{bQ_n} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$, procedendo in questo modo: poniamo $Q_0 = Q$, e prendiamo come $k(Q_{n+1})$ uno dei quattro quadrati che si ottengono tracciando le mediane di Q_n, tale che $k(Q_{n-1}) > 0$ (esisterà sicuramente, perché la somma sui quattro quadrati è $k(Q_n) > 0$).

Per la compattezza dei Q_i, $\exists\, z_0 \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} Q_n$. Prendiamo ora $\varepsilon, \delta > 0$ tali che $\eta \ge 4\sqrt{2}\varepsilon$, δ come nel lemma. Allora definitivamente $Q_n \subseteq \Delta(z_0, \delta)$, ma $\left|\int_{bQ_n} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \ge A_n \ge \eta\text{Area}(Q_n) > 4\sqrt{2}\varepsilon\text{Area}(Q_n)$, assurdo per il lemma.

Siano ora a e b le lunghezze dei lati del rettangolo.

- Se $a/b = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, allora $a/m = b/n$. Dividiamo D in $m \times n$ quadrati di lato a/m: si avrà allora
$$\int_{bD} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum \int_{bQ_i} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0.$$
- Se a/b non è razionale si approssima D con una successione di rettangoli D_ν di rettangoli il cui rapporto fra i lati è invece razionale, ottenendo
$$\int_{bD} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \lim_{\nu\to+\infty} \int_{bD_\nu} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0.$$

La tesi è così dimostrata. □



Osservazione. Dalla dimostrazione nel caso di dominio rettangolare segue direttamente quella del caso in cui D è un plurirettangolo, ovvero un'unione di rettangoli senza punti interni in comune. ◇

2.3 Il secondo teorema di Cauchy

Prima di dimostrare la formula integrale del secondo teorema di Cauchy, almeno nel caso di un dominio rettangolare, dobbiamo trattare ancora un caso particolare del primo teorema. Nella dimostrazione, infatti, useremo il 1° teorema di Cauchy integrando su bD una funzione $\in \mathcal{O}(D) \cap C^1(D)$, dove D è "un rettangolo meno un disco".

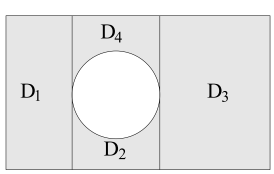
E ancora prima di vedere il suddetto caso particolare, conviene soffermarci un attimo sul seguente

Lemma 2.2 *Siano $f \in C^1(A = (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\alpha \in C^1((a,b);(c,d))$, $k \in (c,d)$. Allora*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_k^{\alpha(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_k^{\alpha(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y + \alpha'(x)f(x,\alpha(x)).$$

Dim. Sia $F(x,w) = \int_k^w f(x,y)\mathrm{d}y$. Osserviamo che $F \in C^1(A;\mathbb{R})$, e, detta $g(x) = F(x,\alpha(x))$, che
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\alpha(x)) + \frac{\partial F}{\partial w}(x,\alpha(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_k^{\alpha(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_k^{\alpha(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y + f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

dove si è usato il fatto che f è C^1 per portare nell'integrale la derivazione rispetto a x.

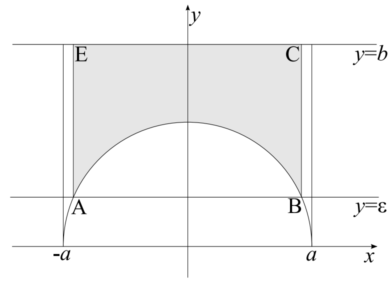
La validità del lemma si estende banalmente a funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$. □



Dimostriamo ora il 1° teorema di Cauchy su "un rettangolo meno un disco". Sappiamo già che esso vale sui rettangoli D_1 e D_3: rimane quindi da verificare la validità su domini come D_4 (per D_2 sarà analogo).

Dim. del 1° teorema nel caso particolare sopra descritto.

Nella figura a destra, poniamo per semplicità che il centro del disco sottratto al rettangolo sia lo 0: dal caso generale sarà sempre possibile ricondursi a questo per traslazioni e/o simmetrie. $A = (-c, \varepsilon)$, $B = (c, \varepsilon)$ dove $c = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}$.



Detto D_ε il dominio in grigio, si avrà

$$\int_{bD_4} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{bD_\varepsilon} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Per semplicità di notazione, sia $\alpha(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Poiché f è olomorfa in D_4, $f_x + i f_y = 0$ e quindi

$$\int_{-c}^{c} \left[\int_{\alpha(x)}^{b} (f_x(x,y) + i f_y(x,y))\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = 0$$

ed abbiamo, per il lemma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\alpha(x)}^{b} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\alpha(x)}^{b} f_x(x,y)\mathrm{d}y - f(x, \alpha(x))\alpha'(x).$$

Isolando il primo addendo del secondo membro e sostituendo nell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-c}^{c} \left[\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\alpha(x)}^{b} f(x,y)\mathrm{d}y + f(x,\alpha(x))\alpha'(x) \right] \mathrm{d}x + i \int_{-c}^{c} [f(x,b) - f(x,\alpha(x))]\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\alpha(c)}^{b} f(c,y)\mathrm{d}y - \int_{\alpha(-c)}^{b} f(-c,y)\mathrm{d}y + \int_{-c}^{c} f(x,\alpha(x))\alpha'(x)\mathrm{d}x + \\ &\quad + i \int_{-c}^{c} f(x,b)\mathrm{d}x - i \int_{-c}^{c} f(x,\alpha(x))\mathrm{d}x = \\ &= -i \Big\{ i \int_{\alpha(c)}^{b} f(c,y)\mathrm{d}y + i \int_{b}^{\alpha(-c)} f(-c,y)\mathrm{d}y + \\ &\quad + i \int_{-c}^{c} f(x,\alpha(x))\alpha'(x)\mathrm{d}x + \int_{-c}^{c} f(x,\alpha(x))\mathrm{d}x + \int_{c}^{-c} f(x,b)\mathrm{d}x \Big\}. \end{aligned}$$

La scrittura fra parentesi graffe equivale a $\int_{bD_\varepsilon} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$: infatti il primo addendo è $\int_{BC} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$, il secondo è $\int_{EA} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$, il terzo ed il quarto sommati danno $\int_{AB} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ (dove con AB si intende l'arco che è parte di bD_ε), il quinto è $\int_{CE} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

Da notare inoltre che la dimostrazione sarebbe stata identica se AB non fosse stato descritto come arco di circonferenza ma come grafico $y = \alpha(x)$ di un'altra funzione $\alpha \in C^1$. □

Siamo finalmente pronti a dimostrare il secondo teorema di Cauchy su un dominio D rettangolare. Osserviamo preliminarmente questo fatto: se f e g funzioni $\mathbb{C}$-differenziabili, allora $F(z) = f(z)/g(z)$, definita ove $g(z) \neq 0$, è $\mathbb{C}$-differenziabile, e la sua derivata è $F'(z) = [f'(z)g(z) - f(z)g'(z)]/[g(z)]^2$. La dimostrazione è analoga a quella del caso di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dim. del 2° teorema di Cauchy Sia $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\overline{D})$, $z_0 \in D$ e $\delta > 0$ tale che il quadrato Q_δ di centro z_0 e lato δ sia contenuto in D. La funzione $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ è olomorfa nel plurirettangolo $D' = D \setminus \overline{Q_\delta}$ e continua su $\overline{D'}$. Per il 1° teorema di Cauchy applicato a D' si ha

$$0 = \int_{bD'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta = \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta - \int_{bQ_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta$$

da cui

$$\int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta = \int_{bQ_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta.$$

Ci basta quindi dimostrare che $\lim_{\delta \to 0} \int_{bQ_\delta} f(\zeta)/(\zeta - z_0)\mathrm{d}\zeta = 2\pi i f(z_0)$ (da cui avremo che l'integrale dipendente da δ, in realtà, è identicamente uguale a $2\pi i f(z_0)$).

Scegliamo δ abbastanza piccolo affinché $\overline{\Delta(z_0, \delta\sqrt{2}/2)} \subseteq D$. Scriviamo

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z_0)}{z - z_0} + f'(z_0);$$

poiché $g(z) = f'(z_0)$ è una costante, quindi a maggior ragione una funzione olomorfa su Q_δ, il suo integrale su bQ_δ è nullo:

$$\begin{aligned}\left|\int_{bQ_\delta} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta - 2\pi i f(z_0)\right| &= \left|\int_{bQ_\delta} \tfrac{f(\zeta) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta + \int_{bQ_\delta} \tfrac{f(z_0)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta - 2\pi i f(z_0)\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{bQ_\delta} \tfrac{f(\zeta) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta\right| + \left|\int_{bQ_\delta} \tfrac{f(z_0)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta - 2\pi i f(z_0)\right| = I_1(\delta) + I_2(\delta).\end{aligned}$$

Se δ è opportunamente piccolo, si ha $|f(\zeta) - f(z_0) - f'(z_0)(\zeta - z_0)| < |\zeta - z_0|$. Dunque, esplicitando I_1 lato per lato del quadrato, si ha $I_1(\delta) \leq 4\delta$. Sia ora $\rho < \delta/2$, e $\Delta = \Delta(z_0, \rho)$: per il primo teorema di Cauchy nel caso speciale prima dimostrato si ha

$$\int_{b(Q_\delta \setminus \overline{\Delta})} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta = 0 \Rightarrow \int_{bQ_\delta} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta = \int_{b\Delta} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\vartheta}}{\rho e^{i\vartheta}}\mathrm{d}\vartheta = 2\pi i f(z_0)$$

cioè, $I_2(\delta) = 0$. Quindi, passando al limite per $\delta \to 0$ si ottiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta.$$

□

Lezione 3

Definizione 3.1 *Definiamo due operatori differenziali per funzioni di una variabile complessa $z = x + iy$:*

- $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ (operatore di Cauchy-Riemann)
- $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

Per definizione, f è olomorfa se e solo se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ Per questo, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ è detta la *parte antiolomorfa* di f, mentre $\frac{\partial f}{\partial z}$ è detta la *parte olomorfa* di f. In particolare, se f è olomorfa, ricordando quanto osservato nella prima lezione, si ha $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} = f'$.

In analogia con la forma differenziale $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, definiamo inoltre la forma $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$, da cui abbiamo

$$df = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y = f_x \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}}{2} + f_y \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar{z}}{2i} = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.$$

3.1 Il teorema di Goursat

Teorema 3.1 *Se $f \in \mathcal{O}(D)$, la derivata f' è continua e $\mathbb{C}$-differenziabile in D.*

Dim. Poiché ci interessano propietà locali, possiamo supporre che D sia un rettangolo. Dalla formula di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

e derivando (dall'olomorfia si ha $f'(z) = \partial f / \partial z = \mathrm{d}f / \mathrm{d}z$):

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

il passaggio della derivazione dentro l'integrale è lecito perché non riguarda la variabile di integrazione. Da quest'ultima formula abbiamo che f' è continua, e olomorfa:

$$\frac{\partial f'}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta = 0$$

in quanto l'integrando è olomorfo in z su D. □

In realtà, applicando ripetutamente il teorema abbiamo un risultato molto più forte:

Proposizione 3.1 *Una funzione olomorfa su un dominio D è di classe $C^\infty(D)$ e le sue derivate parziali sono funzioni olomorfe.*

Procedendo per induzione su k, si può verificare che

$$f^{(k)}(z_0) = k!\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$

e, per il primo teorema di Cauchy, ciò vale anche se si integra su una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti contenuta in D.

Osservazione. Tenuto conto dell'equazione di Cauchy-Riemann si ha

$$f^{(k)}(z) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k} = (-i)^k \frac{\partial^k f}{\partial y^k}$$

◇

Corollario 3.1 *Siano $D_1, D_2, D_3 \subseteq \mathbb{C}$, e $f : D_1 \longrightarrow D_2$, $g : D_2 \longrightarrow D_3$ funzioni olomorfe. Allora $g \circ f : D_1 \longrightarrow D_3$ è olomorfa.*

Dim. Poiché $f, g \in C^\infty$ come funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, anche $g \circ f \in C^\infty$.

Detto $w = f(z)$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f)(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(w) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z)$$

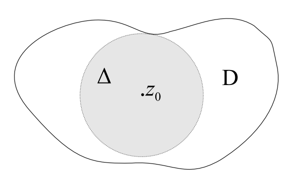
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f)(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(w) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z)$$

Ma poiché f e g sono olomorfe, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} = 0$, da cui $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f)(z) = 0$. Quindi $g \circ f$ è olomorfa e $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$. □

3.2 Sviluppi in serie di Taylor

Dato un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, indichiamo con $\delta(z) = \inf_{\zeta \in bD} |z - \zeta|$ la distanza di z dal bordo di D. Se $D = \mathbb{C}$, poniamo $\delta(z) = +\infty$.

Teorema 3.2 *Siano $f \in \mathcal{O}(D)$ e $z_0 \in D$. Sul disco $\Delta(z_0, \delta(z_0))$, f è la somma della serie di potenze centrata in z_0*



$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

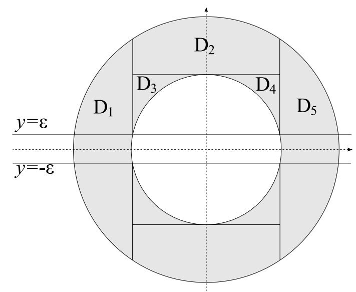
Prima di dimostrare il teorema, vediamo brevemente un caso del secondo teorema di Cauchy che non abbiamo ancora dimostrato:

Lemma 3.1 *Se $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$, dove $D = \Delta(z_0, R)$,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta$$

Dim. Prima di tutto, vediamo che la formula di Cauchy vale per $f \in \mathcal{O}(C) \cap C^0(C)$, dove C è una corona circolare. Assicuriamoci che $f \in C^1(\bar{C})$: se così non è, consideriamo una successione di corone circolari $C_n \subseteq C$ tendenti a C: in ogni $\bar{C}_n$, f sarà olomorfa e quindi C^1. La tesi su C seguirà come limite.

Consideriamo solo l'intersezione C' della corona circolare C con $\{|y| > \varepsilon\}$, e sfruttiamo la dimostrazione del primo teorema di Cauchy nel caso particolare di dominio "rettangolare su tre lati", e sull'ultimo delimitato da una funzione $\alpha \in C^1$.



Come si vede dalla figura a destra, si può suddividere C' in domini di questo tipo ($D_1, D_2, \ldots$), eventualmente con un lato nullo (nel caso in cui la corona sia più sottile, bisognerà suddividerla in più domini).

Sfruttando l'additività degli integrali su domini senza punti interni in comune, vediamo che $\int_{bC'} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$; e per $\varepsilon \to 0$, si ha la tesi su C.

A questo punto, si può supporre $z_0 \in \Delta(z_0, r) \subseteq Q \subseteq D$, dove Q è un quadrato. Detta $g(z) = f(z)/(z - z_0)$, sappiamo che $\int_{bQ} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 2\pi i f(z_0)$, ed inoltre $\int_{bQ} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{b\Delta(z_0,r)} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ perché g è olomorfa in $Q \setminus \overline{\Delta(z_0, r)}$, che è uno dei domini per cui abbiamo dimostrato il 1° teorema di Cauchy. Infine, $\int_{b\Delta(z_0,r)} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{b\Delta(z_0,R)} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ per il 1° teorema di Cauchy sulla corona circolare $\Delta(z_0, R) \setminus \overline{\Delta(z_0, r)}$. □

Dim. del teorema Sia $r < \delta(z_0)$. Il disco chiuso $\overline{\Delta(z_0, r)}$ è contenuto in D, quindi dalla formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \quad \forall z \in \Delta(z_0, r). \tag{3.1}$$

Si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

e $|z - z_0|/|\zeta - z_0| = |z - z_0|/r < 1$ per $\zeta \in b\Delta(z_0, r)$, e $z \in K$ compatto $\subseteq \Delta(z_0, r)$. Pertanto

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$$

e la serie converge *normalmente* (cioè assolutamente e uniformemente) per $|\zeta - z_0| = r$ in ogni compatto $K \subseteq \Delta(z_0, r)$.

Dall'espressione 3.1 si ha allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta) \sum_{k \geq 0} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \geq 0} \left(\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \right) (z - z_0)^k$$

(lo scambio tra somma infinita ed integrale è lecito perché la serie converge uniformemente al variare di $\zeta \in \Delta(z_0, r)$).

i coefficienti a_k della serie sono dati da

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

(l'ultima uguaglianza segue dalla dimostrazione del teorema di Goursat reiterata); in particolare non dipendono da $r < \delta(z_0)$, quindi la serie converge in $\Delta(z_0, \delta(z_0))$. □

Osservazioni.

1. Dal momento che $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = f^{(k)} = (-i)^k \frac{\partial^k f}{\partial y^k}$, la serie trovata è anche la serie di Taylor di f come funzione delle variabili reali x, y.
2. Mentre in $\mathbb{R}$ il raggio di convergenza di una serie di Taylor non ha un significato immediato, in $\mathbb{C}$ una serie di Taylor converge almeno nel massimo disco centrato in z_0 e contenuto nel dominio D in cui f è olomorfa.

◇

Osservazione (stime di Cauchy sulle derivate). È possibile maggiorare in modulo gli a_k:

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\vartheta})}{r^{k+1} e^{i(k+1)\vartheta}} rie^{i\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\vartheta})|}{r^k} \mathrm{d}\vartheta \leq \frac{1}{r^k} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

dove $0 < r < \delta(z_0)$. In particolare

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|. \tag{3.2}$$

◇

Dal teorema si ricavano importanti corollari:

Corollario 3.2 *Ogni funzione olomorfa intera è la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza* $+\infty$.

Dim. Infatti, la serie di potenze trovata convergerà su dischi di raggio r qualsiasi. □

Corollario 3.3 (Teorema di Liouville) *Le uniche funzioni olomorfe intere limitate in modulo sono le costanti.*

Dim. Supponiamo che $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ sia limitata in modulo: $|f(z)| \leq c$, con c costante, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Per il corollario precedente si ha

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

e per la 3.2,

$$|f^{(k)}(0)| \leq k!\frac{c}{r^k} \quad \forall\, r > 0, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

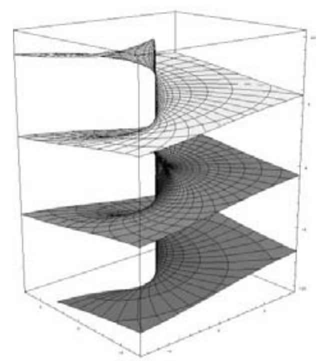
Ne segue $f^{(k)}(0) = 0$ per $k \geq 1$, e quindi f costante. □

Corollario 3.4 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Un polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice.*

Dim. Supponiamo per assurdo che $P(z) \neq 0\, \forall\, z \in \mathbb{C}$. La funzione $f(z) = 1/P(z)$, allora, è olomorfa intera e poiché $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, f è limitata. Per il teorema di Liouville allora dovrebbe essere costante, da cui P costante: assurdo. □

Esempio. Poiché per ogni numero complesso $z \neq 0$ si può scrivere $z = |z|e^{i\vartheta}$, dove ϑ è detto l'*argomento* di z, si può definire il *logaritmo complesso* di z, nel senso di funzione f tale che $e^{f(z)} = z$, come segue:

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i\operatorname{Arg} z.$$



da Wikipedia

$\operatorname{Arg} z$, però, è definito solo a meno di multipli interi di 2π, e per una definizione univoca di $\operatorname{Log} z$ è necessario porre una condizione come $-\pi \leq \vartheta < \pi$ (o, più in generale, $\vartheta_0 \leq \vartheta < \vartheta_0 + 2\pi$). Il logaritmo così definito sarà una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z | \Re z \leq 0, \Im z = 0\}$ (rispettivamente, in $\mathbb{C} \setminus \{z | \operatorname{Arg} z = \vartheta_0\}$); attraversando la semiretta "critica", il logaritmo fa un "salto" di $2\pi i$.

Fissiamo z_0 nel secondo quadrante del piano complesso, sia $\vartheta_0 = \operatorname{Arg} z_0 + \pi/2$, e definiamo $\operatorname{Log} z$ come nella prima definizione, $\log z$ come nella seconda.

Se $\Im z > 0$, $\operatorname{Log} z = \log z$. Lo sviluppo di Taylor di $\log z$ con centro in z_0 coincide quindi con lo sviluppo di $\operatorname{Log} z$. Ne segue che lo sviluppo di Taylor di $\operatorname{Log} z$ converge in $\Delta(z_0, |z_0|)$ e non solo in $\Delta(z_0, \Re z_0)$: la somma della serie sarà $\log z \neq \operatorname{Log} z$ nei punti di $\Delta(z_0, |z_0|)$ ove $\Im z < 0$.

Il fenomeno descritto è legato alla *polidromia* ed è all'origine della nozione di funzione analitica secondo Weierstrass e di quella di superficie di Riemann. In particolare, osserviamo che si potrebbe definire una funzione $\operatorname{Log} z$ olomorfa ovunque in un insieme come $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*_n)$, dove i $\mathbb{C}^*_n$ sono "copie" di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, collegate "ad elica" facendo coincidere le semirette $\{\Re z \leq 0, \Im z = 0\}$ di due copie contigue, in modo tale che il quadrante $\{\Re z \leq 0, \Im z \geq 0\}$ di $\mathbb{C}^*_n$ unito al quadrante $\{\Re z \leq 0, \Im z \leq 0\}$ di $\mathbb{C}^*_{n+1}$ sia un sottinsieme connesso (vedi figura).

Inoltre, si può definire in modo olomorfo il logaritmo anche su un qualunque dominio di $\mathbb{C}^*$ che sia *semplicemente connesso*, cioè tale che il complementare non abbia componenti connesse compatte: lo vedremo parlando di primitive olomorfe.

3.3 Principio d'identità

Vediamo una delle conseguenze della sviluppabilità locale delle funzioni olomorfe in serie di Taylor:

Proposizione 3.2 (Principio d'identità) *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in D$, $f \in \mathcal{O}(D)$. Se $f^{(k)}(z_0) = 0\, \forall k$, allora $f \equiv 0$ in D.*

Dim. Sia $U = \{z \in D | f^{(k)}(z) = 0 \, \forall k\}$. Dimostreremo che U è non vuoto, aperto e chiuso in D, cosicché, essendo D connesso, $U = D$, da cui la tesi.

U è non vuoto perché $z_0 \in U$.

U è aperto: se $z_1 \in U$, esiste un disco centrato in z_1 in cui

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_1)^k \equiv 0$$

in quanto $a_k = f^{(k)}(z_1)/k! = 0$. Quindi $U \supset \Delta(z_0, \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$.

U è chiuso: infatti

$$U = \bigcap_{k \geq 0} \{z \in D | f^{(k)}(z) = 0\}.$$

Per la continuità delle $f^{(k)}$ ognuno di questi insiemi, essendo la controimmagine del chiuso $\{0\} \subseteq \mathbb{C}$ secondo $f^{(k)}$, è chiuso, quindi U, essendo la loro intersezione, è anch'esso chiuso. □

La proposizione ha alcune varianti:

Corollario 3.5 *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in D$, $f, g \in \mathcal{O}(D)$. Se $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \, \forall k$, allora $f \equiv g$ in D.*

Dim. Sia $h(z) = f(z) - g(z)$; banalmente $h \in \mathcal{O}(D)$ e si ha $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \Rightarrow h^{(k)}(z_0) = 0 \, \forall k$. Per la proposizione precedente, $h \equiv 0$ in D, da cui $f \equiv g$. □

Corollario 3.6 *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}(D)$. Se $f(z) = g(z) \, \forall z \in U$ sottoinsieme aperto di D, allora $f \equiv g$.*

Dim. Sia $z_0 \in U$: si avrà $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \, \forall k$. La tesi segue dal corollario precedente. □

Tuttavia si può dire di più:

Proposizione 3.3 *Se D è un dominio e $f \in \mathcal{O}(D)$ non è identicamente nulla, l'insieme $Z(f)$ degli zeri di f è discreto.*

Dim. Sia z_0 uno zero di f. Per il principio d'identità, $\exists \, k \geq 1$ tale che $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. In particolare, scegliamo k il minimo per cui ciò vale. Nell'intorno di z_0 si ha lo sviluppo di Taylor:

$$f(z) = (z - z_0)^k \left(a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \ldots\right) = (z - z_0)^k g(z), \quad a_k \neq 0$$

e $\lim_{z \to z_0} g(z) = a_k \neq 0$, quindi $g(z) \neq 0$ in un intorno di z_0, mentre $(z - z_0)^k \neq 0$ per $z \neq z_0$. Quindi esiste un intorno di z_0 in cui z_0 è l'unico zero per f. □

Osservazione. L'insieme $Z(f)$ è discreto, ma può accumularsi sul bordo di D. L'analisi della distribuzione degli zeri di una funzione olomorfa su D e regolare su $\bar{D}$ è un argomento classico di teoria delle funzioni di una variabile e richiede strumenti piuttosto raffinati. ◇

3.4 Principio del massimo

Teorema 3.3 *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$ tale che $|f(z)|$ abbia un massimo locale in D. Allora f è costante.*

Dim. Sia z_0 un punto di massimo locale per $|f|$. Allora $\exists U$ intorno di z_0 tale che $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\forall z \in U$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{\Delta(z_0, \varepsilon)} \subseteq U$. Per la formula di Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}\zeta.$$

Detto $\zeta - z_0 = \varepsilon e^{i\vartheta}$, effettuiamo un cambio di variabile nell'integrale:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\vartheta})}{\varepsilon e^{i\vartheta}} \varepsilon i e^{i\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{i\vartheta})| \mathrm{d}\vartheta.$$

Vale inoltre l'uguaglianza $|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| \mathrm{d}\vartheta$: quindi, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0 + \varepsilon e^{i\vartheta})| - |f(z_0)|) \mathrm{d}\vartheta \geq 0.$$

Ma per ipotesi, su $b\Delta$ si ha $|f(z_0) + \varepsilon e^{i\vartheta}| - |f(z_0)| \leq 0$: quindi, necessariamente

$$|f(z_0 + \varepsilon e^{i\vartheta})| = |f(z_0)| \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi], \forall \varepsilon \text{ tale che } \overline{\Delta(z_0, \varepsilon)} \subseteq U.$$

Dunque $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$ è costante in $\Delta(z_0, \varepsilon)$. In particolare,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \bar{f}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{f} + f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

e il primo addendo vale 0 per l'olomorfia di f. Vale inoltre $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$. Quindi $f(z) \cdot \overline{f'(z)} = 0$. Se f non fosse costante in U, per il principio d'identità non lo sarebbe neanche in $\Delta(z_0, \varepsilon)$: quindi in tale disco f ed f' non sarebbero identicamente nulle e quindi, come visto, ammetterebbero ciascuna solo un insieme discreto di zeri: $f(z) \cdot \overline{f'(z)} = 0$ non potrebbe quindi valere su tutto il disco, assurdo. □

Corollario 3.7 *Se D è un dominio limitato, $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$, allora*

$$\max_{\bar{D}} |f| = \max_{bD} |f|.$$

Se f non è costante,

$$|f(z)| < \max_{\zeta \in bD} |f(\zeta)| \quad \forall z \in D.$$

Corollario 3.8 *Se D è un dominio limitato e $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$, per ogni $z_0 \in D$ vale la disuguaglianza*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq k! \frac{\max_{bD} |f|}{[\delta(z_0)]^k} \quad \forall\, k \geq 0$$

dove $\delta(z_0) = \mathrm{dist}(z_0, bD)$.

Dim. Per la formula 3.2

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq k! \frac{\max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|}{r^k} \quad \forall\, r < \delta(z_0), \forall\, k \geq 0.$$

Per il principio del massimo, si ha $\max_{|\zeta - z_0|=r} |f(\zeta)| \leq \max_{\bar{D}} |f| = \max_{bD} |f|$ e quindi

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq k! \frac{\max_{bD} |f|}{r^k} \quad \forall\, r < \delta(z_0), \forall\, k \geq 0$$

da cui la tesi per $r \to \delta(z_0)$. $\square$

Lezione 4

4.1 Primitive olomorfe

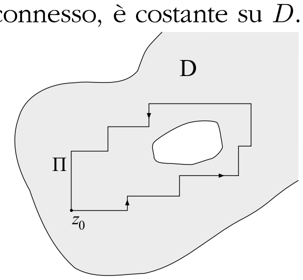
Definizione 4.1 *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$. Una* primitiva olomorfa *di f è una funzione $F \in \mathcal{O}(D)$ tale che $F' = f$.*

F, se esiste, è unica a meno di una costante additiva. Infatti se F e G sono primitive olomorfe di f, detta $H = F - G$, si ha $H^{(k)} = F^{(k)} - G^{(k)} = f^{(k-1)} - f^{(k-1)} = 0 \, \forall k \geq 1$. Ma allora lo sviluppo locale in serie di H attorno ad un qualsiasi punto $z_0 \in D$ si ferma al termine costante: cioè, H è localmente costante, ma essendo D connesso, è costante su D.

Teorema 4.1 *Sia D un dominio, $f \in \mathcal{O}(D)$. Allora f ammette una primitiva olomorfa su D se e solo se*

$$\int_\Pi f(z)\mathrm{d}z = 0$$

per ogni poligonale chiusa $\Pi \subseteq D$ con i lati paralleli agli assi.



Dim. $\Rightarrow$) Sia F una primitiva olomorfa di f. Data una poligonale chiusa Π, indichiamo con $z_0, z_1, \ldots, z_n$ i suoi vertici (numerati in senso antiorario), $z_k = x_k + iy_k$; ed indichiamo con $L_0, \ldots, L_n$ i suoi lati, a partire da quello congiungente z_0 e z_1. Si può supporre che L_k sia parallelo all'asse x per k pari, all'asse y per k dispari.

Abbiamo

$$\int_\Pi f(z)\mathrm{d}z = \int_\Pi F'(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n} \int_{L_k} F'(z)\mathrm{d}z.$$

Quindi, ponendo per semplicità $z_{n+1} = z_0$, e ricordando che $F' = F_x = -iF_y$,

$$\int_{L_k} F'(z)\mathrm{d}z = \int_{L_k} F'(z)\mathrm{d}x + i \int_{L_k} F'(z)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} F_x(x, y_k)\mathrm{d}x + i \int_{y_k}^{y_{k+1}} [-iF_y(x_k, y)]\mathrm{d}y = \int_{x_k}^{x_{k+1}} F_x(x, y_k)\mathrm{d}x + \int_{y_k}^{y_{k+1}} F_y(x_k, y)\mathrm{d}y$$

- se k è pari (L_k parallelo all'asse x), allora $y_k = y_{k+1}$: quindi il primo addendo dell'espressione ottenuta è pari a $F(z_{k+1}) - F(z_k)$, il secondo è nullo;
- se k è dispari (L_k parallelo all'asse y), allora $y_k = y_{k+1}$: quindi il primo addendo dell'espressione ottenuta è nullo, il secondo è pari a $F(z_{k+1}) - F(z_k)$.

Quindi
$$\int_\Pi f(z)\mathrm{d}z = \int_\Pi F'(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n}[F(z_{k+1}) - F(z_k)] = 0$$
perché i contributi si cancellano a coppie.

$\Leftarrow$) Supponiamo $\int_\Pi f(z)\mathrm{d}z = 0$ per ogni poligonale chiusa Π contenuta in D.

Fissato un punto $z_0 \in D$, essendo D aperto e connesso (per archi), ogni altro punto $z \in D$ è congiungibile con z_0 mediante una poligonale $\Pi(z_0, z)$. Definiamo quindi
$$F(z) = \int_{\Pi(z_0,z)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$
La definizione non dipende dalla poligonale scelta: infatti consideriamo due poligonali Π e Π' congiungenti z_0 e z. Allora la loro unione Π'' ("cambiando il verso" di Π') sarà una poligonale chiusa, e si avrà
$$\int_{\Pi''} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0 = \int_\Pi f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\Pi'} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Verifichiamo che $F \in \mathcal{O}(D)$: basterà farlo nell'intorno di un punto generico $z' = x' + iy'$. Consideriamo un disco Δ centrato in z' e contenuto in D. Allora, per come è definita F, per ogni $z = x + iy \in \Delta$ si avrà
$$F(z) = F(z') + \int_{x'}^{x} f(t, y')\mathrm{d}t + i\int_{y'}^{y} f(x, \tau)\mathrm{d}\tau.$$
Poiché f è C^∞, anche F è C^∞; inoltre
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= f(x, y') + i\int_{y'}^{y} f_x(x, \tau)\mathrm{d}\tau = \\
&= f(x, y') + \int_{y'}^{y} f_y(x, \tau)\mathrm{d}\tau = f(x, y') + f(x, y) - f(x, y') = f(x, y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= if(x, y)
\end{aligned}$$
da cui $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$, quindi F è olomorfa; e $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}(f + (-i)if) = f$.

Dunque F è una primitiva olomorfa di f. □

Osservazione. Dimostriamo in modo più preciso che, se D è un dominio, ogni coppia di punti z_0, z si può connettere con una poligonale.

Sia $U = \{z \in D | z \text{ è congiungibile con } z_0\} \neq \varnothing$. Per ogni $z \in U$, esiste un disco $\Delta \subseteq D$ centrato in z: quindi ogni punto del disco sarà connettibile con z tramite una poligonale (nel caso più generale, basterà che abbia un lato parallelo all'asse x ed uno parallelo all'asse y): quindi tali punti saranno connettibili anche con z_0, ma allora $\Delta \subseteq U$: cioè, U è aperto.

Invece, se $z \in \bar{U}$ (ove la chiusura è intesa come sottoinsieme dello spazio D), esiste una successione $\{z_n\} \subseteq U$, $z_n \to z$. Allora, per n sufficientemente grande, esiste un disco contenuto in D centrato in z che contiene z_n: quindi z si connette con z_n e quindi con z_0. Quindi U è chiuso. Essendo D connesso, non può che essere $U = D$. ◇

Corollario 4.1 *Un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se e solo se ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ ammette una primitiva olomorfa.*

Dim. $\Rightarrow$) Comunque presa una poligonale chiusa $\Pi \subseteq D$, la superficie S racchiusa da Π ($\Pi = bS$) è contenuta in D. Quindi, per il primo teorema di Cauchy, presa $f \in \mathcal{O}(D) \subseteq \mathcal{O}(S)$, $\int_\Pi f(z)\mathrm{d}z = 0$ e, per il teorema precedente, f ammette una primitiva olomorfa.

$\Leftarrow$) Supponiamo per assurdo che esista una poligonale chiusa non intrecciata Π tale che la superficie racchiusa P contenga un $z_0 \notin D$. Allora $f(z) = 1/(z - z_0)$ è una funzione olomorfa su D. Quindi esiste una primitiva F di f.

Si avrà quindi $\int_\Pi f(z)\mathrm{d}z = 0$. Ma per il secondo teorema di Cauchy, si dovrebbe avere $\frac{1}{2\pi i}\int_\Pi f(z)\mathrm{d}z = 1$, ovvero il valore della funzione costante 1 in z_0. Assurdo. □

Torniamo ora sulla questione del logaritmo, di cui si era accennato parlando di sviluppi in serie di Taylor. Data una funzione $f \in \mathcal{O}(D)$, si può tentare di definire $F = \operatorname{Log} f$ come una funzione tale che $e^{F(z)} = f(z)$. Quanto detto sul fatto che il logaritmo non è definito univocamente, e che in generale la sua olomorfia presenta dei problemi, si ripropone ugualmente qui. Ma vale un risultato importante:

Proposizione 4.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché ogni funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ senza zeri in D ammetta logaritmo è che D sia semplicemente connesso.*

Dim. $\Leftarrow$) Siano D un dominio semplicemente connesso, e $f \in \mathcal{O}(D)$ che non si annulla in nessun punto di D. Consideriamo l'equazione $e^F = f$: se esiste una soluzione $F \in \mathcal{O}(D)$, derivando si ha

$$f'(z) = e^{F(z)}F'(z) = f(z)F'(z)$$

cioè, F è una primitiva di f'/f.

Definiamo dunque F come una primitiva della funzione olomorfa f'/f (che esiste, perché D è semplicemente connesso), e sia $g = e^F$. Allora $g' = e^F F' = gf'/f \Rightarrow fg' - f'g \equiv 0$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fg' - g'f}{g^2} \equiv 0,$$

cioè $f/g = c$ costante diversa da 0 (n.b.: $g = e^F$ non si annulla mai).

Se $c = e^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, si ha $f = gc = e^{F+\alpha}$: dunque la funzione $F + \alpha$ è un logaritmo di f.

$\Rightarrow$) Supponiamo che ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ senza zeri ammette logaritmo. Allora, per ogni $z_0 \notin D$, è possibile definire $\operatorname{Log}(z - z_0)$; dunque esiste una primitiva olomorfa della funzione $1/(z - z_0)$. Riallacciandoci alla dimostrazione del teorema precedente, z_0 non può appartenere ad una componente connessa compatta di $\mathbb{C} \setminus D$: dunque D è semplicemente connesso. □

4.2 Teorema di Morera e principio di riflessione

Teorema 4.2 (di Morera) *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$, e sia f una funzione continua su D. Allora f è olomorfa su D se e solo se per ogni rettangolo $R \subseteq D$ si ha*

$$\int_{bR} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Dim. $\Rightarrow$) È l'enunciato del primo teorema di Cauchy.

$\Leftarrow$) Poiché il problema di dimostrare l'olomorfia di f è locale, possiamo supporre che D sia un rettangolo.

Fissato $z_0 \in D$, definiamo la funzione

$$F(z) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t + i \int_{y_0}^{y} f(x, \tau)\mathrm{d}\tau = i \int_{y_0}^{y} f(x_0, \tau)\mathrm{d}\tau + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\mathrm{d}t$$

(l'uguaglianza deriva dall'ipotesi). Si ha

$$F(x+h, y) = F(x, y) + \int_{x}^{x+h} f(t, y)\mathrm{d}t \qquad F(x, y+h) = F(x, y) + i \int_{y}^{y+h} f(x, \tau)\mathrm{d}\tau.$$

Ne segue, applicando il teorema del valor medio, e facendo il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ considerando la continuità di F,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(x, y); \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = i f(x, y).$$

Quindi F risulta $\mathbb{R}$-differenziabile ed inoltre $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(x, y) = 0$, cioè F è olomorfa su D. Ma allora lo è anche $\frac{\partial F}{\partial z} = f$. □

Un'applicazione del teorema di Morera è il principio di riflessione di Schwarz: dato un dominio D contenuto nel semipiano $\{y \geq 0\}$, definiamo

$$\mathrm{Rifl}(D) = \{z \in \mathbb{C} | \bar{z} \in D\}$$

il dominio ottenuto da D per "riflessione" rispetto all'asse delle x.

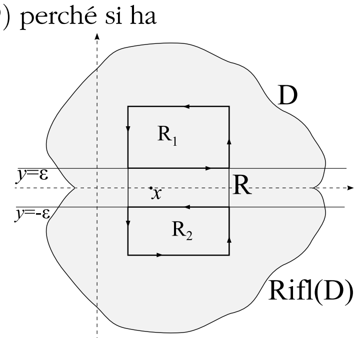
Teorema 4.3 (Principio di riflessione di Schwarz) *Sia $D \subseteq \{y \geq 0\}$, tale che $A = \bar{D} \cap \{y = 0\} \neq \varnothing$, e sia $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$; supponiamo che, se $z \in A$, allora $f(z) \in \mathbb{R}$. Allora, detta*

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \bar{D} \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{se } z \in \overline{\mathrm{Rifl}(D)} \end{cases}$$

F è olomorfa su $\tilde{D} = D \cup \mathrm{Rifl}(D) \cup (\bar{D} \cap \{y = 0\})$.

Dim. F è chiaramente olomorfa su D; lo è inoltre su $\mathrm{Rifl}(D)$ perché si ha

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \overline{f(\bar{z})}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z} = 0.$$



Basta quindi verificare che F è olomorfa in un intorno di $x \in \tilde{D} \cap \{y = 0\}$. Consideriamo un qualunque rettangolo R tale che $x \in R \subseteq \tilde{D}$. Allora, detti $R_1 = R \cap \{y \geq \varepsilon\}$ e $R_2 = R \cap \{y \leq -\varepsilon\}$, si ha

$$\int_{bR} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b(R \cap \{|y| \geq \varepsilon\})} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{bR_1} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{bR_2} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta \right] = 0.$$

La tesi segue dal teorema di Morera. □

Osservazione. Con una dimostrazione analoga, si ottiene che, presi due domini $D_1 \subseteq \{y > 0\}$ e $D_2 \subseteq \{y < 0\}$, con $A = \bar{D}_1 \cap \{y = 0\} = \bar{D}_2 \cap \{y = 0\} \neq \varnothing$, e due funzioni f_1 e f_2 olomorfe rispettivamente in D_1 e in D_2 e continue nelle rispettive chiusure tali che $f_1|_A = f_2|_A$, la funzione F definita come incollamento delle due è olomorfa su $\tilde{D} = D_1 \cup D_2 \cup A$. ◇

Lezione 5

5.1 Convergenza in $C^0(D)$

Cerchiamo di precisare la nozione di convergenza di una successione di funzioni continue: procediamo per analogia con le funzioni continue su $\mathbb{R}$.

L'insieme $C^0(K)$, dove K è un sottoinsieme chiuso e limitato (quindi compatto) di $\mathbb{R}$, su cui si definisce la norma $\|f\|_K = \max_{x\in K}|f(x)|$, è uno spazio di Banach (cioè uno spazio vettoriale normato, completo con la metrica indotta dalla distanza $d(f,g) = \|f-g\|_K$): infatti, una successione di funzioni continue in K converge uniformemente ad una funzione $\bar{f}$ (che, per un teorema, risulta essere continua in K) se e solo se è una successione di Cauchy secondo questa distanza.

Questa metrica induce una topologia (ovvero, l'insieme di tutti gli aperti) τ_K che ha per base la famiglia delle palle aperte $U(f,\varepsilon) = \{g : d(f,g) < \varepsilon\}$. Definiamo

$$\mathcal{I}(f) = \{U(f, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathcal{I}(f)$ costituirà un sistema fondamentale di intorni di f (cioè, una famiglia di intorni di f tale che comunque preso un altro intorno, esso conterrà uno di questa famiglia) numerabile; e una base di τ_K è data anche da $\bigcup_{f\in C^0(K)} \mathcal{I}(f)$.

Una successione $\{f_k\}$ sarà convergente a $\bar{f}$ se e solo se, per ogni catena U_n di aperti di $C^0(K)$ tale che $U_{n+1} \subseteq U_n\ \forall n$ e tale che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{\bar{f}\}$, si avrà che, comunque preso n, per k sufficientemente grande si ha $f_k \in U_n$. E ciò accade se e solo se, per ogni aperto $U \in \mathcal{I}(\bar{f})$, gli elementi della successione, per k abbastanza grande, si troveranno in U.

Si può definire una metrica su $C^0(\mathbb{R})$ che lo renda uno spazio metrico completo: si può richiedere che secondo questa metrica le successioni di Cauchy siano tutte e sole le successioni di funzioni che, ristrette ad ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}$, risultano di Cauchy secondo la metrica di cui sopra. In questo modo, ogni successione di Cauchy convergerà uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$, quindi la funzione limite sarà continua su ogni compatto: ma è possibile ricoprire $\mathbb{R}$ con una successione di compatti, dunque la funzione limite sarà continua su tutto $\mathbb{R}$.

Da un punto di vista topologico, si ha la convergenza di una successione di funzioni secondo questa metrica se e solo se lo si ha in una topologia di aperti $\tau_{\mathbb{R}}$ di cui una base è costituita dai sottoinsiemi di $C^0(\mathbb{R})$ del tipo

$$U(f, K, \varepsilon) = \{g : \|f-g\|_K < \varepsilon\}.$$

Si definisce una *successione esaustiva* di compatti in $\mathbb{R}$ una successione di compatti $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}\ \ \forall n$, ed $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}$: per esempio $K_n = [-n, n]$. Per ogni compatto

K di $\mathbb{R}$, esisterà un compatto della successione che lo contiene: infatti, $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_n$, ma da questo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito: se N è l'indice più alto che compare in questo ricoprimento, $K \subseteq K_N$. (N.B.: ciò non sarebbe vero se valesse semplicemente $K_n \subseteq K_{n+1}$).

Poiché per ogni compatto K esiste un K_N che lo contiene, è facile convincersi che una successione di funzioni converge uniformemente su ogni compatto se e solo se converge uniformemente su tutti i K_n.

Osserviamo che $K' \supseteq K, \varepsilon' < \varepsilon \Rightarrow U(f, K', \varepsilon') \subseteq U(f, K, \varepsilon)$. Quindi, si può definire anche qui un sistema fondamentale di intorni di f dato da

$$\mathcal{I}(f) = \{U(f, K_n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

e la topologia $\tau_{\mathbb{R}}$ avrà per base $\bigcup_{f\in C^0(K)} \mathcal{I}(f)$. Valgono le stesse considerazioni di cui sopra: una successione $\{f_k\}$ converge a $\bar{f}$ se e solo se, comunque preso $U \in \mathcal{I}(\bar{f})$, per k sufficientemente grande gli elementi della successione si trovano in U. $\tau_{\mathbb{R}}$ è detta *topologia dei compatti aperti.*

La topologia $\tau_{\mathbb{R}}$ è metricabile: data una successione esaustiva di compatti, definiamo

$$d(f, g) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Si può verificare che d è una distanza, e (anche se non è immediato) che induce la topologia $\tau_{\mathbb{R}}$ (per quanto detto, quest'ultima non dipende dalla successione esaustiva scelta).

Parliamo ora di funzioni continue su un dominio D di $\mathbb{C}$, al fine di definire una convergenza "utile" di funzioni in $C^0(D)$: se nel discorso precedente si sostituisse $\mathbb{R}$ con D, esso rimarrebbe valido. Usiamo principalmente due fatti:

- $C^0(K)$ è completo se K è un compatto di $\mathbb{C}$: ciò risulta vero se si identifica $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, e si osserva che le successioni uniformemente convergenti di funzioni $C^0(K; \mathbb{R}^2)$ hanno un limite $\bar{f}$ continuo su K, in modo del tutto analogo a quanto accade nel caso unidimensionale;
- Esistono successioni esaustive di compatti in D: è quanto ora dimostriamo.

Proposizione 5.1 *Se D è un dominio del piano complesso, esiste una successione di compatti K_n tale che $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $D = \bigcup_{n\geq 0} K_n$.*

Dim. Sia A l'insieme dei punti di D a coordinate razionali: allora $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (cioè è numerabile). Per ogni n sia $r_n > 0$ tale che $\overline{\Delta(a_n, r_n)} \subseteq D$.

Per ogni n, definiamo quindi $K_n = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{\Delta(a_i, r_i(1 - \frac{1}{n+1}))}$. Questa famiglia di compatti soddisfa le richieste della tesi. □

Con la distanza prima definita, $C^0(D)$ risulta essere uno spazio metrico completo. Da ciò discende la seguente definizione di convergenza:

Definizione 5.1 *Una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(D)$ si dice* convergente *ad una funzione $\bar{f} \in C^0(D)$ se è uniformemente convergente a $\bar{f}$ in ogni compatto $K \subseteq D$.*

Alla luce di quanto detto, la definizione risulta essere il modo più utile e naturale di definire una convergenza di successioni di funzioni continue su D.

5.2 Successioni di funzioni olomorfe

Teorema 5.1 (di Weierstrass) *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(D)$ una successione di funzioni convergente a f uniformemente su ogni compatto di D. Allora $f \in \mathcal{O}(D)$. Cioè, $\mathcal{O}(D)$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio metrico completo $C^0(D)$.*

Dim. Sappiamo già che la funzione limite $f \in C^0(D)$. Fissiamo $z \in D$, e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{\Delta(z,\varepsilon)} \subseteq D$. Allora

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta; \quad f(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Poiché $f_n \to f$ uniformemente sul compatto $b\Delta(z,\varepsilon)$, il limite può passare dentro l'integrale, da cui

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \int_{b\Delta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = 0$$

in quanto l'integrando è olomorfo in z. Dunque f è olomorfa su D. □

Osservazione. Una proprietà notevole delle funzioni olomorfe è che se una successione $\{f_n\}$ di funzioni olomorfe converge uniformemente sul bordo di un dominio D limitato, allora converge in $\mathcal{O}(D)$. Infatti, poiché la successione è di Cauchy su bD, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ν_ε tale che se $m, n > \nu_\varepsilon$ allora $\|f_m - f_n\|_{bD} < \varepsilon$. Ma allora, per il principio del massimo, si ha $\|f_m - f_n\|_{\bar{D}} < \varepsilon$. Dunque la successione converge uniformemente su ogni compatto di D. ◇

Corollario 5.1 *Se $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(D)$ è una successione di Cauchy sui compatti di D, allora, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\{f_n^{(k)}\}$ è di Cauchy sui compatti di D, e quindi convergente. Se $f_n \to f$, allora $f_n^{(k)} \to f^{(k)}\ \forall k$.*

Dim. Sia $K \subseteq D$ un compatto. Allora esiste un plurirettangolo aperto P con i lati paralleli agli assi, tale che $K \subseteq P \subseteq \bar{P} \subseteq D$. Fissato k, per la formula di Cauchy si ha

$$f_n^{(k)} = \frac{k!}{2\pi i}\int_{bP} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$

per ogni $z \in P$, $n \in \mathbb{N}$. Siano $L_1, \dots, L_p$ i lati di P. Se $\zeta \in L_j$, si ha $1/|(\zeta - z)^{k+1}| \leq 1/[\mathrm{dist}(z, L_j)]^{k+1}$ e quindi, per $z \in K$, $m, n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n^{(k+1)}(z) - f_m^{(k+1)}(z)| \leq \sum_{j=1}^{p} \left| \frac{k!}{2\pi i}\int_{L_j} \frac{f_n(\zeta) - f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \right| \leq$$

$$\frac{k!}{2\pi}\sum_{j=1}^{p} \frac{\mathrm{lungh}(L_j)\cdot\|f_n - f_m\|_{L_j}}{[\mathrm{dist}(z, L_j)]^{k+1}} \leq \frac{k!}{2\pi}\mathrm{lungh}(bP)\frac{\|f_n - f_m\|_{bP}}{[\mathrm{dist}(z, bP)]^{k+1}} \leq \frac{k!}{2\pi}\mathrm{lungh}(bP)\frac{\|f_n - f_m\|_{bP}}{[\mathrm{dist}(K, bP)]^{k+1}}$$

Poiché la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν_ε tale che per ogni $m, n \geq \nu_\varepsilon$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_{bP} < \frac{2\pi}{k!} \frac{[\text{dist}(K, bP)]^{k+1}}{\text{lungh}(bP)} \varepsilon;$$

ne segue che $\|f_n^{(k)} - f_m^{(k)}\|_K \leq \varepsilon$ per $m, n \geq \nu_\varepsilon$, cioè la successione $\{f_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Il fatto che $\lim_{n \to +\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}$ è una generalizzazione del teorema che afferma la stessa tesi per una successione di derivate prime che converge uniformemente. $\square$

Osservazione. $\mathcal{O}(D)$, oltre ad essere uno spazio metrico ha, come detto nella prima lezione, una struttura di algebra, e le due "nature" si abbinano, nel senso che le operazioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O}(D) & \mathcal{O}(D) \times \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O}(D) & \mathcal{O}(D) \times \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O}(D) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda f & (f, g) \longmapsto f + g & (f, g) \longmapsto fg \end{array}$$

sono continue rispetto alle varie topologie: le algebre di questo tipo si dicono *topologiche*.

Inoltre, $\mathcal{O}(D)$ è uno spazio metrico completo, così come $C^0(D)$: un'algebra topologica con questa proprietà è detta *algebra di Fréchet*. $\diamond$

Nell'ambito delle successioni di funzioni, un risultato importante per le applicazioni è il "teorema di compattezza" di Montel (che non dimostriamo). Ricordiamo che una successione di funzioni continue su D si dice *equilimitata sui compatti* se, dato $K \subseteq D$ compatto esiste M (dipendente da K) tale che $\|f_n\|_K \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.2 (di Montel) *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe su un dominio D, equilimitata su ogni compatto. Allora esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente in $\mathcal{O}(D)$.*

Sappiamo che, se $f \in \mathcal{O}(\Delta(z_0, \rho))$, allora sui compatti contenuti in $\Delta(z_0, \rho)$ f è limite uniforme della sua serie di Taylor $\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$, cioè f è limite uniforme di una successione di polinomi $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$.

Questo, però, non è vero in generale se $f \in \mathcal{O}(D)$ dove D è un dominio qualunque.

Esempio. Sia $D = \Delta(0, \rho) \setminus \{0\}$, $f(z) = 1/z$ (quindi f è olomorfa su D), e consideriamo una successione di polinomi $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\|P_n - f\|_{K_r} \to 0$.

Allora, dato che i polinomi sono funzioni olomorfe intere, per il principio del massimo si ha $\|P_n\|_{K_r} \geq |P_n(z)| \, \forall \, z \in \Delta(0, r)$. Quindi, poiché la successione converge su K_r, convergerà anche in $\Delta(0, r)$; ma poiché si ha $\lim_{z \to 0} |f(z)| = +\infty$, questa successione di polinomi non può convergere a f.

Vale tuttavia il seguente

Teorema 5.3 (di Runge) *Se $D \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio semplicemente connesso, $\mathbb{C}[z]$ è denso in $\mathcal{O}(D)$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Cioè, ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ è limite (uniforme sui compatti) di una successione di polinomi.*

Lezione 6

6.1 Singolarità isolate e sviluppo di Laurent

Per *singolarità isolata* di una funzione f si intende un punto in cui f non è olomorfa o non è definita, ma è olomorfa su un intorno del punto.

Teorema 6.1 (di Riemann sulle singolarità eliminabili) *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$, $a \in D$, $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\})$ tale che $|f(z)|$ è limitato in un intorno di a. Allora esiste una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ tale che $\tilde{f}|_{D\setminus\{a\}} \equiv f$ (cioè f è* estendibile olomorficamente *su D).*

Dim. Sia r tale che la chiusura del disco $\Delta = \Delta(a, r)$ è contenuta in D. Definiamo

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

e dimostriamo che coincide con f su $\Delta \setminus \{a\}$ (una volta dimostrato che ciò è vero, viene da sé che il valore assunto da $\tilde{f}$ in a è univocamente determinato dalla formula di Cauchy).

Sia $\varepsilon < r$, e sia $z \in \Delta \setminus \overline{\Delta(a, \varepsilon)}$. Allora, poiché f è olomorfa in quest'ultimo dominio, vale la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta(a,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \tilde{f}(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta(a,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

e in particolare

$$f(z) = \tilde{f}(z) - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta(a,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Nell'integrale si ha $\zeta - z = \zeta - a + a - z = \varepsilon e^{i\vartheta} + a - z$, per un opportuno ϑ. Stimiamo dunque il modulo della quantità nel limite:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{b\Delta(a,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\vartheta})}{\varepsilon e^{i\vartheta} + a - z}\varepsilon i e^{i\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right| \le$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(a+\varepsilon e^{i\vartheta})|}{|\varepsilon e^{i\vartheta} + a - z|}\varepsilon\mathrm{d}\vartheta \le \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{|\varepsilon e^{i\vartheta} + a - z|}\mathrm{d}\vartheta$$

dove $M = \sup_{\bar{\Delta}}|f| < +\infty$ per ipotesi; per $\varepsilon \to 0$, quest'ultima quantità tende anch'essa a 0. Dunque, $f(z) = \tilde{f}(z)\,\forall z \in D \setminus \{a\}$.

La dimostrazione del teorema vale anche con l'ipotesi che $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\cdot|f(a+\varepsilon e^{i\vartheta})|=0$, cioè se esiste $\alpha\in(0,1)$ tale che $|f(z)|\le M/|z-a|^{\alpha}$. $\square$

Abbiamo dimostrato che una funzione olomorfa su un disco è la somma di una serie di potenze. Questo risultato si generalizza per le funzioni olomorfe su una corona circolare:

Teorema 6.2 *Sia $C=\{z\in\mathbb{C}: r<|z-z_0|<R\}$, e sia $f\in\mathcal{O}(C)$. Allora, per ogni $z\in C$ si ha*

$$f(z)=\sum_{k\ge 0}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k\ge 1}b_k(z-z_0)^{-k}=R(z)+S(z). \qquad (6.1)$$

La serie $R(z)$ ha raggio di convergenza R, la serie $S(z)$ converge uniformemente nell'insieme $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\ge r+\varepsilon\}$ per ogni $\varepsilon>0$.

L'espressione 6.1 si chiama *sviluppo di Laurent* di f.

Dim. Siano $\varepsilon>0$ e $C_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}: r+\varepsilon\le|z-z_0|\le R-\varepsilon\}$. Poiché $f\in\mathcal{O}(C_\varepsilon)\cap C^0(\overline{C_\varepsilon})$, per ogni $z\in C_\varepsilon$ vale la formula di Cauchy:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R-\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r+\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

Se $|\zeta-z_0|=r+\varepsilon$ si ha $|\zeta-z_0|/|z-z_0|<1$; mentre se $|\zeta-z_0|=R-\varepsilon$ si ha $|z-z_0|/|\zeta-z_0|<1$. Quindi, rispettivamente:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k=\sum_{k\ge 0}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}};$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^k=-\sum_{k\ge 1}\frac{(\zeta-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k}.$$

La prima serie converge uniformemente, per $|\zeta-z_0|=R-\varepsilon$, sui compatti contenuti in C_ε; la seconda invece converge uniformemente per $|\zeta-z_0|=r+\varepsilon$ e $z\in\{|z-z_0|\ge r'\}$ con $r'>r+\varepsilon$.

Sostituendo la prima serie nel primo integrale si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R-\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{k\ge 0}a_k(z-z_0)^k$$

dove

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R-\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$

(sottintendendo che si possono scambiare la serie e l'integrale in quanto la serie è uniformemente convergente).

Sostituendo la seconda serie nel secondo integrale si ottiene, analogamente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r+\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=-\sum_{k\ge 1}b_k(z-z_0)^{-k}$$

dove

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r+\varepsilon} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1}\mathrm{d}\zeta.$$

Per il primo teorema di Cauchy, la definizione dei coefficienti a_k, b_k è indipendente da $\varepsilon > 0$, quindi per ogni $z \in C$ vale lo sviluppo di Laurent 6.1, con $R(z)$ e $S(z)$ che hanno le proprietà dette nell'enunciato. □

Osservazione. Se $f \in \mathcal{O}(C)$ è continua su $\bar{C}$, si ha

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \;\forall k \geq 0; \qquad b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1}\mathrm{d}\zeta \;\forall k \geq 1.$$

◇

6.2 Poli e singolarità essenziali

Un caso particolare in cui si può effettuare lo sviluppo di Laurent è quando, dato $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, si ha $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$. In questo caso la 6.1 vale nella corona $C = \{0 < |z - z_0| < \delta(z_0)\}$.

Le singolarità isolate di una funzione altrove olomorfa si classificano in base allo sviluppo di Laurent:

Definizione 6.1 *Sia z_0 un punto di singolarità isolata per una funzione f. z_0 si dice un* polo *se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che, nello sviluppo di Laurent di f centrato in z_0, si abbia $b_k = 0 \,\forall\, k > N$. Altrimenti, z_0 è detto* singolarità essenziale.

Definizione 6.2 *Una funzione olomorfa su un dominio D tranne dei punti di singolarità isolati che sono tutti poli, è detta* meromorfa *su D.*

Proposizione 6.1 *Sia z_0 un punto di singolarità isolata (non eliminabile) per una funzione f. Allora le proprietà che seguono sono equivalenti:*

1. *z_0 è un polo;*
2. *esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $(z - z_0)^n f(z)$ si estende olomorficamente in un intorno di z_0;*
3. $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Dim. *1) ⇒ 2)* Se z_0 è un polo, si può scrivere $f(z) = R(z) + b_1/(z - z_0) + b_2/(z - z_0)^2 + \cdots + b_N/(z - z_0)^N$. Sia $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$: si ha $\lim_{z\to z_0} g(z) = b_N$. Quindi, la funzione $g(z)$ è limitata in modulo in un intorno di z_0, e, per il teorema di Riemann, si estende ad una funzione olomorfa in un intorno di z_0.

2) ⇒ 3) Sia $h(z)$ la funzione olomorfa in un intorno di z_0 tale che, fuori da z_0, si abbia $h(z) = (z - z_0)^n f(z)$. Per la sviluppabilità locale in serie di Taylor, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $h(z) = (z - z_0)^N k(z)$, dove k è una funzione olomorfa in un intorno di z_0 e tale che $k(z_0) \neq 0$. Dunque, per $z \neq z_0$, si ha $f(z) = (z - z_0)^{N-n} k(z)$. Se fosse $N - n \geq 0$, z_0 è un punto di singolarità eliminabile per f, in quanto essa si estenderebbe banalmente in z_0. Dunque, $N - n < 0$: da ciò segue che $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

3) ⇒ 1) Comunque preso un $c > 0$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, se $|z - z_0| < \varepsilon$, allora $|f(z)| > c$. Nel disco $z \in \Delta(z_0, \varepsilon)$, allora, si ha $1/|f(z)| < 1/c$. Dunque la funzione $1/f(z)$ è limitata in un intorno di z_0, dunque si estende ad una h olomorfa, $h(z) = (z - z_0)^N k(z)$, con $N \in \mathbb{N}$, k olomorfa in un intorno di z_0, e tale che $k(z_0) \neq 0$, e dunque $k(z) \neq 0$ in un intorno di z_0. Allora in questo intorno, per $z \neq z_0$, $f(z) = (z - z_0)^{-N}/k(z)$, e la funzione $1/k(z)$ è olomorfa e sviluppabile in serie di Taylor; dunque $f(z) = \left[\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n\right](z - z_0)^{-N} = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^{n-N}$, e z_0 è un polo per f. □

Proposizione 6.2 *z_0 è un punto di singolarità essenziale per f se e solo se*

$$\liminf_{z\to z_0} |f(z)| = 0; \qquad \limsup_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Dim. ⇐) Se z_0 fosse un polo, si avrebbe $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.
⇒) Sia z_0 un punto di singolarità essenziale per f; supponiamo per assurdo $\liminf_{z\to z_0} |f(z)| = l > 0$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $l - \varepsilon > 0$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(z)| > l - \varepsilon$ per $|z - z_0| < \delta$: dunque in questo intorno di z_0, per $z \neq z_0$ si ha $|1/f(z)| < 1/(l - \varepsilon)$: come sopra, $1/f$ si estende ad una funzione $(z - z_0)^n h(z)$, con h olomorfa in un intorno di z_0 ed $h(z_0) \neq 0$. Dunque $f(z) = (z - z_0)^{-n}/h(z)$, quindi z_0 risulta essere un polo.

Supponiamo invece $\limsup_{z\to z_0} |f(z)| = L < +\infty$. Allora, preso $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < L + \varepsilon$: essendo f limitata in un intorno di z_0, tale punto rappresenta una singolarità eliminabile: assurdo. □

Osservazioni.

1. Siano $f, g \in \mathcal{O}(\Delta(z_0, \varepsilon))$. Allora esistono $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathcal{O}(\Delta(z_0, \varepsilon))$ con $a(z_0), b(z_0) \neq 0$, tali che $f(z) = (z - z_0)^m a(z)$, e $g(z) = (z - z_0)^n b(z)$. Dunque
$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)^m a(z)}{(z - z_0)^n b(z)} = (z - z_0)^{m-n} c(z)$$
con c olomorfa in un intorno di z_0. Quindi f/g è una funzione olomorfa in un intorno di z_0, oppure lo è in un intorno bucato e in z_0 ha un polo.

2. Sia z_0 una singolarità essenziale per f, e fissiamo un $a \in (0, +\infty)$. Dal teorema abbiamo che, in ogni disco bucato U centrato in z_0 e sufficientemente piccolo, esistono un z_1 tale che $|f(z_1)| < a$, e un z_2 tale che $|f(z_2)| > a$. Allora $|f|$, essendo una funzione continua su U che è connesso, assume in qualche punto anche il valore a: cioè, assume tutti i valori dell'intervallo $(0, +\infty)$. Non è detto invece che assuma il valore 0: un esempio è dato dalla funzione $f(z) = e^{1/z}$, che presenta una singolarità essenziale in 0.

3. Se z_0 è un punto singolare essenziale per f, dato un qualunque numero complesso w, $g(z) = f(z) - w$ ha ancora una singolarità essenziale in z_0, dunque $\liminf_{z\to z_0} |f(z) - w| = 0$. Cioè, comunque presi $\varepsilon, \delta > 0$, esiste un z' tale che $|z' - z_0| < \delta$ e $|f(z') - w| < \varepsilon$. questa proprietà è nota come *teorema di Casorati*.

Il risultato di Casorati, in realtà, è precisato da un importante teorema:

Teorema 6.3 (di Picard) *Sia z_0 un punto singolare essenziale per f olomorfa in un suo intorno bucato. Allora, nell'intorno di z_0, f assume tutti i valori di $\mathbb{C}$ escluso al più uno.*

◇

6.3 Residui

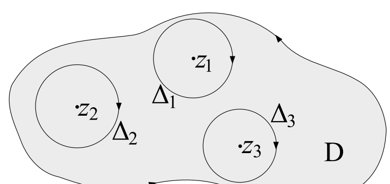
Definizione 6.3 *$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$, è detto* residuo *di f in z_0 e si indica con* $\mathrm{Res}(f;z_0)$.

Se f è olomorfa in z_0 il residuo è nullo, ma non vale il viceversa (per esempio, $f(z) = 1/z^2$ ha residuo nullo in 0). Se f è olomorfa nella corona $C = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ e continua nella chiusura, dal primo teorema di Cauchy abbiamo che la definizione di residuo è indipendente dalla scelta di $r \in [R_1, R_2]$.

Proposizione 6.3 (Formula dei residui) *Sia D un dominio limitato di $\mathbb{C}$ con frontiera bD regolare, e sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$, con $z_j \in D\ \forall j$; supponiamo inoltre f continua su $\bar{D} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f;z_j).$$

Dim. Per ogni $j = 1, \dots, k$ sia $\varepsilon_j > 0$ tale che $\varepsilon_j < \min\{\mathrm{dist}(z_j, bD), \mathrm{dist}(z_j, z_l) : l \neq j\}$, e sia $\Delta_j = \Delta(z_j, \varepsilon_j)$.



Sia quindi $D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \bar{\Delta}_j$. Poiché D_ε è un dominio limitato tale che f vi è olomorfa, e continua nella chiusura, dalla formula di Cauchy abbiamo

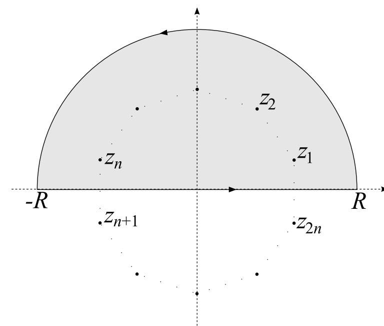
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD_\varepsilon} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{bD} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta_j} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_j).$$

□

Esempio. La formula dei residui è di aiuto nel calcolo di alcuni integrali reali, per esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x.$$

L'integrando si estende sui complessi ad una funzione $f(z) = 1/(1 + z^{2n})$, che è definita su $\mathbb{C}$ meno gli zeri del denominatore, ed è olomorfa nel suo dominio. Gli zeri del denominatore sono singolarità isolate per f, in quanto essi sono le radici $2n$-esime complesse di -1. Dato $R > 1$, definiamo l'arco di circonferenza $\Gamma(R) = \{|z| = R, \Im z \geq 0\}$. Allora, applicando la formula dei residui sul semicerchio indicato in figura,



$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma(R)} \frac{1}{1+z^{2n}}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_j).$$

Osserviamo inoltre che

$$\left|\int_{\Gamma(R)} \frac{1}{1+z^{2n}}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{Re^{i\vartheta}}{1+Re^{2in\vartheta}}\mathrm{d}\vartheta\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{|1+Re^{2in\vartheta}|}\mathrm{d}\vartheta \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^{2n}-1}\mathrm{d}\vartheta$$

e quest'ultima quantità tende a 0 per $R \to +\infty$.

Dunque, il calcolo dell'integrale si è ricondotto a quello dei residui di f nelle radici $2n$-esime di -1, che non è molto complicato.

Il teorema che segue è una conseguenza della formula dei residui. Data una funzione f avente una singolarità polare isolata in z_0, consideriamo il suo sviluppo di Laurent 6.1: si dice *ordine del polo* il massimo k tale che $b_k \neq 0$. Analogamente, se f non ha un polo in z_0, ma è olomorfa e vi ha uno zero, si dice *ordine* o *molteplicità dello zero* il minimo k tale che $a_k \neq 0$ nello sviluppo di Laurent (o di Taylor) di f in un intorno di z_0.

Teorema 6.4 (Indicatore logaritmico) *Siano D un dominio limitato di $\mathbb{C}$, e sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\})$, con $z_j \in D\,\forall j$, inoltre supponiamo f continua su $\bar{D} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ e mai nulla su bD.*

Supponiamo che gli z_j siano tutti poli per f, il cui rispettivo ordine è m_j. Detti inoltre $w_0, \ldots, w_h$ gli zeri di f siano $n_1, \ldots, n_h$ i rispettivi ordini. Allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^{h} n_j - \sum_{j=1}^{k} m_j.$$

Dim. Prima della dimostrazione del teorema, una precisazione sul fatto che, poiché f non ha zeri su bD, l'insieme $Z(f)$ degli zeri di f in D è finito. Infatti, se per assurdo fosse infinito, si potrebbe definire una successione $\{w_j\} \subseteq Z(f)$ senza sottosuccessioni costanti. Essendo D limitato, esisterà una sottosuccessione convergente ad un $w \in \bar{D}$, con $w \neq w_j\ \forall j$: ma, per continuità, si avrebbe $f(w) = 0$: allora w sarebbe un punto di accumulazione per gli zeri di f in D, e in quanto tale non può trovarsi né in D né in bD, assurdo.

I punti di singolarità per la funzione $g = f'/f$ sono da ricercarsi tra gli z_j e i w_j; altrove, infatti, f' esiste ed è olomorfa, mentre f non si annulla, dunque g è olomorfa. Quindi, per la formula dei residui,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^{h} \mathrm{Res}(g; w_j) + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(g; z_j).$$

Calcoliamo i singoli termini della sommatoria. Per ogni $j = 1, \dots, h$ esiste un disco $U_j \subseteq D$, centrato in w_j, in cui vale lo sviluppo di Taylor di f in w_j, dal quale si ricava l'uguaglianza, valida localmente, $f(z) = (z - w_j)^{n_j}\varphi(z)$, con φ olomorfa su U_j, continua su $\bar{U}_j$ e tale che $\varphi \neq 0$ in U_j (basterà prendere il disco sufficientemente piccolo). Dunque in U_j si ha $f'(z) = n_j(z - w_j)^{n_j - 1}\varphi(z) + (z - w_j)^{n_j}\varphi'(z)$, da cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{z - w_j} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Dunque w_j è un polo di ordine 1 per g, e si ha

$$\mathrm{Res}(g; w_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{bU_j}\left[\frac{n_j}{\zeta - w_j} + \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}\right]\mathrm{d}\zeta = n_j$$

per la formula integrale di Cauchy.

Per ogni $j = 1, \dots, k$, esiste un disco $V_j \subseteq D$, centrato in z_j, in cui (escludendo z_j) vale lo sviluppo di Laurent di f centrato in z_j, dunque vale localmente l'uguaglianza $f(z) = (z - z_j)^{-m_j}\psi(z)$, con ψ olomorfa su V_j, continua su $\bar{V}_j$ e tale che $\psi \neq 0$ in V_j (come sopra, basterà che V_j abbia raggio sufficientemente piccolo). Ma allora, per $z \in V_j \setminus \{z_j\}$, vale $f'(z) = -m_j(z - z_j)^{-m_j - 1}\psi(z) + (z - z_j)^{-m_j}\psi'(z)$, da cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m_j}{z - w_j} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

quindi, analogamente al caso precedente, si ha che z_j è un polo di ordine 1 per g con residuo $-m_j$. □

Osservazione. Il motivo per cui questo teorema è detto dell'"indicatore logaritmico" è che, nell'intorno di un punto z non singolare per la funzione f'/f, essa rappresenta la derivata di una determinazione della funzione $\mathrm{Log}\, f(z)$. ◇

Altra conseguenza della formula dei residui è il seguente:

Teorema 6.5 (di Rouché) *Sia D un dominio limitato di $\mathbb{C}$ con frontiera regolare, e siano $f, g \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\bar{D})$ tali che $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in bD$. Allora le funzioni f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in D, contati ciascuno secondo la rispettiva molteplicità.*

Dim. Poiché $|g(z)| < |f(z)|$ su bD, f non ha zeri su bD, dunque gli zeri di f in D sono in numero finito (vedi dim. precedente); questi costituiscono i punti di singolarità per g/f, e sono tutti dei poli.

Siano n il numero degli zeri di f in D, m il numero degli zeri di $f + g$, entrambi contati con molteplicità.

Siamo nelle ipotesi per applicare il teorema dell'indicatore logaritmico, dal quale otteniamo

$$n - m = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD}\frac{f'}{f}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{bD}\frac{f' + g'}{f + g}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD}\frac{f'(f + g) - f(f' + g')}{f(f + g)}\mathrm{d}\zeta$$

(ove si sottintende $f = f(\zeta)$ e simili).

Detto $h = g/f$, abbiamo

$$n - m = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{f'f(1+h) - ff' - fg'}{f^2(1+h)}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{f'h - g'}{f(1+h)}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{h'}{1+h}\mathrm{d}\zeta.$$

Poiché si ha $\|h\|_{bD} < 1$, si può sviluppare in serie $\frac{1}{1+h} = \sum_{j\geq 0}(-h)^j$; poiché abbiamo convergenza uniforme della serie su bD, possiamo portare l'integrale dentro la serie, ottenendo

$$n - m = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j\geq 0}(-1)^j \int_{bD} h'h^j \,\mathrm{d}\zeta$$

e per ogni j si ha $\int_{bD} h'h^j \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{j+1}\int_{bD} \mathrm{d}(h^{j+1}) = 0$ perché bD è una curva chiusa. Pertanto, $n = m$, c.v.d. □

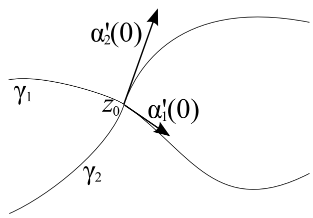
Esempio. Vediamo come il teorema di Rouché può essere usato per fornire un'altra dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. Detto $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, siano $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} g^{n-1}$.

Esiste un $R > 0$ tale che $|g(z)| < |f(z)|$ per $|z| \geq R$. Dunque, applicando il teorema, in $\Delta(0, R)$, f e $f + g = P$ hanno lo stesso numero di zeri: f ne ha banalmente n, dunque ne ha altrettanti P. Il numero di zeri rimane lo stesso anche facendo tendere $R \to +\infty$.

Lezione 7

7.1 Proprietà geometriche delle funzioni olomorfe

Dato un numero complesso $z = x + iy$, indichiamo con $\boldsymbol{z}$ il vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Con questa notazione, se $z, w \in \mathbb{C}$, il prodotto scalare $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w}$ è uguale a $\Re(z\bar{w})$.



Consideriamo un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ e due curve regolari γ_1 e γ_2 per z_0 di equazioni parametriche rispettive

$$z(t) = \alpha_1(t), \quad z(t) = \alpha_2(t) \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = z_0, \quad \alpha_1'(0) \neq 0, \alpha_2'(0) \neq 0.$$

L'angolo ϑ formato da γ_1 e γ_2 in z_0 è per definizione quello formato da $\boldsymbol{\alpha}_1'(0)$ e $\boldsymbol{\alpha}_2'(0)$, dove indichiamo

$$\boldsymbol{\alpha}_j'(0) = \left(\Re\frac{d\alpha_j}{dt}(0), \Im\frac{d\alpha_j}{dt}(0)\right), \qquad j = 1, 2.$$

Si ha

$$\cos\vartheta = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1'(0) \cdot \boldsymbol{\alpha}_2'(0)}{|\alpha_1'(0)||\alpha_2'(0)|} = \frac{\Re[\alpha_1'(0)\overline{\alpha_2'(0)}]}{|\alpha_1'(0)||\alpha_2'(0)|}.$$

Definizione 7.1 *Un'applicazione $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice* conforme *se lascia invariati gli angoli tra curve.*

Proposizione 7.1 *Sia f una funzione olomorfa nell'intorno di z_0 tale che $f'(z_0) \neq 0$. Allora f preserva gli angoli tra curve intersecantisi in z_0.*

Dim. Sia $w_0 = f(z_0)$. f trasforma γ_1 e γ_2 in due cammini regolari η_1 ed η_2 passanti per w_0, di equazione parametrica rispettivamente

$$w(t) = \beta_1(t) = f(\alpha_1(t)), \quad w(t) = \beta_2(t) = f(\alpha_2(t)).$$

Se ψ è l'angolo formato da η_1 ed η_2 in w_0, si ha

$$\cos\psi = \frac{\Re[\beta_1'(0)\overline{\beta_2'(0)}]}{|\beta_1'(0)||\beta_2'(0)|}.$$

Poichè f è olomorfa,

$$\beta_1'(t) = f'(\alpha_1(t))\alpha_1'(t) \qquad \beta_2'(t) = f'(\alpha_2(t))\alpha_2'(t)$$

da cui segue

$$\cos\psi = \frac{\Re[f'(z_0)\alpha_1'(0)\overline{f'(z_0)\alpha_2'(0)}]}{|f'(z_0)\alpha_1'(0)||f'(z_0)\alpha_2'(0)|} = \cos\vartheta.$$

□

Proposizione 7.2 *Ogni funzione $f \in \mathcal{O}(D)$ non costante è aperta (cioè, le immagini degli insiemi aperti sono aperte).*

Dim. Supponiamo per assurdo che esista un aperto U tale che $U \subseteq D$ e che $f(U)$ non è aperto in $\mathbb{C}$; sia $z' \in U$ tale che $w_0 = f(z')$ non è interno a $f(U)$.

Consideriamo un disco Δ centrato in z' di raggio abbastanza piccolo affinché $\overline{\Delta} \subseteq U$ e l'equazione $f(z) - w_0 = 0$ abbia z' come unica soluzione in $\overline{\Delta}$ (è possibile, perché gli zeri di una funzione olomorfa sono discreti). w_0 non è un punto interno neanche per $f(\Delta)$, perché questo è contenuto in $f(U)$.

Poiché $b\Delta$ è un compatto di D, $\gamma = f(b\Delta)$ è anch'esso compatto; e $w_0 \notin \gamma$, perché altrimenti esisterebbe $z'' \in b\Delta$ tale che $f(z'') - w_0 = 0$, contro le nostre ipotesi. Allora $\text{dist}(w_0, \gamma) > 0$.

Poiché w_0 non è interno a $f(\Delta)$, esiste una successione $w_n \to w_0$, con $w_n \notin f(\Delta)\ \forall n$. Sia $g_n(z) = 1/(f(z) - w_n)$: $g_n \in \mathcal{O}(\Delta) \cap C^0(\overline{\Delta})$. In particolare osserviamo che il denominatore non può annullarsi per $z \in \overline{\Delta}$: poiché $\text{dist}(w_0, \gamma) > 0$, definitivamente $w_n \notin \gamma$: dunque, a meno di troncare i primi termini della successione, $f^{-1}(\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \cap \overline{\Delta} = \varnothing$.

Sia $z \in b\Delta$. Allora

$$|g_n(z) - g_m(z)| \le \frac{|w_n - w_m|}{|f(z) - w_n||f(z) - w_m|} \le \frac{|w_n - w_m|}{\text{dist}(w_n, \gamma)\,\text{dist}(w_m, \gamma)} \to 0$$

(in quanto il denominatore tende a $[\text{dist}(w_0, \gamma)]^2 \neq 0$). Dunque la successione $\{g_n\}$ converge uniformemente su $b\Delta$ (e quindi su $\overline{\Delta}$, per il principio del massimo) ad una funzione $g \in \mathcal{O}(\Delta) \cap C^0(\overline{\Delta})$. Ma in $\overline{\Delta}$ vale l'uguaglianza $(f - w_n)g_n = 1$, che al limite dà $(f - w_0)g = 1$. Ciò è assurdo perché $f(z') - w_0 = 0$. □

Non si è precisato se per aperto si intende aperto in D o in $\mathbb{C}$, perché, se $U \subseteq D$, allora U è aperto in $\mathbb{C}$ se e solo se lo è in D.

L'immagine di un dominio di $\mathbb{C}$ tramite una funzione olomorfa non costante, dunque, è ancora un dominio (non solo è aperto, ma è connesso perché le funzioni continue mandano connessi in connessi).

7.2 Invertibilità locale

Ricordiamo il principale risultato riguardante l'invertibilità locale in $\mathbb{R}^n$:

Teorema 7.1 *Siano U, V aperti in $\mathbb{R}^n$, e sia $f : U \to V$ una funzione di classe C^∞. Allora, dato $\boldsymbol{x}_0 \in U$, esiste un intorno W di $\boldsymbol{x}_0$ tale che $f|_W$ ammette inversa di classe C^∞ se e soltanto se, detto $J(\boldsymbol{x})$ lo jacobiano di f, si ha $\det J(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$. Lo jacobiano di $(f|_W)^{-1}$ nel punto $f(\boldsymbol{x}_0)$ è dato dalla matrice $[J(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}$.*

Se lo jacobiano di f è invertibile in un punto $\boldsymbol{x}_0$, lo è anche in un suo intorno U (infatti la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto J(\boldsymbol{x})$ è continua, e il sottospazio delle matrici invertibili in $\mathbb{R}^{n \times n}$ è aperto, in quanto controimmagine dell'aperto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tramite la funzione continua det). E se ciò vale, si dice che f è un *diffeomorfismo locale* in un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ (da U a $f(U)$). Analogamente:

Definizione 7.2 *Una funzione olomorfa $f : D \to f(D)$ si dice* biolomorfismo locale *in un intorno di un punto z_0 se è localmente invertibile con inversa olomorfa.*

Se f ammette un'inversa olomorfa globale $f^{-1} : f(D) \to D$, si dice un biolomorfismo *da D a $f(D)$.*

I biolomorfismi sono dei particolari *omeomorfismi* da D a $f(D)$.

Dal teorema generale per le funzioni su $\mathbb{R}^n$ abbiamo le condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione olomorfa sia un biolomorfismo locale:

Proposizione 7.3 *Una funzione olomorfa f è localmente invertibile (come funzione olomorfa) in un punto z_0 se e soltanto se $f'(z_0) \neq 0$.*

Dim. Identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$: siano $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, e sia $z_0 = (x_0, y_0)$. Allora

$$\det J(x_0, y_0) = (u_x v_y - u_y v_x)|_{(x_0,y_0)} = (u_x^2 + v_x^2)|_{(x_0,y_0)} = |f'(z_0)|^2$$

dove la seconda uguaglianza è data dalle condizioni di Cauchy-Riemann su u e v.

Dunque, f ammette in z_0 un'inversa locale g di classe C^∞ se e soltanto se $f'(z_0) \neq 0$. Dimostriamo ora che, se questa inversa esiste, è localmente olomorfa. Siano U e V intorni di z_0 e di $f(z_0)$ rispettivamente tali che $f(U) = V$, $g(V) = U$ e $f|_U, g|_V$ sono una l'inversa dell'altra.

Allora, per $z \in U$, si ha $g(f(z)) = z \Rightarrow \frac{\partial g \circ f}{\partial \bar{z}} = 0$ e $\frac{\partial g \circ f}{\partial z} = 1$. Detto w l'argomento di g, dalla prima uguaglianza tramite le regole di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$$

e poiché $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, mentre $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \neq 0$ per l'invertibilità, otteniamo $\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} = 0$, cioè g olomorfa. □

Ma valgono anche i seguenti:

Corollario 7.1 *Sia $f : U \to V$ olomorfa, e sia $z_0 \in U$ tale che f ammetta una funzione inversa locale g continua in un intorno W di $f(z_0)$. Allora g è olomorfa.*

Dim. Fissato $z_0 \in f^{-1}(W) \subseteq U$, se $f'(z_0) \neq 0$ sappiamo dal teorema precedente che g è localmente olomorfa in un intorno di $f(z_0)$. Rimane da verificare che non può essere $f'(z_0) = 0$.

In questo caso, g è olomorfa in un intorno bucato di $f(z_0)$, in quanto z_0, essendo uno zero per f', che non può essere identicamente nulla, è isolato. Ma g è anche continua in z_0, quindi in particolare è limitata: per il teorema di Riemann, si estende ad una funzione olomorfa anche in un intorno di $f(z_0)$, che dovrà quindi coincidere con g stessa: assurdo.

Dunque g, essendo olomorfa in un intorno di ogni punto di W, è olomorfa su tutto W. □

Corollario 7.2 *Se f olomorfa è localmente iniettiva in z_0, ammette un'inversa locale olomorfa.*

Dim. Infatti, esiste un intorno di $f(z_0)$ in cui si può definire una funzione inversa g; poiché le funzioni olomorfe sono aperte, g sarà continua, in quanto la controimmagine di ogni aperto tramite g sarà un aperto. Siamo quindi nelle ipotesi del corollario precedente. □

Le asserzioni precedenti hanno carattere locale, ma si può facilmente dimostrare una versione globale: sia $f : D \to D'$ olomorfa e surgettiva. Allora

- se f ammette un'inversa $g : D' \to D$ continua, g è olomorfa;
- se f è bigettiva, la sua inversa $g : D' \to D$ è olomorfa.

Seguono due risultati che non c'entrano molto con l'invertibilità.

Teorema 7.2 (di Cartan) *Sia D un dominio limitato di $\mathbb{C}$, e sia $f : D \to D$ olomorfa. Se esiste $z_0 \in D$ tale che $f(z_0) = z_0$, $f'(z_0) = 1$, allora $f = Id_D$.*

Dim. A meno di traslazioni, possiamo supporre $z_0 = f(z_0) = 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $F_n(z) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$. Ogni F_n va da D a D, dunque la famiglia delle F_n è equilimitata: sia $M > 0$ tale che $|F_n(z)| \leq M \ \forall\, n \in \mathbb{N}, z \in D$.

Supponiamo per assurdo che lo sviluppo di Taylor di f in un intorno di 0 sia $f(z) = z + a_k z^k + \ldots$, con $a_k \neq 0$. Allora lo sviluppo di Taylor di F_n è del tipo $F_n(z) = z + n a_k z^k + \ldots$.

Fissato $R \leq \text{dist}(0, bD)$, dalle stime di Cauchy abbiamo $n|a_k| \leq Mk!/R^k$ per ogni n, dunque $a_k = 0$, assurdo. Dunque $f(z) = z$ in un intorno di 0; e, per il principio d'identità, si avrà $f(z) = z$ su tutto D. □

Osserviamo che la limitatezza di f era esplicitamente nelle ipotesi del teorema ed era necessaria per la dimostrazione.

Proposizione 7.4 *Sia data una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(D)$ convergente uniformemente sui compatti di D ad una funzione f; supponiamo $f_n(z) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, z \in D$. Allora $f \equiv 0$ oppure $1/f \in \mathcal{O}(D)$.*

Dim. Sappiamo già che $f \in \mathcal{O}(D)$. Supponiamo $f \not\equiv 0$, e consideriamo un disco $\Delta(z_0, \varepsilon) \subseteq D$ tale che f non abbia zeri sul bordo $\gamma(\varepsilon)$. Allora, dalla formula dell'indicatore logaritmico,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{f_n'(\zeta)}{f_n(\zeta)} \mathrm{d}\zeta = \#\text{zeri di } f_n = 0$$

ma l'integrando converge uniformemente sul compatto $\gamma(\varepsilon)$ a f'/f, dunque è lecito passare al limite: $\int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta = 0$.

Quindi, ancora per la formula dell'indicatore logaritmico, nel disco non ci sono zeri per f. Data l'arbitrarietà nella scelta del disco, f non si annulla in nessun punto di D; dunque $1/f \in \mathcal{O}(D)$. □

Lezione 8

8.1 Gruppi di automorfismi

Definizione 8.1 *Dato D un dominio di $\mathbb{C}$, una funzione olomorfa bigettiva $f : D \to D$ si dice un* automorfismo *di D.*

L'insieme degli automorfismi di D si indica con $\mathrm{Aut}(D)$, ed è un gruppo con l'operazione di composizione di funzioni. In questa sezione ci proponiamo di descrivere i gruppi di automorfismi dei domini più comuni: $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ed il disco unitario.

Proposizione 8.1 *Gli automorfismi di $\mathbb{C}$ sono tutte e sole le applicazioni lineari $f(z) = az + b$, con $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.*

Dim. È chiaro che le applicazioni della forma data sono degli automorfismi.

D'altra parte, sia $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$: essendo $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, si esprime come sviluppo in serie di Taylor:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k.$$

Se $\{z_n\}$ è una successione divergente in $\mathbb{C}$, $\{f(z_n)\}$ dovrà essere ancora una successione divergente: se ammettesse un limite $l \in \mathbb{C}$, allora, essendo f^{-1} una funzione continua, si avrebbe $z_n \to f^{-1}(l)$, assurdo. Dunque, $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$: se così non fosse, esisterebbe una successione $\{z_n\}$ tale che $|z_n| \to +\infty$ (quindi divergente) e che $|f(z_n)|$ tende a un limite finito; ma allora, poiché $f(z_n)$ si trova definitivamente nella chiusura di una corona circolare, dunque in un compatto, esisterebbe una sottosuccessione $\{f(z_{n_k})\}$ convergente in $\mathbb{C}$, assurdo.

Dunque, posto $w = 1/z$, consideriamo l'applicazione $g(w) = f(1/w) = \sum_{k \geq 0} a_k/w^k$, che è olomorfa per $w \neq 0$ (in quanto la serie è convergente). Per quanto detto, $\lim_{w \to 0} |g(w)| = \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$; dunque g ha una singolarità polare in 0. Ma allora, poiché g è già scritta nel suo sviluppo di Laurent in un intorno di 0, dovrà esistere un N tale che $a_n = 0 \forall n > N$.

Quindi, g è un polinomio in $1/w$, e f è un polinomio in z, che non può avere radici distinte, altrimenti non sarebbe una funzione iniettiva; né può avere una radice multipla, altrimenti la condividerebbe con la derivata; ma essendo f un biolomorfismo, la derivata non può annullarsi. Dunque $\deg f = 1$, da cui la tesi. $\square$

Si può dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \rtimes_\phi \mathbb{C}^*$, dove $\mathbb{C}$ è da intendersi come gruppo additivo, $\mathbb{C}^*$ come gruppo moltiplicativo, e l'applicazione ϕ è tale che $\phi(a) = \phi_a$ dove ϕ_a è l'automorfismo di gruppo di $\mathbb{C}$ che associa $z \mapsto az$. L'isomorfismo è dato dall'identificazione di $f(z) = az + b$ con la coppia (b, a).

Proposizione 8.2 *Gli automorfismi di $\mathbb{C}^*$ sono tutte e sole le applicazioni della forma $f(z) = az$ oppure $f(z) = a/z$, con $a \in \mathbb{C}^*$.*

Dim. Anche stavolta, che le suddette applicazioni siano degli automorfismi è chiaro.

Consideriamo un automorfismo f di $\mathbb{C}^*$. Imitando quanto detto sopra, se $\{z_n\}$ è una successione non convergente in $\mathbb{C}^*$ (il che può voler dire anche che $z_n \to 0$), lo sarà anche $\{f(z_n)\}$. In particolare, se $z_n \to 0$, $\{f(z_n)\}$ non ammette limite in $\mathbb{C}^*$.

Quindi, 0 è al più una singolarità polare per f: supponiamo per assurdo che sia una singolarità essenziale. Allora, come detto in precedenza sulle singolarità essenziali, fissato un $l > 0$, si può trovare una successione $w_n \to 0$ tale che $|f(w_n)| = l\ \forall n$. La successione dei $f(w_n)$ quindi è limitata, ed ammette una sottosuccessione convergente ad un $L \in \mathbb{C}^*$ (tale che $|L| = l$), assurdo. Detta come sopra $g(w) = f(1/w)$, anche g è un automorfismo di $\mathbb{C}^*$, e il discorso si ripete. Dunque, nello sviluppo di Laurent 6.1 di f (che converge a f su tutto $\mathbb{C}^*$), sia gli a_k che i b_k sono definitivamente nulli, dunque f è un polinomio, o un polinomio diviso una potenza naturale di z. In ogni caso si può scrivere

$$f(z) = az^m \prod_{j=1}^{J} (z - \alpha_j) \qquad m \in \mathbb{Z},\ a \neq 0,\ \alpha_j \neq 0\,\forall j = 1, \ldots, J.$$

Tuttavia, non devono esistere valori di $\mathbb{C}^*$ per cui f si annulla, dunque $J = 0$; e non può essere $|m| > 1$ altrimenti, detta ζ_m una radice $|m|$-esima primitiva dell'unità, si ha $f(\zeta_m) = f(\zeta_m^2) = a$, ed f non sarebbe iniettiva; ovviamente non può essere neanche $m = 0$. Dunque abbiamo la tesi. □

È facile dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Prima di descrivere gli automorfismi del disco unitario $\mathbb{D} = \Delta(0, 1)$, ci serve il seguente

Lemma 8.1 (di Schwarz) *Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora*

1. $|f(z)| \leq |z|\ \forall z \in \mathbb{D}$;
2. $|f'(0)| \leq 1$;
3. *se* $\exists\, z_0 \neq 0$ *tale che* $|f(z_0)| = |z_0|$, *oppure* $|f'(0)| = 1$, *allora esiste* $\vartheta \in [0, 2\pi]$ *tale che* $f(z) = e^{i\vartheta} z$.

Dim. *1*. Per $z = 0$ è l'ipotesi. Sia $g(z) = f(z)/z$; g si estende olomorficamente a 0, perché la serie di Taylor di f non ha termine costante. Dunque $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$.

Fissato $\varepsilon \in (0, 1)$, per il principio del massimo sul disco chiuso $D(\varepsilon) = \Delta(0, 1 - \varepsilon)$:

$$\max_{D(\varepsilon)} \frac{|f(z)|}{|z|} = \max_{D(\varepsilon)} |g(z)| = \max_{|z|=1-\varepsilon} |g(z)| = \max_{|z|=1-\varepsilon} \frac{|f(z)|}{1-\varepsilon} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$$

in quanto $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Data l'arbitrarietà di ε, abbiamo $|f(z)|/|z| \leq 1\ \forall z \in \mathbb{D}$.

2. Poiché $f(z) = zg(z)$ con la g sopra definita, $f'(z) = g(z) + zg'(z) \Rightarrow f'(0) = g(0)$. Ma sopra si è dimostrato $\sup_{\mathbb{D}} |g| \leq 1$.

3. Se esiste un z_0 tale che $|f(z_0)|/|z_0| = |g(z_0)| = 1$, poiché si ha $|g(z)| \leq 1$, g ha un massimo locale in z_0: per il principio del massimo, g è una costante di modulo 1, dunque esiste un $\vartheta \in [0, 2\pi]$ tale che $g(z) = f(z)/z = e^{i\vartheta}\ \forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ (ma si estende banalmente allo 0).

Se $|f'(0)| = 1$, dal punto 2 abbiamo $|g(0)| = 1$. Di nuovo g ha un massimo locale: come sopra. □

A questo punto, cerchiamo di trovare degli automorfismi di $\mathbb{D}$ della forma

$$f(z) = \frac{z + a}{bz + c}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Prima osservazione è che, affinché f non sia costante, dovrà aversi $c - ab \neq 0$. Inoltre bisogna che $c \neq 0$, altrimenti f ha una singolarità in 0 oppure è di una forma che comunque non ci interessa.

Sia $z \in \mathbb{D}$. $|f(z)| \in \mathbb{D} \Leftrightarrow 1 - |f^2(z)| > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{|z+a|^2}{|bz+c|^2} > 0$, cioè, svolgendo i calcoli,

$$\frac{(|b|^2 - 1)|z|^2 + |c|^2 - |a|^2 + \Re(b\bar{c}z) + \Re(\bar{b}c\bar{z}) - \Re(\bar{a}z) - \Re(a\bar{z})}{|bz + c|^2} > 0. \tag{8.1}$$

Poniamo inoltre $b\bar{c} - \bar{a} = 0$ ($\Leftrightarrow \bar{b}c - a = 0$): le parti reali che compaiono nell'espressione si annullano, e $|a|^2 = |b|^2|c|^2$. La nostra condizione necessaria diventa così

$$(|b|^2 - 1)|z|^2 + |c|^2(1 - |b|^2) > 0; \tag{8.2}$$

Ponendo $z = 0$ abbiamo la condizione $|b|^2 < 1$, mentre per $|z| \to 1$ dev'essere necessariamente $|f(z)| \to 1$ (è lo stesso assurdo delle dimostrazioni precedenti: se esiste una successione $|z_n| \to 1$ tale che $|f(z_n)| \to l < 1$, allora si estrae una sottosuccessione convergente degli $\{f(z_n)\}$: se $L \in \mathbb{D}$ è il limite, allora $z_{n_k} \to f^{-1}(L)$ contro l'ipotesi).

Dunque $1 - |f(z)|^2 \to 0$: allora il numeratore della 8.1 (che poi è la 8.2) deve annullarsi per $|z| = 1$, da cui $|c| = 1$: scriviamo quindi $c = e^{i\gamma}$. Se in forma polare si ha $a = \rho e^{i\alpha}$, da $b\bar{c} - \bar{a} = 0$ abbiamo $b = \rho e^{i\beta}$ (e quindi $\rho = |a| = |b| < 1$), e $\beta - \gamma = \alpha + 2k\pi$ (ma possiamo porre $k = 0$).

Siamo arrivati a dire

$$f(z) = \frac{z + \rho e^{i\alpha}}{\rho e^{i\beta} z + e^{i\gamma}} = e^{-i\gamma} \frac{z + \rho e^{i\alpha}}{1 + \rho e^{i(\beta - \gamma)} z} = e^{-i\gamma} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}, \quad |a| < 1$$

Queste f sono tali che $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, in quanto, se $|z| < 1$, verificano la 8.2, e quindi la 8.1. Inoltre sono iniettive: da $f(z) = f(z')$ si ottiene con pochi calcoli $z = z'$ (e ciò vale anche estendendo la definizione di f a tutto $\mathbb{C} \setminus \{-\bar{a}^{-1}\}$. Se $f(z) = w$, si ottiene facilmente

$$z = g(w) = \frac{e^{i\gamma} w - a}{1 - e^{i\gamma} \bar{a} w} = e^{i\gamma} \frac{w - e^{-i\gamma} a}{1 - \overline{e^{-i\gamma} a} w}$$

Dunque f ammette un'inversa olomorfa, che tra l'altro è della stessa forma di f, sostituendo $-\gamma$ con γ e a con $-e^{-i\gamma} a$ (il modulo di quest'ultimo è ancora < 1). Concludiamo che f è un automorfismo di $\mathbb{D}$.

Proposizione 8.3 *Gli automorfismi del disco unitario sono tutte e sole le funzioni olomorfe della forma*

$$f_{a,\vartheta}(z) = e^{i\vartheta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \quad \textit{con } |a|<1,\ \vartheta \in [0,2\pi).$$

Dim. Sia G l'insieme degli automorfismi di $\mathbb{D}$ della forma sopra menzionata. Allora G è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$: infatti, $Id_{\mathbb{D}} = f_{0,0} \in G$, e abbiamo prima dimostrato che $(f_{a,\vartheta})^{-1} = f_{-e^{i\vartheta}a,-\vartheta}$.

Con qualche conto, si può inoltre vedere che

$$f_{b,\psi} \circ f_{a,\vartheta}(z) = e^{i(\psi+\vartheta)}\frac{1+e^{-i\vartheta}\bar{a}b}{1+e^{i\vartheta}a\bar{b}}\frac{z+\frac{a+e^{-i\vartheta}b}{1+e^{-i\vartheta}\bar{a}b}}{1+z\frac{\bar{a}+e^{i\vartheta}\bar{b}}{1+e^{i\vartheta}a\bar{b}}}$$

Il secondo fattore ha modulo 1, in quanto quoziente di due numeri coniugati; nel terzo, $\frac{a+e^{-i\vartheta}b}{1+e^{-i\vartheta}\bar{a}b}$ e $\frac{\bar{a}+e^{i\vartheta}\bar{b}}{1+e^{i\vartheta}a\bar{b}}$ sono coniugati. Che valga $\left|\frac{a+e^{-i\vartheta}b}{1+e^{-i\vartheta}\bar{a}b}\right| < 1$ possiamo evitare di dimostrarlo, perché sicuramente $f_{b,\psi} \circ f_{a,\vartheta}$ è un automorfismo di $\mathbb{D}$, e si è verificato già sopra che una condizione necessaria per gli automorfismi in questa forma è che il parametro abbia modulo < 1. Poiché $f_{b,\psi} \circ f_{a,\vartheta} \in G$, abbiamo fatto tutte le verifiche necessarie per dire che G è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Vale un fatto generale: se per un gruppo $G < \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ si ha

- che agisce transitivamente su $\mathbb{D}$ (cioè, comunque presi $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ esiste $g \in G$ tale che $g(z_1) = z_2$);
- che esiste $z_0 \in \mathbb{D}$ tale che, detto $H_{z_0} = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) : g(z_0) = z_0\}$, si ha $H_{z_0} \subseteq G$

allora $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Infatti, sia $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, e sia $w_0 = f(z_0)$. Esiste una $g \in G$ tale che $g(w_0) = z_0$, dunque $g \circ f(z_0) = z_0 \Rightarrow h = g \circ f \in H_{z_0} \subseteq G$. Dunque $f = g^{-1} \circ h \in G$. H_{z_0} è un gruppo (è facile verificarlo), detto *gruppo di isotropia* di z_0.

Dimostriamo quindi che il nostro G ha queste due proprietà.

- Fissiamo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, e siano $g_1(z) = \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$, $g_2(z) = \frac{z-z_2}{1-\bar{z}_2 z}$. Poiché $g_1(z_1) = g_2(z_2) = 0$, $h = g_2^{-1} \circ g_1 \in G$ è tale che $h(z_1) = z_2$.
- Vogliamo dimostrare che G contiene gli automorfismi di $\mathbb{D}$ che fissano lo 0. Per il lemma di Schwarz, se $g \in H_0$, allora $|g(z)| \leq |z|\, \forall z \in \mathbb{D}$. Ma essendo H_0 un gruppo, $g^{-1} \in H_0$, dunque $|g^{-1}(z)| \leq |z|$. Ma allora

  $$|z| = |g(g^{-1}(z))| \leq |g(z)| \leq |z| \Rightarrow |g(z)| = |z|\, \forall z \in \mathbb{D}.$$

  Per il terzo punto del lemma di Schwarz, $g(z) = e^{i\vartheta}z$ per qualche $\vartheta \in [0,2\pi)$. Dunque $H_0 \subseteq G$.

□

Un corollario del teorema è che gli unici biolomorfismi lineari del disco sono del tipo $f(z) = e^{i\vartheta}z$ (cioè, sono le rotazioni).

8.2 Biolomorfismi: il teorema di Riemann

In generale non è facile capire se due domini di $\mathbb{C}$ sono biolomorfi, oppure esibire un biolomorfismo. Riportiamo due esempi.

Esempi.

- Un biolomorfismo tra il disco unitario $\mathbb{D}$ e il semipiano $\{y > 0\}$ è dato da $f(z) = (z - i)/(z + i)$ (detto *trasformazione di Cayley*).
- Consideriamo le corone circolari $C_1 = \{r_1 < |z| < R_1\}$ e $C_2 = \{r_2 < |r| < R_2\}$. Si può dimostrare che le corone sono biolomorfe se e soltanto se $R_1/r_1 = R_2/r_2$; in questo caso un biolomorfismo è dato da un'omotetia di centro 0.

Osservazione. Se f è un biolomorfismo e D è semplicemente connesso, $f(D)$ è ancora semplicemente connesso: infatti (ricorrendo alla definizione standard di spazio semplicemente connesso), ogni cammino in D è omotopo ad un cammino costante se e solo se lo è ogni cammino in D'. ◇

Il risultato più importante nell'ambito dei biolomorfismi è il seguente:

Teorema 8.1 (di Riemann) *Se $D \subsetneq \mathbb{C}$ è un dominio semplicemente connesso, allora D è biolomorfo al disco unitario.*

Per dimostrare il teorema, procediamo per passi successivi.

Proposizione 8.4 *Se $D \subsetneq \mathbb{C}$ è un dominio semplicemente connesso, allora D è biolomorfo ad un dominio limitato.*

Dim. Possiamo supporre direttamente che D non sia limitato.

Se $\bar{D} \neq \mathbb{C}$, sia $a \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$: si avrà $\inf_{z \in D} |z - a| = r > 0$. Consideriamo l'applicazione $j : D \to \mathbb{C}$ data da $j(z) = 1/(z - a)$. j è chiaramente olomorfa su D ed iniettiva, dunque è un biolomorfismo da D a $j(D)$; per ogni $z \in D$, $|j(z)| = 1/|z - a| < 1/r$: dunque $j(D)$ è un dominio limitato.

Se $\bar{D} = \mathbb{C}$, sia $a \in \mathbb{C} \setminus D$. La funzione $f(z) = z - a$ è olomorfa e non si annulla in D; dunque, poiché D è semplicemente connesso, è possibile definire $F = \operatorname{Log} f$, cioè una $F \in \mathcal{O}(D)$ tale che $e^{F(z)} = z - a$.

F è chiaramente iniettiva. Inoltre, se $z, z' \in D$, si ha $F(z) - F(z') - 2\pi i \neq 0$: se fosse $F(z) = F(z') + 2\pi i$, allora $e^{F(z)} = e^{F(z')+2\pi i} = e^{F(z')} \Rightarrow z = z'$.

Fissato $z_0 \in D$, poiché F è aperta, $\exists\, r > 0$ tale che $\overline{\Delta(F(z_0), r)} \subseteq F(D)$. Allora il disco $E = \Delta(F(z_0) + 2\pi i, r)$ non interseca $F(D)$: se esistesse $w \in F(D) \cap E$, allora esistono $z, z' \in D$ tali che $w = F(z) = F(z') + 2\pi i$, assurdo. Dunque $|F(z) - [F(z_0) + 2\pi i]| \geq r$ per ogni $z \in D$.

Consideriamo la funzione $h : D \to \mathbb{C}$ data da $h(z) = 1/[F(z) - F(z_0) - 2\pi i]$. Analogamente al caso precedente, essa è un biolomorfismo tra D e $h(D)$, e si ha $|h(z)| \leq 1/r \Rightarrow h(D) \subseteq \Delta(0, 1/r)$. □

Proposizione 8.5 *Sia $E \subset \mathbb{D}$ un dominio semplicemente connesso, con $0 \in E$; sia*

$$\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{O}(E) : g \text{ iniettiva}, g(0) = 0, g(E) \subseteq \mathbb{D}\}.$$

Allora esiste un biolomorfismo $f : E \to \mathbb{D}$ se e solo se esiste $M = \max_{g\in\mathcal{F}} |g'(0)|$; e in questo caso, $|f'(0)| = M$.

Dim. $\Leftarrow$) Supponiamo che esista $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(E) = \mathbb{D}$: poiché f è iniettiva, è un biolomorfismo.

Sia $g \in \mathcal{F}$. Allora $h = g \circ f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ è una funzione olomorfa tale che $h(0) = 0$: per Schwarz, si ha $|h'(0)| \le 1$.

D'altra parte,

$$|h'(0)| = |g'(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0)| = \frac{|g'(0)|}{|f'(f^{-1}(0))|} = \frac{|g'(0)|}{|f'(0)|};$$

dunque $|g'(0)| \le |f'(0)|\ \forall g \in \mathcal{F}$.

$\Rightarrow$) Sia $f \in \mathcal{F}$ tale che $|f'(0)| = \max_{g\in\mathcal{F}} |g'(0)|$. Supponiamo per assurdo $f(E) \subsetneq \mathbb{D}$, e sia $a \in \mathbb{D} \setminus f(E)$. Consideriamo l'automorfismo di $\mathbb{D}$ dato da

$$\phi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Poiché E è semplicemente connesso e ϕ non ha zeri in E (dunque non ne ha neanche $\phi \circ f$), è possibile definire un logaritmo di ϕ: sia $F(z) \in \mathcal{O}(E)$ tale che $e^{F(z)} = \phi(f(z))$.

Se $z \in E$, allora $|\phi(f(z))| < 1$: dunque $\Re F(z) = \log|\phi(f(z))| < 0$. Sia $g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$; chiaramente $g \in \mathcal{O}(E)$ e $g(0) = 0$.

In generale se $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2 \in \mathbb{C}$ hanno parti reali dello stesso segno, allora

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\bar{\beta}}\right|^2 = \frac{(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2}{(\alpha_1+\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2} < 1; \text{ dunque } \left|\frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}\right| < 1 \Rightarrow g(E) \subset \mathbb{D}.$$

Infine, f iniettiva $\Rightarrow \phi \circ f$ iniettiva $\Rightarrow F$ iniettiva $\Rightarrow g$ iniettiva. Quindi $g \in \mathcal{F}$.

Abbiamo (evitando di scrivere la dipendenza da z):

$$\begin{aligned}\tfrac{g'}{f'} &= \tfrac{1}{f'}\tfrac{1}{[F+\overline{F(0)}]^2}[F'(F+\overline{F(0)}) - (F-F(0))F'] = \tfrac{1}{f'}\tfrac{F(0)+\overline{F(0)}}{[F+\overline{F(0)}]^2}F' = \tfrac{1}{f'}\tfrac{F(0)+\overline{F(0)}}{[F+\overline{F(0)}]^2}\tfrac{\phi'\circ f}{\phi\circ f}f' = \\ &= \tfrac{F(0)+\overline{F(0)}}{[F+\overline{F(0)}]^2}\tfrac{1}{\phi\circ f}\tfrac{1}{[1-\bar{a}f]^2}[1-\bar{a}f+\bar{a}(f-a)] = \tfrac{F(0)+\overline{F(0)}}{[F+\overline{F(0)}]^2}\tfrac{1}{\phi\circ f}\tfrac{1-|a|^2}{[1-\bar{a}f]^2}\end{aligned}$$

da cui (ricordando che $f(0) = 0$)

$$\frac{g'(0)}{f'(0)} = \frac{1-|a|^2}{-a\cdot 2\Re\mathrm{Log}\,(-a)} \Rightarrow \frac{|g'(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1-|a|^2}{2|a|\log|a|^{-1}}.$$

Consideriamo ora la funzione reale $h(t) = -2\log t + t - 1/t$: poiché $h(1) = 0$ e $h'(t) = -2/t + 1 + 1/t^2 = (1-1/t)^2 > 0$, si avrà $h(t) < 0\ \forall t \in (0,1)$, cioè $(1-t^2)/(2t\log t^{-1}) > 1$; per $t = |a|$ abbiamo però $|g'(0)| > |f'(0)|$, il che è assurdo perché $|f'(0)| = \max_{g\in\mathcal{F}} |g'(0)|$. □

Dim. del teorema di Riemann Consideriamo un dominio semplicemente connesso $D \subsetneq \mathbb{C}$: sia $f_1 : D \to D_1$ un biolomorfismo, con D_1 dominio limitato; sia $f_2 : D_1 \to D_2$ una traslazione, con $0 \in D_2$; e sia $f_3 : D_2 \to D_3$ un'omotetia di centro 0, con $D_3 \subseteq \mathbb{D}$. D_1, D_2, D_3 saranno semplicemente connessi. Ci rimane da dimostrare che esiste un biolomorfismo $f : D_3 \to \mathbb{D}$ (dopodiché il biolomorfismo $D \to \mathbb{D}$ sarà dato dalla composizione $f \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$): detta

$$\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{O}(D_3) : g \text{ iniettiva}, g(0) = 0, g(D_3) \subseteq \mathbb{D}\},$$

per la proposizione precedente, la tesi equivale a dire che il funzionale $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ definito da $\Phi(g) = |g'(0)|$ ammette un massimo.

Sia $M = \sup_{g\in\mathcal{F}} |g'(0)|$: $M \geq 1$, in quanto $Id_{D_3} \in \mathcal{F}$; inoltre, comunque presa $g \in \mathcal{F}$, dalle stime di Cauchy abbiamo $|f'(0)| \leq 1/\text{dist}(0, bD_3)$: dunque $M < +\infty$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n \in \mathcal{F}$ tale che $|f_n'(0)| > M - 1/n$. Poiché $|f_n(z)| < 1 \forall z \in D_3, n \in \mathbb{N}$, la successione è equilimitata su D_3, e a maggior ragione sui suoi compatti. Per il teorema di Montel, esiste una sottosuccessione convergente $f_{n_k} \to f \in \mathcal{O}(D_3)$.

Poiché $|f_{n_k}'(0)| > M - 1/n_k \forall\, k$, passando al limite $|f'(0)| \geq M$ (dunque f non è costante).

f è iniettiva: supponiamo che esistano $z_0, z_1 \in D_3$ distinti tali che $f(z_0) = f(z_1)$. Sia $\psi_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$; allora $\psi_{n_k} \to \psi$ definita da $\psi(z) = f(z) - f(z_0)$. Detto $D_3^* = D_3 \setminus \{z_0\}$, le ψ_n non hanno zeri in D_3^*, perché le f_n sono iniettive; dunque, per un teorema precedente, $\psi \equiv 0$ (che scartiamo immediatamente perché si era detto f non costante), oppure ψ non ha zeri in D_3^*, dunque $f(z_1) - f(z_0) \neq 0$, assurdo.

Chiaramente, $f_{n_k}(0) = 0 \forall\, k \Rightarrow f(0) = 0$; e dall'equilimitatezza della successione abbiamo $|f(z)| \leq 1 \forall z \in D_3$; tuttavia non può esistere $\bar{z}$ tale che $|f(\bar{z})| = 1$ perché altrimenti avremmo, dal principio del massimo, f costante. Dunque $f(D_3) \subseteq \mathbb{D}$. Ma allora $f \in \mathcal{F}$; poiché $M = \sup_{g\in\mathcal{F}} |g'(0)|$ e $|f'(0)| \geq M$, f realizza il massimo del funzionale Φ. □

$\mathcal{FINE}$

della prima parte del corso

Lezione 9

di Eleonora Bardelli, Maria Colombo, Denis Nardin

Questo capitolo originariamente era un documento a sé stante, intitolato *Analisi complessa spiegata alla nonna (in vari sensi)* scritto da Eleonora, Maria e Denis in particolar modo per i fisici, che non hanno mai sentito parlare di topologia; esso raccoglie alcune lezioni di esercitazione, completandole nei punti dove erano più carenti.

Un grazie a loro per la collaborazione ;-)

9.1 Carte e varietà topologiche

Allo scopo di sviluppare una teoria analitica delle funzioni in domini più generali dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si è pian piano sviluppato il concetto di *varietà*. Una varietà è, grosso modo, uno spazio che si comporta localmente come $\mathbb{R}^n$, in un senso molto preciso del termine. Per dotare un insieme X di una struttura locale che lo renderà una varietà, useremo un approccio che fa uso del concetto di *carta*. Una carta altro non è che una porzione di X che viene identificata con un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 9.1 *Sia X un insieme. Una n-*carta *su X è una coppia (U, j) dove $U \subseteq X$ è un sottoinsieme di X mentre $j : U \to V$ è una funzione biunivoca da U a un aperto V di $\mathbb{R}^n$.*

Ora, per poter dare una struttura all'insieme X lo equipaggeremo con un ricoprimento completo di carte, con quello che viene detto cioè un *atlante*. Per poterne parlare però vediamo prima come si possono mettere in relazione due carte diverse fra loro

Definizione 9.2 *Siano $(U_1, j_1), (U_2, j_2)$ due carte su X. Il* cambio carta *da U_1 a U_2 è la funzione $\varphi : j_1(U_1 \cap U_2) \to j_2(U_1 \cap U_2)$ definita da*

$$\varphi = j_2 \circ j_1^{-1}$$

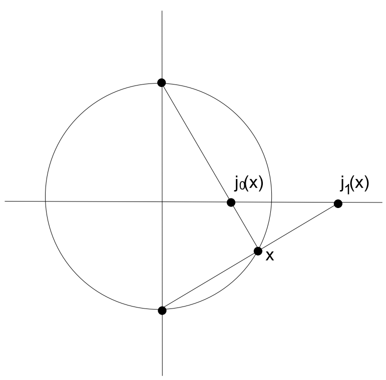
Osservazioni. Si osservi che i cambi carta sono funzioni biunivoche da aperti di $\mathbb{R}^n$ a aperti di $\mathbb{R}^n$. Di conseguenza ha senso parlare della loro regolarità: possiamo parlare di cambi carta continui, differenziabili, C^1, C^∞, olomorfi... Questo è esattamente quello che intendiamo usare per trasportare parte della struttura di $\mathbb{R}^n$ su X. Infatti le condizioni di regolarità sui cambi carta (che possiamo imporre poichè sono funzioni da $\mathbb{R}^n$ in se') ci permetteranno di definire funzioni con quella regolarità su X, come vedremo in seguito. ◇

Per poter equipaggiare X di una struttura è necessario, infine, prendere una collezione di carte sufficientemente grande.

Definizione 9.3 *Sia X un insieme. Un* atlante *su X è una collezione $\{(U_i, j_i)\}_{i\in I}$ di carte tali che $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ e tali che i cambi carta tra due qualunque carte siano funzioni continue.*

Definizione 9.4 *Un insieme X equipaggiato con un atlante è detto una n-*varietà topologica.

Osserviamo che i cambi carta sono funzioni continue invertibili tali che la loro inversa è anch'essa continua: infatti anche l'inversa è un cambio carta. Di conseguenza stiamo richiedendo che i cambi carta siano *omeomorfismi.*



Vediamo ora un esempio. Consideriamo S^1 il cerchio unitario definito da

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

e dotiamolo della struttura di varietà topologica. L'atlante che costruiremo sarà formato da due carte U_0 e U_1. Siano quindi $U_0 = S^1\backslash\{(0,1)\}$ e $U_1 = S^1\backslash\{(0,-1)\}$, cioè cerchiamo di identificare $\mathbb{R}$ con il cerchio privato di un punto. Per fare questo utilizzeremo la proiezione stereografica $j_0 : U_0 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$(x_1, x_2) \to \frac{x_1}{1 - x_2}$$

e analogamente $j_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ definita da

$$(x_1, x_2) \to \frac{x_1}{1 + x_2}$$

Per capire "geometricamente" da dove vengono queste funzioni, osserviamo che sono le proiezioni stereografiche dai poli. Cioè, sia un punto $x = (x_1, x_2)$ in U_0. Allora è ben definita la retta $L(x, N)$ che congiunge x al polo nord $N = (0, 1)$. Ma allora $j_0(x) = L(x, N) \cap \mathbb{R}$, cioè mandiamo un punto sulla sua proiezione sull'asse reale dal polo nord. Analogamente la carta j_1 è la proiezione stereografica dal polo sud $S = (0, -1)$. Ma è facile e intuitivo vedere che

$$j_0(U_0 \cap U_1) = j_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{R}^*$$

E il cambio carta è $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definito da

$$x \xrightarrow{j_0^{-1}} \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \xrightarrow{j_1} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1 + \frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{1}{x}$$

È chiaramente una funzione continua da $\mathbb{R}^*$ in se'.

Possiamo definire quali sono gli insiemi aperti di una varietà in questo modo:

Definizione 9.5 *Sia X una varietà. $V \subseteq X$ è detto aperto se, per ogni carta (U, j) si ha che $j(U \cap V)$ è aperto.*

Cioè se l'insieme guardato in ogni carta è aperto.

La struttura di varietà è "bella" perchè conserva il concetto di continuità di una funzione. Infatti vale il seguente lemma

Lemma 9.1 *Sia X una varietà topologica e siano U_0, U_1 due sue carte. Sia inoltre $f : U_0 \cap U_1 \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora $f \circ j_0^{-1}$ è continua se e solo se lo è $f \circ j_1^{-1}$ (dove i domini delle due funzioni sono scelti in modo che le composizioni abbiano senso).*

Dim. Posto $\psi_0 = f \circ j_0^{-1}$ e $\psi_1 = f \circ j_0^{-1}$ supponiamo che ψ_0 sia continua. Ma allora $\psi_1 = \psi_0 \circ (j_0 \circ j_1^{-1})$ ed è continua perchè composizione di due funzioni continue (il cambio carta è continuo!). Il viceversa è analogo. □

Quindi la seguente definizione ha senso:

Definizione 9.6 *Sia X una varietà topologica e sia $f : V \to \mathbb{R}$ una funzione da un aperto di X. Sia inoltre $x \in V$ allora diciamo che f è continua in x se, posta (U, j) una carta che contiene x $f \circ j^{-1}$ è continua.*

In realtà la definizione si può generalizzare ancora di più:

Definizione 9.7 *Siano X, Y due varietà topologiche e sia $f : V \to V'$ una funzione da un aperto di X a un aperto di Y. Sia inoltre $x \in V$. Allora si dice che f è continua in x se, posta (U, j) una carta di X che contiene x e (U', j') una carta di Y che contiene $f(x)$, la funzione $j' \circ f \circ j^{-1}$ è continua.*

Si dimostra in modo analogo a sopra che la definizione di continuità non dipende dalla scelta delle carte.

Lasciamo per esercizio questa semplice proprietà che caratterizza le funzioni continue:

Lemma 9.2 *Siano X, Y varietà topologiche e $f : V \to V'$ funzione tra aperti di X e Y. Allora f è continua se e solo se per ogni aperto Ω di Y $f^{-1}(\Omega)$ è aperto di X.*

9.2 Varietà complesse: la sfera di Riemann

Ora che abbiamo il concetto di varietà possiamo fare un passo in più e definire una *struttura complessa* su una varietà. Una struttura complessa consiste fondamentalmente nel considerare un atlante in cui i cambi carta siano funzioni olomorfe. Questa maggiore richiesta di regolarità ci permetterà di definire l'olomorfia di funzioni tra varietà complesse e di conseguenza sviluppare l'analisi complessa su domini più generali degli aperti del piano. Diamo intanto due definizioni

Definizione 9.8 *Sia X una varietà topologica su $\mathbb{R}^2$ identificato con $\mathbb{C}$. Allora X è una varietà complessa di dimensione 1 se e solo se i cambi carta sono funzioni olomorfe.*

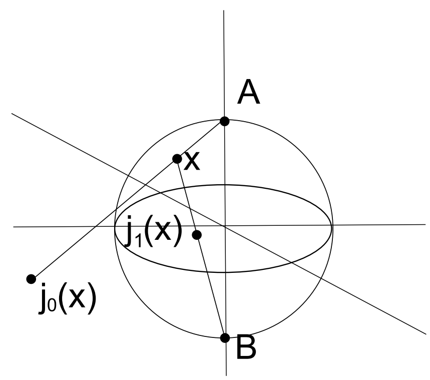
Una varietà complessa di dimensione 1 è detta anche superficie di Riemann.

Definizione 9.9 *Siano X, Y due varietà complesse e $f : V \to V'$ una funzione tra due loro aperti. Sia inoltre $x_0 \in V$. Allora f è olomorfa in x_0 se e solo se presa una carta (U, j) contenente x_0 e una carta (U', j') contenente $f(x_0)$ la funzione $F = j' \circ f \circ j^{-1} : j(V) \to \mathbb{C}$ è olomorfa.*

Il lettore noterà la somiglianza con la definizione di funzione continua. Si lascia per esercizio che la definizione di funzione olomorfa è ben posta, perchè non dipende dalla scelta della carta.

Vediamo ora l'esempio più importante e senza dubbio più celebre di varietà complessa: la *sfera di Riemann*.

Consideriamo $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ la sfera unitaria. Vogliamo mettervi una struttura di varietà complessa in un modo analogo a quello con cui abbiamo messo una struttura di varietà topologica al cerchio unitario.



Siano $A = (0, 0, 1)$ e $B = (0, 0, -1)$ due punti della sfera che chiameremo "polo nord" e "polo sud". Consideriamo le due carte date da $U_0 = S \backslash A$ e $U_1 = S \backslash B$. Come applicazione da U_0 a $\mathbb{C}$ consideriamo appunto la proiezione stereografica. Prendiamo cioè per ogni punto $x \in U_0$ la retta r_x passante per x e A, e mandiamo x nell'intersezione di r_x con il piano a $x_3 = 0$ identificato con $\mathbb{C}$ secondo $(x_1, x_2, 0) = x_1 + ix_2$. In simboli

$$j_0 : U_0 \to \mathbb{C} \quad j_0(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Allo stesso modo per la carta U_1 mandiamo un punto $x \in U_1$ nell'intersezione della retta s_x per x e B con il piano $x_3 = 0$ identificato con $\mathbb{C}$ però stavolta con l'applicazione $(x_1, x_2, 0) = x_1 - ix_2$ (teniamo "la faccia in alto di $\mathbb{C}$" rivolta verso la sfera). La carta che si ottiene è quindi

$$j_1 : U_1 \to \mathbb{C} \quad j_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}$$

Il motivo del cambio di orientazione della seconda carta è che vogliamo ottenere cambi carta olomorfi, e per fare ciò è stato necessario identificare il piano superiore con $\mathbb{C}$ in modo che l'orientazione fosse preservata dal cambio carta. Infatti, con queste scelte di j_0, j_1 si verifica facilmente che il cambio carta è

$$\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad \varphi(z) = \frac{1}{z}$$

Che è, come necessario un biolomorfismo.

Osservazioni. Osserviamo che S è stata ottenuta da $\mathbb{C}$ "aggiungendogli" unico punto. Infatti, di solito si pensa alla sfera di Riemann come all'insieme descritto da $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, indicando cioè i punti di U_0 tramite la loro immagine attraverso la carta j_0 e il punto A con il simbolo ∞. Il cambio carta viene perciò rappresentato dall'applicazione $z \to \frac{1}{z}$ con la convenzione che $\frac{1}{0} = \infty$ e $\frac{1}{\infty} = 0$. Indicheremo quindi d'ora in poi U_0 all'interno di S con il simbolo $\mathbb{C}$ sfruttando l'identificazione data da j_0 $\diamond$

Il principale motivo per cui è stata introdotta la sfera di Riemann è che $\mathbb{C}$ non è compatto, di conseguenza le funzioni possono "scappare" all'infinito senza per questo comportarsi in modo patologico. Infatti spesso una funzione meromorfa (cioè una funzione olomorfa le cui uniche singolarità siano poli) ha molte caratteristiche gradevoli, e condivide molte proprietà con le funzioni olomorfe. Facciamo quindi vedere che la sfera di Riemann è compatta[1], e che quindi è un insieme molto più "gradevole" con cui lavorare.

Lemma 9.3 *La sfera di Riemann è compatta per successioni.*

Dim. Sia $(z_n)_{n\geq 0}$ una successione di punti della sfera (cosa significa questo? È una successione di numeri complessi e simboli ∞, perchè la stiamo già guardando nella carta U_0). Supponiamo per assurdo che essa non ammetta sottosuccessioni convergenti.
Consideriamo i punti della successione che stanno in $\mathbb{C}$ (sono evidentemente infiniti). Se fosse limitata, cioè $|z_n| < M$, avrei un assurdo in quanto la palla chiusa $\bar{B}(0,\ M)$ è compatta.
Quindi c'è una sottosuccessione$(z_{n_k})_{k\geq 0}$ divergente in modulo:

$$|z_{n_k}| > k$$

Dimostriamo che questa sottosuccessione converge a ∞. Ovviamente per farlo dobbiamo cambiare carta; guardiamo quindi la successione in U_1. Essa diventa:

$$\frac{1}{z_{n_k}}$$

Usando la disuguaglianza sopra si ha:

$$\left|\frac{1}{z_{n_k}}\right| < \frac{1}{k}$$

Quindi tale successione sta evidentemente tendendo a 0. □

Vediamo ora le principali proprietà delle funzioni olomorfe sulla sfera di Riemann.

Lemma 9.4 *Sia $f : S \to S$ una funzione olomorfa non costante. I poli di f sono un insieme finito.*

Dim. Innanzitutto un'osservazione: cosa sono i poli di f? Parlando di 'poli di f' si presuppone di guardare la funzione come $f : S \to U_0$, e qui sono i punti della sfera in cui f non é definita. In altre parole sono i punti in cui f vale ∞.
Supponiamo per assurdo che non siano finiti.
Allora, essendo la sfera compatta per successioni, c'é una successione $(z_i)_{i\geq 0}$ che accumula in $\tilde{z}$.
<u>Caso 1:</u> $\tilde{z} \neq \infty$
Si ha un assurdo in quanto cambiando carta in arrivo i poli diventano zeri che accumulano in $\tilde{z}$.
Spieghiamo più nei dettagli questo passaggio.

[1]In realtà dimostreremo solo che è compatta per successioni, per esercizio si può dimostrare che è compatta nel senso che da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Sappiamo che $f|_{\mathbb{C}\to\mathbb{C}}$ è meromorfa coi suoi poli che accumulano in $\tilde{z}$.
Cambiamo carta in arrivo; consideriamo cioè $f|_{\mathbb{C}\to U_1}$. Essa non è altro che

$$f|_{\mathbb{C}\to U_1}(z) = j_{U_0\to U_1} \circ f|_{\mathbb{C}\to\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{f|_{\mathbb{C}\to\mathbb{C}}(z)}$$

Sappiamo che tale funzione è olomorfa (perchè $f : S \to S$ è olomorfa!) e inoltre

$$f|_{\mathbb{C}\to U_1}(z_i) = 0$$

(il cambio carta manda l'infinito di U_0 nello 0 di U_1).

Quindi gli $(z_i)_{i\geq 0}$ sono zeri di una funzione meromorfa che accumulano in $\tilde{z}$. Questo è assurdo in quanto per la continuità di $f|_{\mathbb{C}\to U_1}$ si ha che $f|_{\mathbb{C}\to U_1}(\tilde{z}) = 0$, quindi $\tilde{z}$ non è un polo, ma sappiamo che gli zeri di f sono un insieme discreto.

Osservazioni.

- Abbiamo dimostrato anche un fatterello: gli zeri di una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ non accumulano.
- nella dimostrazione ho precisato in ogni momento in quali carte (in partenza e in arrivo) guardavo f. L'ho fatto con una notazione particolare ($f = f|_{\mathbb{C}\to U_0}$ non è una semplice restrizione della funzione, sottointende due passaggi in carta). In generale questo non si fa, e a meno di specificare si considera tacitamente $f = f|_{\mathbb{C}\to\mathbb{C}}$. Nel caso 2 procederemo un po' più spediti.

$\diamond$

Caso 2: $\tilde{z} = \infty$.
In questo caso è necessario un cambio di carta sia in partenza che in arrivo. La funzione f vista nella carta U_1 sia in partenza che in arrivo diventa:

$$f|_{U_1\to U_1}(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$$

In particolare i poli $z_0, z_1, \ldots$ che accumulavano all'∞ diventano nella carta U_1 $\frac{1}{z_0}, \frac{1}{z_1}, \ldots$, che accumulano in 0. Le loro immagini, nella carta U_1, sono 0.
Ma questo è assurdo perchè gli zeri di una funzione meromorfa non possono accumulare. $\square$

Quindi una funzione olomorfa sulla sfera conserva alcune proprietà "carine" delle funzioni olomorfe sul piano. Infatti quello che abbiamo appena visto dimostra che la controimmagine del punto all'infinito è un insieme discreto (e poichè la sfera è compatta per successioni, un insieme finito visto che ogni insieme infinito accumula). Adesso cerchiamo di precisare in che senso funzioni meromorfe a valori nel piano e olomorfe a valori nella sfera sono "la stessa cosa".

Lemma 9.5 *Sia $f : \mathbb{C} \to S$ una funzione olomorfa. Allora posto $P = f^{-1}(\infty)$ f è una funzione olomorfa da $\mathbb{C}\backslash P$ in $\mathbb{C}$ che ha un polo in ogni punto di P.*

Dim. È ovvio che f è olomorfa da $\mathbb{C}\backslash P$ a $\mathbb{C}$. Infatti segue immediatamente dalla definizione di funzione olomorfa prendendo nell'insieme di arrivl la carta U_0. Osserviamo inoltre che P è un insieme discreto. Infatti guardando l'insieme di arrivo nella carta U_1 è la controimmagine di 0 secondo una funzione olomorfa. Di conseguenza per ogni $z_0 \in P$ questo è per f una singolarità isolata. Notiamo inoltre che

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

in S per cui deve essere

$$\lim_{z \to z_0} j_1 \circ f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{z \to z_0} |j_1 \circ f(z)| = 0$$

ma allora

$$\lim_{z \to z_0} |j_0 \circ f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|j_1 \circ f(z)|} = +\infty$$

Quindi z_0 deve essere un polo per $j_0 \circ f$, che è la tesi. □

Teorema 9.1 *Sia $f : S \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è costante.*

Dim. Consideriamo $f|_{\mathbb{C}}$. Questa è una funzione olomorfa intera da $\mathbb{C}$ in se', e di conseguenza è la somma di una serie di potenze centrata nell'origine

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Ora, mettendoci nella carta U_1 tramite il cambio carta $z \to \frac{1}{z}$ si vede che in un intorno di 0 la funzione vale

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{z^n}$$

Ma la f è olomorfa in 0, e perciò il suo sviluppo di Laurent deve contenere solo la parte regolare. Quindi $a_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, che è la tesi. □

Teorema 9.2 *Sia $f : S \to S$ una funzione olomorfa tale che $f^{-1}(\infty) = \infty$. Allora f è un polinomio*[2].

Dim. Analogamente a prima $f|_{\mathbb{C}}$ è una funzione olomorfa intera, perciò si sviluppa in serie di Taylor e cambiando carta otteniamo che in U_1

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{z^n}$$

ora deve essere $f(\infty) = \infty$ e perciò f deve avere un polo nell'origine per il lemma. Il suo sviluppo di Laurent deve quindi essere definitivamente nullo, cioè $a_n = 0$ per ogni $n \geq N$ per un certo N. Ma questo è la tesi. □

Osservazioni. Le cose belle della sfera di Riemann sono:

[2]Si intende ovviamente nella carta U_0 tramite l'identificazione $S = \mathbb{C} \cup \infty$

- è compatta
- non ci sono punti privilegiati; quindi era quantomeno logico immaginare che se i poli non potevano accumulare al finito allora non lo potevano fare nemmeno all'infinito. In effetti nella dimostrazione è evidente che l'unica differenza tra i due casi sta in un cambio ulteriore di carta, che non è evidentemente una cosa sostanziale.

◇

Teorema 9.3 *Sia $f : S \to S$ una funzione olomorfa non costante. Allora f è un rapporto di due polinomi.*

Dim. Siano $\{z_1, \ldots, z_n\}$ i poli di ordini $\{k_1, \ldots, k_n\}$ (per il lemma, sono un numero finito). Consideriamo la funzione

$$g(z) = f(z) \cdot \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{k_j}$$

Essa è evidentemente olomorfa su $\mathbb{C}$ (ho tolto tutti i poli!). Vogliamo dimostrare che g è un polinomio (una volta fatto questo è evidente che f si scriverà come rapporto di polinomi).
Cosa fa g in ∞?
Per scoprirlo ci mettiamo nella carta U_1 (in partenza):

$$g\left(\frac{1}{z}\right) = f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{z} - z_j\right)^{k_j}$$

Dato che f aveva al più un polo in ∞, $f(\frac{1}{z}) = \sum_{n \geq -r}^{\infty} a_n z^n$ (abbiamo scritto lo sviluppo di Laurent centrato in 0 della funzione $f|_{U_1 \to \mathbb{C}}$).
Sostituendo nell'espressione per g, risulta evidente che ∞ è al più un polo per g.
Sfruttiamo ora il fatto che g è olomorfa intera, sviluppandola come serie di potenze:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Cambiando carta in partenza si ottiene

$$g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Ma dato che 0 deve essere un polo per g nella carta U_1, lo sviluppo di Laurent deve contenere al più un numero finito di coefficienti diversi da 0, da cui g è un polinomio. □

Parte II

Varie

Lezione 10

10.1 Funzioni armoniche: prime proprietà

Definizione 10.1 *Si dice* laplaciano *l'operatore differenziale su funzioni* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dato da*

$$\triangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Detto Ω *un dominio di* $\mathbb{R}^n$*, una funzione* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2 *tale che* $\triangle u = 0$ *è detta* armonica.

Consideriamo una funzione $f \in \mathcal{O}(D)$: siano $u = \Re f$, $v = \Im f$. Ricordiamo le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

da cui ricaviamo (scambiando le derivate, che è possibile perché $u = \Re f$ è di classe C^2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

cioè, $\triangle u = 0$, ed analogamente $\triangle v = 0$. Entrambe, quindi, sono funzioni armoniche in 2 variabili.

Sotto opportune ipotesi, vale anche il viceversa:

Proposizione 10.1 *Se* u *è una funzione armonica su un dominio* Ω *di* $\mathbb{R}^2$ *semplicemente connesso, esiste una funzione* v*, anch'essa armonica (detta* coniugata *di* u*) tale che* $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ *è olomorfa su* Ω.

Dim. (traccia) Trovare v equivale a risolvere l'equazione differenziale data dalle condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -u_y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = u_x \end{cases}.$$

Fissato $(x_0, y_0) \in \Omega$, sia (x, y) anch'esso $\in \Omega$. Detta Π una poligonale (con i lati paralleli agli assi) che connette (x_0, y_0) ad (x, y), denotiamo con $L_1, \ldots, L_m$ i suoi lati. Definiamo quindi

$$v(x,y) = -\sum_{\substack{\text{lati}\\ \text{orizzontali}}} \int_{L_j} u_y \mathrm{d}x + \sum_{\substack{\text{lati}\\ \text{verticali}}} \int_{L_j} u_x \mathrm{d}y$$

v è ben definita, cioè non dipende dalla scelta della poligonale su cui si integra: ovvero, la somma di integrali di sopra è nulla su ogni poligonale chiusa passante per (x_0, y_0). Poiché una poligonale chiusa racchiude un plurirettangolo (tutto contenuto in Ω, in quanto è semplicemente connesso), e l'integrale sul bordo di un plurirettangolo si può scomporre come somma di integrali su bordi dei rettangoli componenti, basterà vedere che l'integrale è nullo sul bordo di un rettangolo $(a,b) \times (c,d)$.

Sia $f = u_x - iu_y$. Si ha $\int_a^b \mathrm{d}x \left[\int_c^d (f_x + if_y)\mathrm{d}y\right] = \int_a^b \mathrm{d}x \left[\int_c^d \triangle u \mathrm{d}y\right] = 0$. Da qui, ci basta ripetere i passaggi della dimostrazione del primo teorema di Cauchy nel caso $f \in C^1$ per arrivare a dire che

$$\begin{gathered}\int_c^d u_x(b,y)\mathrm{d}y + \int_d^c u_x(a,y)\mathrm{d}y + \int_a^b u_y(x,d)\mathrm{d}x + \int_b^a u_y(x,c)\mathrm{d}x + \\ +i\left[-\int_c^d u_y(b,y)\mathrm{d}y - \int_d^c u_y(a,y)\mathrm{d}y + \int_a^b u_x(x,d)\mathrm{d}x + \int_b^a u_x(x,c)\mathrm{d}x\right] = 0\end{gathered}$$

e la nullità della parte immaginaria è la nostra tesi.

A questo punto, è facile verificare che v soddisfa l'equazione differenziale di Cauchy-Riemann, e che v è armonica. □

Nella trattazione delle funzioni armoniche, la nostra attenzione si concentrerà sulle funzioni armoniche in 2 variabili: useremo quindi l'identificazione di $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso, e la teoria relativa alle funzioni olomorfe. Anche quando indicheremo dei risultati come validi in $\mathbb{R}^n$ con n qualunque, li dimostreremo solo per $n = 2$. Osserviamo per esempio che, se ci troviamo su (un aperto di) $\mathbb{R}^2$, vale

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Teorema 10.1 (Principio del massimo) *Sia Ω un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica non costante su Ω e continua su $\bar{\Omega}$. Allora*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{b\Omega} u; \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \; u(\boldsymbol{x}) < \max_{b\Omega} u.$$

Dim. Dato $\varepsilon > 0$, sia $u_\varepsilon(x) = u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon|\boldsymbol{x}|^2$. Allora $\triangle u_\varepsilon = 2n\varepsilon$. Supponiamo che u_ε abbia un massimo locale in $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$. Allora le funzioni di una variabile

$$u_{\varepsilon j} = u_\varepsilon(a_1, \ldots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

ammettono massimo locale, rispettivamente, in a_j. Dunque sono localmente concave:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{\varepsilon j}}{\mathrm{d}x^2}(a_j) = \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_j^2}(a) \le 0 \; \forall j \Rightarrow \triangle u(\boldsymbol{a}) = 2n\varepsilon \le 0, \text{ assurdo.}$$

Quindi, $\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{b\Omega} u_\varepsilon$. In particolare per ogni $n > 0$ esiste $\boldsymbol{x}_n \in b\Omega$ tale che

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega \; u_{1/n}(\boldsymbol{x}) \le u_{1/n}(\boldsymbol{x}_n)$$

Ma allora passando al limite per $n \to +\infty$ (ed eventualmente estraendo una sottosuccessione convergente dagli $\boldsymbol{x}_n$) si ha che

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega \; u(\boldsymbol{x}) \leq u(\boldsymbol{x}_0)$$

per qualche $\boldsymbol{x}_0 \in b\Omega$. Ma questo è proprio il primo punto.

Per il secondo punto (principio del massimo forte), utilizzeremo una dimostrazione che dipende dalla teoria delle funzioni olomorfe, e pertanto, sarà valida solo per $n = 2$. Infatti, supponiamo che u abbia un massimo interno z_0. Allora, poichè è una funzione armonica, esiste in un intorno di z_0 una funzione v tale che $u + iv$ sia olomorfa. Ma allora anche e^{u+iv} lo è. Ma

$$|e^{u+iv}| = e^u$$

e di conseguenza, se u ha un massimo interno lo ha anche il modulo di e^{u+iv}. Poichè questa è una funzione olomorfa, ne segue che è costante. Assurdo. □

Osservazioni.

- Poichè se u è armonica lo è anche $-u$, dal principio del massimo segue in modo del tutto analogo un *principio del minimo*.
- Il principio del massimo stretto è vero anche per funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n$, tuttavia la sua dimostrazione non è affatto così semplice e richiede tecniche molto elaborate.
- Dai principî del massimo e del minimo segue facilmente che se una funzione armonica è costante sul bordo di un dominio, è costante in tutto l'interno. Più in generale se due funzioni armoniche su un dominio sono continue e coincidono sul bordo, coincidono anche in tutto l'interno. Questo sarà importante quando definiremo le funzioni subarmoniche.

◇

Proposizione 10.2 *Se u è una funzione armonica su $\mathbb{C}$ ed esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall\, z \in \mathbb{C}\; u(z) \geq c$, allora u è costante. (Analogamente, se $\forall\, z \in \mathbb{C}\; u(z) \leq c$, allora u è costante.)*

Dim. Sia $w = c - u \leq 0$ (w è ancora armonica), e sia v un'armonica coniugata di w (che esiste perché $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso): $f = w + iv$ è una funzione olomorfa intera, così come e^f. Osserviamo che $|e^f| = e^w \leq 1$, dunque, per il teorema di Liouville, e^f è costante: ma allora f è costante, quindi lo è w, quindi u. □

Proposizione 10.3 *Siano D_1, D_2 domini di $\mathbb{C}$. Se $f : D_1 \to D_2$ è olomorfa e $u : D_2 \to \mathbb{R}$ è armonica, allora $u \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ è armonica.*

Dim. Per ogni $z_0 \in D_1$ esiste un intorno $U \subset D_2$ di $f(z_0)$ in cui è definita un'armonica coniugata v di u. Dunque, se $u + iv = g : U \to \mathbb{C}$, $g \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa. Allora la sua parte reale, $u \circ f$, è armonica in un intorno di z_0.

□

10.2 Formula di rappresentazione delle funzioni armoniche

Definizione 10.2 *Il* nucleo di Poisson *di parametri* $a \in \mathbb{C}, \rho > 0$ *è la funzione*

$$P_{a,\rho} : \Delta(a,\rho) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ data da } P_{a,\rho}(z,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\Re\left[\frac{\rho e^{i\vartheta} + (z-a)}{\rho e^{i\vartheta} - (z-a)}\right].$$

Quando non sussiste possibilità di confusione, indichiamo semplicemente con P il nucleo di Poisson.

Proposizione 10.4 *Siano* $z \in \Delta(a,\rho)$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. *Allora*

1. $P(z,\vartheta) \ge 0$;
2. $\int_0^{2\pi} P(z,\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = 1$;
3. *se* $h : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua tale che* $h(0) = h(2\pi)$, *per ogni* $z_0 = a + \rho e^{i\vartheta_0}$ *vale*
$$\lim_{z \to z_0} \int_0^{2\pi} P(z,\vartheta)h(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = h(\vartheta_0);$$
ed il limite è uniforme in ϑ_0*: cioè, dato* $\varepsilon > 0$, *esiste* $\delta > 0$ *tale che, per ogni* $\vartheta_0 \in [0,2\pi]$, *se* $|z - e^{i\vartheta_0}| < \delta$ *si ha* $\left|\int_0^{2\pi} P(z,\vartheta)h(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta - h(\vartheta_0)\right| < \varepsilon$.

Dim. Osserviamo che $P_{a,\rho}(z,\vartheta) = P_{0,\rho}(z-a,\vartheta) = P_{0,1}((z-a)/\rho,\vartheta)$, quindi possiamo ridurci al caso $a = 0, \rho = 1$.

1.
$$P_{0,1}(z,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\Re\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z} = \frac{1}{2\pi}\Re\frac{(e^{i\vartheta}+z)(e^{-i\vartheta}-\bar{z})}{|e^{i\vartheta}-z|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2} \ge 0.$$

2.
$$\int_0^{2\pi} P(z,\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = \Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\mathrm{d}\vartheta\right] = \Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{b\mathbb{D}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{b\mathbb{D}}\frac{z\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-z)}\right].$$

(dove posso spostare la parte reale da dentro a fuori dell'integrale, perché esso è effettuato su un intervallo di $\mathbb{R}$). Detta $f(\zeta) = \frac{z}{\zeta(\zeta-z)}$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \setminus \{0,z\})$ e si ha quindi che l'espressione di sopra è pari a $\Re(1 + \mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,z))$.

Calcoliamo quindi i due residui:

$$\mathrm{Res}(f,0) = \left(\text{ integrale di Cauchy, che equivale a valutare } \tfrac{z}{\zeta - z} \text{ in } \zeta = 0 \right) = -1$$
$$\mathrm{Res}(f,z) = \left(\text{ valutazione di } \tfrac{z}{\zeta} \text{ in } \zeta = z \right) = 1$$

Ne risulta $\int_0^{2\pi} P(z,\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = 1$.

3. Se $|z| < 1$ si ha

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} P(z,\vartheta)h(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta - h(\vartheta_0) = \int_0^{2\pi} P(z,\vartheta)[h(\vartheta) - h(\vartheta_0)]\mathrm{d}\vartheta$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per la continuità di h - e la sua uniforme continuità, dato che è definita su un compatto - esiste $\delta > 0$ (dipendente solo da ε) tale che $|h(\vartheta) - h(\vartheta_0)| < \varepsilon$ per $|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| < \delta$. Sia $M = \max_{b\mathbb{D}} |h|$. Poiché $P \geq 0$, si ha

$$|\Phi(z)| \leq \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| < \delta} P(z,\vartheta)\varepsilon \mathrm{d}\vartheta + 2M \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| \geq \delta} P(z,\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \leq$$
$$\leq \varepsilon + \frac{M}{\pi} \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| \geq \delta} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\vartheta} - z|^2} \mathrm{d}\vartheta$$

Poiché ci interessa il limite per $z \to e^{i\vartheta_0}$, possiamo effettuare una stima per $|e^{i\vartheta} - z|^2 \geq \varepsilon$ al variare di ϑ in modo che $|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| \geq \delta$, e $|z|^2 \geq 1 - \varepsilon^2$: avremo $|\Phi(z)| \leq \varepsilon + 4\pi M \varepsilon$, e, data l'arbitrarietà di ε, $\lim_{z \to e^{i\vartheta_0}} \Phi(z) = 0$. Il limite è uniforme perché, come si può verificare più dettagliatamente, le nostre stime valgono in un disco centrato in $e^{i\vartheta_0}$ il cui raggio non dipende da ϑ_0. $\square$

Veniamo dunque alla *formula di rappresentazione*:

Corollario 10.1 *Se u è una funzione di 2 variabili, armonica su $\Delta(a,\rho)$ e continua su $\overline{\Delta(a,\rho)}$, allora per ogni $z \in \Delta(a,\rho)$ vale*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta.$$

Dim. $P_{a,\rho} = \Re f(z,\vartheta)$ dove $f(z,\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho e^{i\vartheta} + (z-a)}{\rho e^{i\vartheta} - (z-a)}$ è una funzione olomorfa in z su $\Delta(a,\rho)$. Sia

$$v(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta = \Re \int_0^{2\pi} f(z,\vartheta) u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta = \Re g(z).$$

g è una funzione olomorfa: la funzione integranda è derivabile con continuità nella variabile $\bar{z}$, dunque è lecito scambiare la derivata con l'integrale:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z,\vartheta) u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta = 0.$$

Allora, anche v è una funzione armonica su $\Delta(a,\rho)$ che, per il terzo punto della proposizione precedente, si prolunga ad una funzione continua su $\overline{\Delta(a,\rho)}$, che coincide con u su $b\Delta(a,\rho)$. Ma allora, per il principio del massimo (e del minimo), u e v coincidono su tutto $\Delta(a,\rho)$. $\square$

Dalla dimostrazione si ha anche la risoluzione del *problema di Dirichlet* in 2 variabili su un disco: ovvero, la costruzione di una funzione armonica sul disco che coincida, sul bordo di questo, con una funzione continua assegnata.

Corollario 10.2 *Se h è una funzione continua su $\{|z-a| = \rho\}$, esiste ed è unica una funzione u continua su $\overline{\Delta(a,\rho)}$ ed armonica nell'interno tale che $u|_{\{|z-a|=\rho\}} = h$.*

Dim. La funzione cercata è $u(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) h(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$ che, analogamente a quanto dimostrato sopra, è armonica (ed è l'unica funzione armonica che sul bordo coincide con h). $\square$

Tramite la formula di rappresentazione è possibile dimostrare, nel caso di funzioni armoniche di 2 variabili, i seguenti due risultati, validi anche per funzioni armoniche in n variabili.

Proposizione 10.5 *Sia* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni armoniche sull'aperto* Ω*, convergente ad* u *uniformemente sui compatti contenuti in* Ω*. Allora* u *è armonica.*

Dim. Dimostriamo che u è localmente armonica per ogni $a \in \Omega$. Sia $\rho > 0$ tale che $\overline{\Delta(a,\rho)} \subset \Omega$, e consideriamo il nucleo di Poisson $P = P_{a,\rho}$. Per ogni k vale la formula di rappresentazione $u_k(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta)u_k(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$: poiché $\overline{\Delta(a,\rho)}$ è un compatto, su di esso la successione delle u_k converge uniformemente. Allora è possibile passare al limite sotto il segno di integrale: $u(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta)u(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$. Poiché vale la formula di rappresentazione, u è armonica su $\Delta(a,\rho)$ (deriva dalla dimostrazione). □

Teorema 10.2 (Proprietà della media) *Sia* u *continua su* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$*.* u *è armonica su* Ω *se e solo se per ogni* $a \in \Omega$*,* $\rho > 0$ *tale che* $\overline{\Delta(a,\rho)} \subseteq \Omega$*, il suo valore in* a *è uguale al valor medio assunto sul bordo della circonferenza:*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta(a,\rho)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - a}\mathrm{d}\zeta.$$

Dim. $\Rightarrow$) Osserviamo che $P_{a,\rho}(a,\vartheta) = 1/2\pi$: la prima uguaglianza è un caso particolare della formula di rappresentazione. La seconda invece si ottiene dal cambio di variabile $\zeta = a+\rho e^{i\vartheta}$.

$\Leftarrow$) Fissati a e ρ, sia $v : \Delta = \Delta(a,\rho) \to \mathbb{R}$ la funzione armonica che coincide con u sulla circonferenza $\{|z-a| = \rho\}$. Detta $w = u - v$, w (definita su Δ) è somma di due funzioni per cui vale la proprietà della media, dunque essa vale anche per w.

Per w vale il principio del massimo: sia $U \subseteq \Omega$ un aperto limitato. Se $z_0 \in U$ è un punto di massimo interno, sia $S = \{z \in \Delta | w(z) = w(z_0)\}$. S è chiaramente chiuso in U; preso $z_0 \in S$, sia $\delta > 0$ tale che $A = \overline{\Delta(z_0,\delta)} \subseteq U$; se per qualche punto $z_1 \in A$ valesse $w(z_1) < w(z_0)$, sarebbe $w(z) < w(z_0)$ in un intorno di z_1, dunque detto $\rho_0 = |z_1 - z_0| \leq \delta$ si avrebbe $w(z_0) > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z_0+\rho_0 e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$, contro la nostra ipotesi. Allora S è intorno di ogni suo punto, cioè è aperto: quindi è unione di componenti connesse di U. Varrà dunque $\max_{\bar{U}} w = \max_b w$. Analogamente si dimostra che per w vale il principio del minimo.

Poiché $w|_{b\Delta} \equiv 0$, si ha $w \equiv 0 \Rightarrow u|_\Delta \equiv v$; cioè, u è armonica su Δ, ma data l'arbitrarietà di a e ρ è armonica su tutto Ω. □

Lezione 11

11.1 Funzioni semicontinue superiori

Definizione 11.1 *Sia* Ω *un aperto connesso di* $\mathbb{R}^n$. *Una funzione* $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, *tale che* $u \not\equiv -\infty$, *si dice* semicontinua superiormente *se vale una delle seguenti:*

- *per ogni* $\boldsymbol{a} \in \Omega$ *si ha* $\limsup\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} u(\boldsymbol{x}) \leq u(\boldsymbol{a})$;
- *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$, *l'insieme* $\{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < \lambda\}$ *è aperto.*

Notazioni. Nel caso non fosse chiaro, per $\limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}}$ si intende automaticamente $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, ai fini di non appesantire le notazioni.

Le due definizioni sono equivalenti.

- Se $\forall\, \boldsymbol{a} \in \Omega$ $\limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} u(\boldsymbol{x}) \leq u(\boldsymbol{a})$, fissiamo λ e supponiamo che esista $\boldsymbol{x}_0$ tale che $u(\boldsymbol{x}_0) < \lambda$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, per definizione di limite superiore, dovrà esistere un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ in cui $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon$, e scegliamo ε tale che $u(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon = \lambda$. Ne risulta che $\{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < \lambda\}$ è un aperto.
- Se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < \lambda\}$ è aperto, supponiamo per assurdo che esista $\boldsymbol{a} \in \Omega$ tale che $L = \limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} u(\boldsymbol{x}) > u(\boldsymbol{a})$. Allora, se $u(\boldsymbol{a}) < \lambda < L$, sia $A = \{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < \lambda\}$. $\boldsymbol{a} \in A$, tuttavia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ tale che $u(\boldsymbol{x}_n) > L - \varepsilon$; prendiamo ε tale che $L - \varepsilon > \lambda$. Allora $\forall n$ $\boldsymbol{x}_n \notin A$. Dunque non esiste alcun intorno di $\boldsymbol{a}$ contenuto in A, cioè A non è aperto, contro le nostre ipotesi.

Esiste un'analoga definizione di funzione *semicontinua inferiormente*: in questo caso si assume che la funzione possa prendere valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Delle funzioni semicontinue superiori esaminiamo solo alcune proprietà che ci serviranno nello studio delle *funzioni subarmoniche.*

Osservazione. Le funzioni semicontinue superiori sono misurabili secondo Lebesgue: poiché gli insiemi $\{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < \lambda\}$ sono aperti, sono anche misurabili. $\diamond$

Proposizione 11.1 *Siano* $u, v : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *dove* Ω *è un aperto connesso di* $\mathbb{R}^n$.

1. *Se* u *è semicontinua superiore, allora* u *ammette massimo su ogni compatto.*

2. Se u, v sono semicontinue superiori, lo è anche w definita come $w(\boldsymbol{x}) = \max(u(\boldsymbol{x}), v(\boldsymbol{x}))$.

Dim. *1.* Sia K un compatto; allora $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < n\}$ è un ricoprimento aperto di K. Essendo K compatto si può estrarre un sottoricoprimento finito, il che vuol dire che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset \{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < N\}$: cioè, u è limitata su K.

Sia $M = \sup_K u$, e sia $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione tale che $u(\boldsymbol{x}_n) > M - 1/n$ per ogni n. Essendo K compatto, esisterà una sottosuccessione tendente ad $\boldsymbol{x}_0 \in K$: allora $M \leq \limsup_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} u(\boldsymbol{x})$ perché abbiamo la successione $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0$, per cui si ha $u(\boldsymbol{x}_{n_k}) \to M$; $\limsup_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} u(\boldsymbol{x}) \leq u(\boldsymbol{x}_0)$ perché u è semicontinua superiore; ma $\leq u(\boldsymbol{x}_0) \leq M$ per definizione di M, dunque $u(\boldsymbol{x}_0) = M$, cioè M è un massimo.

2. Proviamo che per w vale la seconda definizione di funzione semicontinua superiore: fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{\boldsymbol{x} \in \Omega | w(\boldsymbol{x}) < \lambda\} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega | u(\boldsymbol{x}) < \lambda\} \cap \{\boldsymbol{x} \in \Omega | v(\boldsymbol{x}) < \lambda\}.$$

Essendo u, v semicontinue superiori, i due insiemi che intersechiamo sono aperti; dunque l'intersezione è aperta. □

Si verifica facilmente, inoltre, che se u e v sono semicontinue superiori, e $a, b \geq 0$ sono costanti reali, $au + bv$ è semicontinua superiore. In particolare se u è continua ed $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$, $au + bv$ è semicontinua superiore.

Proposizione 11.2 *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente e superiormente limitata. Allora esiste una successione di funzioni continue $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$, che converge puntualmente decrescendo ad u.*

Dim. Sia $M = \sup_\Omega u \leq +\infty$. Per ogni $k \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x} \in \Omega$, definiamo $u_k(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\boldsymbol{y}\in\Omega} (u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)$. Dimostriamo che tale successione soddisfa la tesi.

Notiamo innanzitutto che, per ogni k e $\boldsymbol{x}$, preso $\boldsymbol{y} \in \Omega$ tale che $u(\boldsymbol{y}) > -\infty$, si ha $u_k(\boldsymbol{x}) \geq u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| > -\infty$; mentre $u_k(\boldsymbol{x}) \leq M$: dunque le u_k sono a valori in $\mathbb{R}$.

Per definizione si ha inoltre $u_k(\boldsymbol{x}) \geq u(\boldsymbol{x})$, e la successione delle u_k è decrescente in quanto, se banalmente si ha $u(\boldsymbol{y}) - (k+1)|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, vale anche

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in\Omega}[u(\boldsymbol{y}) - (k+1)|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|] \leq \sup_{\boldsymbol{y}\in\Omega}[u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|] \Rightarrow u_{k+1}(\boldsymbol{x}) \leq u_k(\boldsymbol{x}).$$

Le u_k sono continue: se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \Omega$, per ogni $\boldsymbol{y} \in \Omega$ si ha

$u_k(\boldsymbol{x}) \geq u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \geq [u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}'|] - k|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}| \Rightarrow$ (passando al sup) $u_k(\boldsymbol{x}) \geq u_k(\boldsymbol{x}') - k|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|$

e scambiando il ruolo di $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{x}'$, $u_k(\boldsymbol{x}') \geq u_k(\boldsymbol{x}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$, dunque

$$-k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \leq u_k(\boldsymbol{x}) - u_k(\boldsymbol{x}') \leq k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$$

cioè le u_k sono lipschitziane, e quindi continue.

Dimostriamo ora che $\lim_{k\to+\infty} u_k(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \Omega$; cominciamo dal caso $u(\boldsymbol{x}) > -\infty$. Dato $\varepsilon > 0$, sia

$$\Omega_\varepsilon = \{\boldsymbol{y} \in \Omega | u(\boldsymbol{y}) < u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\}.$$

Ω_ε è un intorno aperto di $\boldsymbol{x}$; sia $\delta > 0$ tale che $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subseteq \Omega_\varepsilon$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $M - k_0\delta < u(\boldsymbol{x})$. Allora, se $\boldsymbol{y} \in \Omega_\varepsilon$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq u(\boldsymbol{y}) < u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon$$

mentre se $\boldsymbol{y} \notin \Omega_\varepsilon$ e $k \geq k_0$ si ha $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| > \delta$ e dunque

$$u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq M - k_0\delta < u(\boldsymbol{x}).$$

Quindi, per ogni $\boldsymbol{x} \in \Omega$ e $k > k_0$ si ha $u_k(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{y}\in\Omega}[u(\boldsymbol{y}) - k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|] \leq u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon$. Avevamo già osservato $u(\boldsymbol{x}) \leq u_k(\boldsymbol{x})$; dunque $u_k(\boldsymbol{x}) \downarrow u(\boldsymbol{x})$ per $k \to +\infty$.

Vediamo ora il caso $u(\boldsymbol{x}) = -\infty$. Fissato $c > 0$, sia $\Omega_c = \{\boldsymbol{y} \in \Omega | u(\boldsymbol{y}) < -c\}$; Ω_c è un aperto, dunque contiene un disco $B(\boldsymbol{x}, \delta)$. Suddividendo i casi $\boldsymbol{y} \in \Omega_c$ ed $\boldsymbol{y} \notin \Omega_c$ come prima, si ottiene $u_k(\boldsymbol{x}) \leq \max(-c, M - k\delta) = c$ per k sufficientemente grande. Data l'arbitrarietà di c, $u_k(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ per $k \to +\infty$. □

11.2 Funzioni subarmoniche: definizioni

Daremo due definizioni diverse di funzione subarmonica: la prima valida per le funzioni di classe C^2, la seconda per funzioni semicontinue superiori (che dimostreremo essere una generalizzazione della prima).

Definizione 11.2 *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 si dice* subarmonica *se $\triangle u \geq 0$; se $\triangle u > 0$, u si dice* strettamente subarmonica.

Esempi (prime proprietà).

1. $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ è subarmonica, in quanto $\triangle u = 2n$.
2. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Allora $u = |f|^2$ è subarmonica, in quanto
$$\triangle u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|^2 \geq 0.$$
3. Sia u subarmonica, $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente crescente e convessa ($\chi' \geq 0, \chi'' \geq 0$). Allora $v = \chi \circ u$ è subarmonica, infatti $v_{x_j} = \chi'(u)u_{x_j}$ e $v_{x_jx_j} = \chi''(u)u_{x_j}^2 + \chi'(u)u_{x_jx_j}$; dunque $\triangle v = \chi'(u) \triangle u + \chi''(u)|\nabla u|^2 \geq 0$.
4. Siano u subarmonica su $\mathbb{C}$, f olomorfa. Allora $v = u \circ f$ è subarmonica, poiché si ha
$$\triangle v = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}\left|\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right|^2 \geq 0.$$
5. Le funzioni subarmoniche costituiscono un *cono*: se u, v sono funzioni subarmoniche e $a, b > 0$, anche $au + bv$ è subarmonica.

Anche per le funzioni subarmoniche vale il principio del massimo (ma non quello del minimo): per quelle di classe C^2 è di fatto già dimostrato:

Proposizione 11.3 (Principio del massimo) *Sia $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Se u è subarmonica, allora*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{b\Omega} u.$$

Dim. Identica a quella del principio del massimo per funzioni armoniche. □

Il principio del massimo vale in forma forte: se u non è costante si ha $u(x) < \max_{b\Omega} u$ per ogni $x \in \Omega$. Ne segue che le funzioni subarmoniche non costanti non possono avere massimi locali.

Veniamo quindi alla definizione più generale (per la quale ci restringiamo direttamente a funzioni in 2 variabili reali/1 variabile complessa):

Definizione 11.3 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una funzione semicontinua superiore. u si dice* subarmonica *se, comunque presi $U \subseteq \Omega$ aperto limitato e h una funzione armonica su U e continua su $\bar{U}$, vale la seguente implicazione:*

$$u|_{bU} \leq h|_{bU} \Rightarrow u|_{\bar{U}} \leq h.$$

e vediamo immediatamente una forma equivalente:

Proposizione 11.4 *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una funzione semicontinua superiore. Allora le proprietà seguenti sono equivalenti:*

1. *u è subarmonica;*
2. *se $U \subseteq \Omega$ è un aperto limitato e h è una funzione continua su $\bar{U}$ ed armonica su U, allora $\max_{\bar{U}}(u-h) = \max_{bU}(u-h)$ (cioè vale il principio del massimo per $u-h$).*

Dim. *1.⇒ 2.* Sia h una funzione armonica su U, e sia $z_0 \in U$ un punto di massimo interno per $u-h$. Detto $M = \max_{bU}(u-h)$, $M+h$ è ancora una funzione armonica, e vale $u|_{bU} \leq (M+h)|_{bU}$. Allora $u \leq M+h \Rightarrow M \geq u-h$ su tutto $\bar{U}$ per la definizione di funzione subarmonica.

2.⇒ 1. Sia h una funzione armonica tale che $u|_{bU} \leq h|_{bU}$. Per $u-h$ vale il principio del massimo, dunque $(u-h)|_{bU} \leq 0 \Rightarrow u|_{\bar{U}} - h \leq 0$. □

Osservazione. Un corollario banale, ponendo $h \equiv 0$, è che per le funzioni subarmoniche (qualunque) vale il principio del massimo. ◇

Vediamo quindi che l'equivalenza delle due definizioni date sulle funzioni di classe C^2.

Proposizione 11.5 *Sia $u \in C^2(\Omega)$. Allora u è subarmonica (secondo la definizione generale) se e solo se $\triangle u \geq 0$.*

Dim. ⇐) Se $\triangle u \geq 0$, consideriamo un $U \subset \Omega$ aperto limitato ed una h continua su $\bar{U}$ ed armonica su U. Allora $\triangle(u-h) = \triangle u \geq 0$, dunque vale il principio del massimo per $u-h$: poiché ciò vale per ogni U ed h, u è subarmonica.

⇒) Supponiamo u subarmonica, e per assurdo che esista $z_0 \in \Omega$ tale che $\triangle u(z_0) < 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\triangle u(z) < 0 \, \forall \, z \in \Delta(z_0, \delta)$ (e possiamo supporre che Ω contenga la chiusura di tale disco). Sia h la funzione armonica su $\Delta(z_0, \delta)$ (e continua sulla chiusura) tale che, per $|z - z_0| = \delta$, si abbia $u(z) = h(z)$. Allora, per definizione di funzione subarmonica, si ha $u \leq h$ su $\Delta(z_0, \delta)$, e non può essere $u \equiv h$ altrimenti non potrebbe essere $\triangle u(z_0) < 0$. Quindi $u - h$ ha un minimo negativo sul compatto $\overline{\Delta(z_0, \delta)}$, che non può trovarsi sul bordo; sia $\tilde{z}$ un punto di minimo. Allora dovrebbe essere $0 \leq \triangle(u-h)(\tilde{z}) = \triangle u(\tilde{z}) < 0$, assurdo. □

Lezione 12

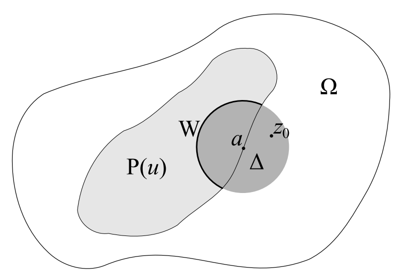
12.1 Proprietà della submedia

Nel capitolo precedente abbiamo trovato alcune definizioni equivalenti di funzione subarmonica. In questa sezione vedremo un'utile proprietà caratterizzante le funzioni subarmoniche: quella della *submedia*. Prima di parlarne, però, dimostriamo un teorema che ci assicura alcune proprietà che ci saranno necessarie:

Teorema 12.1 *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una funzione subarmonica su Ω. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. *$P(u) = \{z \in \Omega | u(z) = -\infty\}$ è un insieme magro (cioè, ha parte interna vuota).*
2. *Se $\overline{\Delta(a, \rho)} \subset \Omega$, allora*
$$\int_0^{2\pi} |u(a + \rho e^{i\vartheta})| \mathrm{d}\vartheta < +\infty$$
cioè $w(\vartheta) = u(a + \rho e^{i\vartheta})$ è sommabile secondo Lebesgue sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Dim. *1*. Per definizone di funzione semicontinua superiore, $P(u) \subsetneq \Omega$. Supponiamo per assurdo che la parte interna di $P(u)$ non sia vuota.



Allora consideriamo $a \in b[P(u)^\circ]$ e $\delta > 0$ tali che $\overline{\Delta(a, \delta)} \subseteq \Omega$, che esista $z_0 \in \Delta(a, \delta) \setminus P(u)$, e che $b\Delta(a, \delta) \cap P(u)$ contenga un aperto $W \neq \varnothing$ di $b\Delta(a, \delta)$; a sua volta, W conterà un compatto K con parte interna non vuota. Poiché u è semicontinua superiore, è superiormente limitata su $\overline{\Delta(a, \delta)}$ che è un compatto (e lo è anche in un intorno, "allargando" leggermente il disco: vedi la seconda definizione di funzione semicontinua superiore); allora si è visto che esiste una successione decrescente $\{u_k\}$ di funzioni continue su un intorno di $\overline{\Delta(a, \delta)}$ che converge puntualmente ad u. Definiamo
$$h_k(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\delta}(z, \vartheta) u_k(a + \delta e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta.$$

Le h_k saranno delle funzioni armoniche su $\Delta(a, \delta)$, che coincidono con le rispettive u_k sulla circonferenza centrata in a di raggio δ. In particolare, se $|z - a| = \delta$, vale $h_k(z) =$

$u_k(z) \geq u(z)$. Per definizione di funzione subarmonica si avrà allora $u(z) \leq h_k(z)$ anche all'interno del disco, e in particolare $u(z_0) \leq h_k(z_0)$.

Poiché K è compatto, per ogni $M > 0$ esiste k_0 tale che per ogni $k \geq k_0$ si abbia $u_k < -M$ su K: infatti detto $A_k = \{z \in K | u_k(z) < -M\}$, la famiglia $\{A_k | k \in \mathbb{N}\}$ è crescente (perché la successione delle u_k è decrescente) e costituisce un ricoprimento aperto di K, da cui si può estrarre un sottoricoprimento finito, ma allora K è ricoperto dal più grande di questi insiemi (A_{k_0}). Fissato M, poiché $P_{a,\delta}(z, \vartheta) \geq 0$ si ha, per tutti i $k \geq k_0$,

$$-\infty < u(z_0) \leq h_k(z_0) = \int_0^{2\pi} P_{a,\delta}(z_0, \delta) u_k(a + \delta e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta =$$
$$\int_K P_{a,\delta}(z_0, \delta) u_k(a + \delta e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta + \int_{[0,2\pi] \setminus K} P_{a,\delta}(z_0, \delta) u_k(a + \delta e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta \leq$$
$$-M \int_K P_{a,\delta}(z_0, \delta) \mathrm{d}\vartheta + \int_{[0,2\pi] \setminus K} P_{a,\delta}(z_0, \delta) |u_k(a + \delta e^{i\vartheta})| \mathrm{d}\vartheta \leq -Ma + b$$

dove si sono prese le costanti $a = \int_K P_{a,\delta}(z_0, \delta) \mathrm{d}\vartheta > 0$, indipendente da k, e $b = \max |u_1| \geq u_k \; \forall k$. Poiché M è arbitrariamente grande, si ottiene l'assurdo $u(z_0) = -\infty$.

2. Non ci soffermiamo sulla misurabilità secondo Lebesgue della funzione $u(a + \delta e^{i\vartheta})$ su $[0, 2\pi]$, che si ottiene facilmente nello stesso modo in cui si è osservata quella di u su Ω parlando di funzioni semicontinue superiori.

Consideriamo ancora due successioni $u_k \downarrow u$ e h_k come nel primo punto, e sia $M = \max_{\overline{\Delta(a,\rho)}} u_1$: allora $u_k(z) \leq M \; \forall \, k \in \mathbb{N}, z \in \overline{\Delta(a, \rho)}$.

Per ogni k definiamo le funzioni $u_k^-(z) = \min\{u_k(z), 0\}$ e $u_k^+(z) = \max\{u_k(z), 0\}$, cosicché $u_k = u_k^- + u_k^+$. Analogamente $u = u^+ + u^-$. Queste funzioni ora definite sono tutte misurabili, e si ha $|u_k| = u_k^+ - u_k^-$, $|u| = u^+ - u^-$. Dunque

$$\int_0^{2\pi} |u(a + \delta e^{i\vartheta})| \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} u^+(a + \delta e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta - \int_0^{2\pi} u^-(a + \delta e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta.$$

Nel primo addendo viene integrata una funzione non negativa che è maggiorata da u_1^+, la quale è continua e quindi sommabile su $[0, 2\pi]$. Sarà quindi sommabile anche u^+: il primo addendo è finito. Soffermiamoci ora sul secondo.

Per il primo punto, deve esistere $z_0 \in \Delta(a, \rho)$ tale che $u(z_0) > -\infty$. Se $c = \sup_\vartheta P_{a,\rho}(z, \vartheta)$,

$$-\infty < u(z_0) \leq h_k(z_0) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0, \vartheta) u_k(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta \leq 2\pi c M + \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0, \vartheta) u_k^-(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$$

usando la scomposizione $u_k = u_k^+ + u_k^-$. Per il teorema di Beppo Levi (la successione $\{-P_{a,\rho}(z_0, \cdot) u_k^-\}$ è non negativa e crescente a $-P_{a,\rho}(z_0, \cdot) u^-$)

$$0 \leq -\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0, \vartheta) u^-(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta = \lim_{k \to +\infty} -\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0, \vartheta) u_k^-(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta \leq 2\pi c M - u(z_0) < +\infty.$$

Ma, detto $m = \min_\vartheta P_{a,\rho}(z_0, \vartheta)$, si ha $m > 0$ in quanto $|z_0 - a| < \rho$. Quindi vale

$$0 \leq -m \int_0^{2\pi} u^-(a + \rho e^{i\vartheta}) \leq -\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0, \vartheta) u^-(a + \rho e^{i\vartheta}) < +\infty$$

e la tesi è dimostrata. □

Osservazione. Dal secondo punto segue che l'insieme $\{z \in \Omega : u(z) = -\infty, |z-a| = \rho\}$ ha misura nulla per ogni $a \in \Omega$ e ρ come nell'enunciato. $\diamond$

Teorema 12.2 (Proprietà della submedia) *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una funzione semicontinua superiore. u è subarmonica se e solo se per ogni $a \in \Omega$ esiste $R > 0$ (dipendente da a) tale che $\overline{\Delta(a,R)} \subset \Omega$ e per ogni $0 < \rho < R$ vale la disuguaglianza*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta.$$

Dim. $\Rightarrow$) Sia $R > 0$ tale che $\overline{\rho(a,R)} \subset \Omega$. Utilizziamo ancora una successione $u_k \downarrow u$ come nel teorema precedente, a cui associamo come prima delle h_k armoniche su $\rho(a,R)$ e continue sulla chiusura, definite da $h_k(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u_k(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$. Come prima, varrà $h_k \geq u_k$ su tutto il disco chiuso. E ripetendo gli stessi passaggi, per ogni $z \in \rho(a,\rho)$ si ha

$$\begin{gathered} u(z) \leq h_k(z) = \textstyle\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u_k(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta = \\ = \textstyle\int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u_k^+(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta + \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u_k^-(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta. \end{gathered}$$

Osservando che $0 \leq P_{a,\rho}(z,\vartheta) u_k^+(a + \rho e^{i\vartheta}) \leq P_{a,\rho}(z,\vartheta) u_1^+(a + \rho e^{i\vartheta})$, e che l'ultima è una funzione sommabile, si può applicare il teorema di Lebesgue di convergenza dominata per passare $k \to +\infty$ nel primo addendo del secondo membro. E come osservato nella dimostrazione precedente, si può applicare il teorema di Beppo Levi (per la precisione, sulla successione cambiata di segno) per fare lo stesso sul secondo addendo. Si ha quindi

$$u(z) \leq \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta \tag{12.1}$$

e per $z = a$, poiché $P_{a,\rho}(a,\vartheta) = 1/2\pi$,

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta.$$

$\Leftarrow$) Per dimostrare il viceversa, ci basiamo sulla proposizione 11.4. Supponiamo che u soddisfi la proprietà della submedia; detti U un aperto limitato tale che $\bar{U} \subset \Omega$, ed h una funzione continua su $\bar{U}$ ed armonica su Ω, sia $w = u - h$. Anche per w varrà la proprietà della submedia, in quanto è somma di una funzione per cui essa vale e di una per cui vale la proprietà della media.

Supponiamo per assurdo allora che per w non valga il principio del massimo, cioè che esista $z_0 \in U$ per cui $w(z_0) > \sup_{bU} w$; ovvero $\max_{\bar{U}} w > \max_{bU} w$. Sia $a \in U$ un punto di massimo per w: chiaramente $w(a) > -\infty$.

Sia V la componente connessa di U contenente a, e sia $E = \{z \in V | w(z) = w(a)\}$. Poiché $V \setminus E = \{z \in V | w(z) < w(a)\}$ è aperto in V per definizione di funzione semicontinua superiore, E è chiuso in V. Dimostriamo ora che E è anche aperto.

Sia $b \in E$, $R > 0$ tale che $\overline{\Delta(b,R)} \subset U$ (e quindi $\subset V$ perché i dischi sono connessi): vogliamo dimostrare che w è costante su $\overline{\Delta(b,R)}$. Se per assurdo per qualche $\rho < R, \vartheta_0 \in [0,2\pi]$ si ha $w(b + \rho e^{i\vartheta_0}) < w(b) - \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$, sempre per definizione di funzione semicontinua superiore si ha $w(b+\delta e^{i\vartheta}) < w(b) - \varepsilon$ per tutti i $\vartheta \in A$ aperto di $[0, 2\pi]$. A, essendo un aperto non vuoto, avrà misura di Lebesgue positiva.

Dalla proprietà della submedia si ha quindi

$$w(a) = w(b) \leq \tfrac{1}{2\pi} = \int_0^{2\pi} w(b+\delta e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta = \int_A w(b+\delta e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta + \int_{[0,2\pi]\setminus A} w(b+\delta e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta = \tfrac{1}{2\pi}[w(a)-\varepsilon]\mathrm{mis}(A) + \tfrac{1}{2\pi}w(a)\mathrm{mis}(A) < w(a), \text{ assurdo.}$$

Abbiamo così dimostrato che per ogni E è intorno di ogni suo punto b, cioè è aperto. Essendo E aperto e chiuso in V che è connesso, si ha $E = V$, ma allora $\max_{bU} u \geq \max_{bV} u \geq u(a)$ per la semicontinuità: la nostra ipotesi si è rivelata assurda. □

Corollario 12.1 *Detta u una funzione semicontinua superiore, la proprietà "u è subarmonica" ha carattere locale: ovvero, se Ω è un dominio di $\mathbb{C}$ tale che per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste un intorno U di z_0 su cui $u|_U$ è subarmonica, allora u è subarmonica su tutto Ω.*

Dim. Per ogni $z_0 \in \Omega$, se $\rho > 0$ è tale che $\overline{\Delta(z_0, \rho)} \subset U$, vale la proprietà della submedia integrando su un disco di raggio ρ centrato in z_0. Abbiamo già dimostrato che ciò equivale a dire che u è subarmonica su tutto Ω. □

Corollario 12.2 *Se u e v sono funzioni subarmoniche su Ω,*

- *per ogni $a, b > 0$ costanti la funzione $au+bv$ è subarmonica (le funzioni subarmoniche costituiscono un* cono*);*
- *la funzione $w(z) = \max\{u(z), v(z)\}$ è subarmonica.*

Dim. È immediato verificare che $au+bv$ è semicontinua superiormente e soddisfa la proprietà della submedia. Per quanto riguarda w, abbiamo già osservato che è semicontinua superiormente. Fissato $a \in \Omega$, $R > 0$ tale che su $\Delta(a, R)$ valga la proprietà della submedia per u e v, supponiamo senza perdita di generalità che $w(a) = u(a)$. Allora, se $\rho < R$,

$$w(a) = u(a) \leq \int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta \leq \int_0^{2\pi} w(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta,$$

cioè per w vale la proprietà della submedia. □

Corollario 12.3 *Sia $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una famiglia di funzioni subarmoniche su un dominio Ω, e sia $u(z) = \sup_{\alpha\in I} u_\alpha(z)$. Se u è semicontinua superiormente, allora è subarmonica.*

Dim. Se u è semicontinua superiore si ha, presi a e $\rho < R$ come sopra,

$$u(a) = \sup_\alpha u_\alpha(a) \leq \sup_\alpha \int_0^{2\pi} u_\alpha(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta \leq \int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

quindi per u vale la proprietà della submedia. □

Corollario 12.4 *Se u è una funzione subarmonica su un dominio Ω, per ogni $a \in \Omega$ si ha $u(a) = \limsup_{z\to a} u(z)$.*

Dim. Per definizione di funzione subarmonica si ha $l = \limsup_{z\to a} \leq u(a)$. Se per essurdo $l < l' < u(a)$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $0 < \rho < \delta$ vale $u(a + \rho e^{i\vartheta}) \leq l'$: dunque per la submedia $u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) < l'$, assurdo. □

Corollario 12.5 *Se u e $-u$ sono funzioni subarmoniche su un dominio Ω, allora u è armonica su Ω.*

Dim. Innanzitutto u è continua, perché per ogni $a \in \Omega$ valgono $u(a) = \limsup_{z\to a} u(z)$ e $-u(a) = \limsup_{z\to a}[-u(z)] \Rightarrow u(a) = \liminf_{z\to a} u(z)$: cioè, $u(a) = \lim_{z\to a} u(z)$.

Per la proprietà della submedia applicata ad u e $-u$, esiste $R > 0$ tale che per $\rho < R$ valgono

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta \quad \text{e} \quad -u(a) \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$$

cioè, $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$: ma allora u è una funzione continua per la quale vale la proprietà della media, quindi è armonica. □

12.2 Proprietà delle funzioni subarmoniche

In questa sezione vedremo alcune proprietà delle funzioni subarmoniche riguardanti la possibilità di estenderle e le loro relazioni con le funzioni olomorfe.

Proposizione 12.1 *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e non è identicamente nulla, le funzioni $u = \log|f|$ e $v_\alpha = |f|^\alpha$ con $\alpha > 0$ sono subarmoniche su Ω.*

Dim. La funzione $u = \log|f|$ è semicontinua superiormente in quanto, dato $c \in \mathbb{R}$, si ha $\{z \in \Omega : u(z) < c\} = \{z \in \Omega : |f(z)| < e^c\}$ che è aperto; inoltre $u \not\equiv 0$ per ipotesi.

Come si è già osservato, u è armonica (e quindi subarmonica) nell'insieme $\{z \in \Omega | f(z) \neq 0\}$. nell'intorno di ogni punto di quest'insieme, infatti, u è la parte reale di una determinazione di $\log f$, e la parte reale di una funzione olomorfa è armonica.

Rimane da dimostrare che è subarmonica in un intorno ogni punto $a \in \Omega$ in cui $u(a) = -\infty$ (cioè $f(a) = 0$). Poiché gli zeri di una funzione olomorfa sono discreti, esiste un $R > 0$ tale che in $\Delta(a, R)$, a sia l'unico zero per f. Per $0 < \rho < R$ vale banalmente la proprietà della submedia:

$$-\infty = u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$$

e ciò basta a dimostrare che u è subarmonica su tutto Ω.

Per le funzioni v_α vale all'incirca lo stesso: la verifica che sono semicontinue superiori è banale, ed inoltre assumono solo valori non negativi: quindi la proprietà della submedia vale banalmente per i punti $a \in \Omega$ in cui $f(a) = v_\alpha(a) = 0$.

Se $f(a) \neq 0$, esiste un intorno semplicemente connesso U di a in cui f non si annulla, sul quale è quindi definita una determinazione di $\log f$. Definiamo su U la funzione $g = e^{\frac{\alpha}{2}\log f}$: si avrà allora $v_\alpha = |g|^2$ su U, dunque v_α è localmente subarmonica in quanto modulo al quadrato di una funzione olomorfa (vedi esempi introduttivi). Quindi, v_α è subarmonica su tutto Ω. □

Proposizione 12.2 *Se $A \subset \Omega$ è un insieme discreto e $u \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$ è subarmonica su $\Omega \setminus A$, allora u è subarmonica su Ω.*

Dim. Fissato $a \in A$, sia $U \subset \Omega$ un intorno di a tale che $U \cap A = \{a\}$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \log|z-a|$. u_ε è semicontinua superiormente, e subarmonica su U: lo è su $U \setminus \{a\}$ perché è una combinazione lineare di due funzioni subarmoniche con coefficienti positivi , e lo è su un intorno di a perché $u_\varepsilon(a) = -\infty$ e quindi vale banalmente la proprietà della submedia.

Sia $\rho > 0$ tale che $\overline{\Delta(a,\rho)} \subset U$. Allora, preso $z_0 \in \Delta(a,\rho)$ ($z_0 \neq a$), vale la formula 12.1:

$$u_\varepsilon(z_0) = u(z_0) + \varepsilon \log|z_0 - a| \leq \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0,\vartheta) u_\varepsilon(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta.$$

La successione $\{u_{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed equilimitata dall'alto (essendo le u_ε continue) sulla circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$: con pochi adattamenti si può allora applicare il teorema di Beppo Levi ed ottenere, per $n \to +\infty$, il passaggio al limite

$$u(z_0) \leq \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z_0,\vartheta) u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$$

e tenendo conto della continuità di u, per $z_0 \to a$ si ottiene

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$$

cioè la proprietà della submedia vale per ogni $a \in A$. Dunque vale su tutto Ω. □

Proposizione 12.3 *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, e sia $A \subset \Omega$ un insieme chiuso tale che esista una funzione v subarmonica su Ω per la quale si abbia $A = \{z \in \Omega | v(z) = -\infty\}$. Allora ogni funzione continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subarmonica su $\Omega \setminus A$ è subarmonica su Ω.*

Dim. Come già dimostrato, $A^\circ = \varnothing$. Osserviamo che $A \subset U = \{z \in \Omega | v(z) < 0\}$ che è un aperto: per comodità, ci restringiamo ad U (su un intorno di $\Omega \setminus U$ la funzione u è subarmonica per ipotesi). Fissato $\varepsilon > 0$, $u + \varepsilon v$ è subarmonica su Ω: lo è su $U \setminus A$ perché è un elemento del cono generato da u e v; e lo è su A perché se $a \in A$, vale $(u + \varepsilon v)(a) = -\infty$ e la proprietà della submedia è banalmente vera.

Fissato $a \in A$, sia $\rho > 0$ tale che $\overline{\Delta(a,\rho)} \subset U$ e sia h_ρ la funzione armonica su $\Delta(a,\rho)$ definita da

$$h_\rho(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z,\vartheta) u(a + \rho e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta$$

(ricordiamo che u è continua). Se $|z-a|=\rho$ vale $(u+\varepsilon v)(z) \leq u(z) \leq h_\rho(z)$; poiché $u+\varepsilon v$ è subarmonica, si ha allora $u+\varepsilon v \leq h_\rho$ su $\Delta(a,\rho)$. Se $z \notin A$, possiamo passare al limite $\varepsilon \to 0$: $u(z) \leq h_\rho(z)$. Ma poiché u ed h_ρ sono continue e A è magro, possiamo passare al limite $z \to a$ (pensando di variare $z \in \Delta(a,\rho) \setminus A$):

$$u(a) \leq h_\rho(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

dunque, facendo variare ρ tra quelli "consentiti" si ottiene la proprietà della submedia per $a \in A$. u risulta quindi essere subarmonica su tutto U. □

Corollario 12.6 *Siano Ω e A come sopra. Se u è continua su Ω ed armonica su $\Omega \setminus A$, allora è armonica su Ω.*

Dim. Le funzioni u e $-u$ sono entrambe subarmoniche su $\Omega \setminus A$ e continue su Ω. Per la proposizione precedente, sono entrambe subarmoniche su Ω, ma abbiamo dimostrato che allora u è armonica su Ω. □

Le ipotesi della proposizione 12.3 possono essere indebolite:

Proposizione 12.4 *Siano Ω ed A come nella precedente proposizione. Se u è una funzione localmente limitata su Ω, continua e subarmonica su $\Omega \setminus A$, allora $u|_{\Omega\setminus A}$ si estende ad una funzione subarmonica su Ω.*

Notiamo che in quest'enunciato si richiede una funzione definita su tutto Ω, anche se poi la definizione su A viene "buttata via" e rimpiazzata: tutto ciò perché ci serve la locale limitatezza soprattutto su intorni di punti di A, e questo era il modo più semplice per esprimerlo.

Dim. Definiamo $w : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ponendo

$$w(a) = \begin{cases} u(a) & \text{se } a \in \Omega \setminus A \\ \limsup\limits_{z \to a, z \in \Omega\setminus A} u(z) & \text{se } a \in A \end{cases}$$

Notiamo che la locale limitatezza di u garantisce che in ogni punto $w < +\infty$. Vogliamo dimostrare che w è subarmonica su Ω: prima di tutto, verifichiamo che è semicontinua superiormente. La definizione è banalmente rispettata fuori da A. Supponiamo per assurdo che esistano $a \in A$ ed un $\varepsilon > 0$ tale che $L = \limsup_{z\to a} w(z) > w(a)+\varepsilon = \limsup_{z \to a, z \notin A} u(z)+\varepsilon$. Allora esiste una successione $\{z_n\} \subseteq A$ tale che $w(z_n) \to L$. Dato il modo in cui è definita w, e il fatto che A è chiuso e magro, per ogni z_n esisterà un $\tilde{z}_n \in \Omega \setminus A$ tale che $|z_n - \tilde{z}_n| < 1/n$, e $|w(z_n) - w(\tilde{z}_n)| < \varepsilon/3$.

Osserviamo che $|\tilde{z}_n - a| \leq |\tilde{z}_n - z_n| - |z_n - a| \to 0$, dunque $\tilde{z}_n \to a$; e si ha $|w(\tilde{z}_n) - L| \leq |w(\tilde{z}_n) - w(z_n)| + |w(z_n) - L| \leq 2\varepsilon/3$ per n sufficientemente grande. Ma poiché gli $\tilde{z}_n \in \Omega \setminus A$, $\limsup \tilde{w}(z_n) \leq w(a)$, dunque per n sufficientemente grande vale anche $w(\tilde{z}_n) < w(a)+\varepsilon/3$. Tuttavia $L - w(a) > \varepsilon$ e dunque non possono valere entrambe, assurdo.

Dimostriamo ora che w è subarmonica: ci restringiamo ad un U come nella precedente proposizione, perché fuori di esso w coincide con u.

Fissato $a \in A$, sia $R > 0$ tale che $\overline{\Delta(a, R)} \subset \Omega$ e definiamo, per $z \in \Delta(a, \mathbb{R})$,

$$h(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,R}(z, \vartheta)u(a + Re^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} P_{a,R}(z, \vartheta)w(a + Re^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

(l'uguaglianza tra i due integrali segue dall'osservazione dopo il teorema 12.1). Anche in questo caso si può dire che h è armonica: infatti, anche se il corollario 10.1 richiede l'ipotesi di u continua, per dire che la funzione definita tramite la formula di rappresentazione è armonica basta che l'integrando sia derivabile con continuità in $\bar{z}$, il che è vero (cade però l'uguaglianza di h ed u sulla circonferenza di centro R e raggio a).

Sia $\varepsilon > 0$; $w + \varepsilon v$ è subarmonica: fuori da A perché è nel cono generato da $w = u$ e v subarmoniche, e in un intorno di ogni punto di A perché v assume il valore $-\infty$. Consideriamo una successione $w_k \downarrow w + \varepsilon v$ di funzioni continue e definiamo delle relative funzioni armoniche h_k: si ha $w_k = h_k$ sulla circonferenza per ogni k e quindi $w + \varepsilon v \leq h_k$. Quest'ultima vale anche all'interno del disco per definizione di funzione subarmonica. I soliti teoremi di Lebesgue e Beppo Levi permettono di dire (comprimiamo un po' le scritture) che

$$\lim_{k\to+\infty} h_k = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} P_{a,R}w_k\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} P_{a,R}(w + \varepsilon v)\mathrm{d}\vartheta \leq \int_0^{2\pi} P_{a,R}w\mathrm{d}\vartheta = h \text{ su } \Delta(a, R)$$

e quindi $u + \varepsilon u \leq h$. Se $z \notin A$, per $\varepsilon \to 0$ si ha $w(z) = u(z) \leq h(z)$; mentre se $\tilde{z} \in A$, passo la disuguaglianza precedente "al limite superiore" per $z \notin A$, ottenendo $\limsup_{z\to\tilde{z}} u(z) = w(\tilde{z}) \leq h(\tilde{z})$.

Dunque w è subarmonica in a perché vale la proprietà della submedia (al variare di R fra tutti quelli ammissibili):

$$w(a) \leq h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(a + Re^{i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta.$$

In conclusione w è subarmonica fuori da A per costruzione, e in ogni punto di A. La tesi è dimostrata (spero!). □

La proposizione 12.3 permette di dimostrare un risultato sulle funzioni olomorfe:

Teorema 12.3 (di Rado) *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua ed olomorfa sull'insieme $U = \{z \in \Omega | f(z) \neq 0\}$. Allora f è olomorfa su Ω.*

Dim. Si può supporre $f \not\equiv 0$ altrimenti la tesi è banale. La funzione $v(z) = \log|f(z)|$ è subarmonica su U (secondo un risultato precedente) e per $z \in A = \Omega \setminus U$ vale $v(z) = -\infty$, dunque è banalmente vera la proprietà della submedia: quindi v è subarmonica su Ω.

Siano $u_1 = \Re f$, $u_2 = \Im f$: u_1 e u_2 sono funzioni continue su Ω, e armoniche su U; inoltre l'insieme A è chiuso. Dunque posso applicare la proposizione 12.3: u_1 e u_2 sono armoniche su tutto Ω, e in particolare di classe C^2: lo sarà quindi f, e ne deduciamo che $\partial f/\partial\bar{z}$ è continua.

Poiché v è subarmonica, A è magro, dunque U è denso in Ω. Poiché $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ per $z \in U$, dalla continuità abbiamo $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega$. Quindi f è olomorfa su Ω. □

Lezione 13

In questo capitolo ci occupiamo dell'esistenza di una soluzione al *problema di Cousin*. Esso può essere enunciato così: sia data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ senza punti di accumulazione, ed una successione di polinomi a coefficienti complessi $\{p_n(z)\}$. Vogliamo trovare una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ tale che i suoi poli siano tutti e soli gli a_n, e in ognuno di questi punti la parte negativa dello sviluppo di Laurent sia data da $p_n(1/(z-a_n))$.

Nella trattazione del problema di Cousin seguiremo una strada che non è la più veloce, tuttavia ci consente di esaminare alcuni altri risultati.

13.1 Funzioni a supporto compatto

Studieremo quest'argomento non solo in $\mathbb{C}$ ma in $\mathbb{R}^n$ generico. Fissiamo due compatti K_1 e $K_2 \subset \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$ tali che $K_1 \subset K_2^\circ$: data una funzione $u \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, ci proponiamo di trovare una funzione $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ tale che $u \equiv v$ su K_1, e $v \equiv 0$ fuori da K_2 (cioè, il *supporto* di v è contenuto in K_2).

Osservazione. È facile trovare una v come sopra se ci basta che sia continua (anziché C^∞). Detto $A = \mathbb{R}^n \setminus K_2$, definiamo

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A)}{\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, K_1) + \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, A)}.$$

Si trova facilmente che ϕ è continua, $\phi(\boldsymbol{x}) = 1$ se $\boldsymbol{x} \in K_1$, e il supporto di ϕ è K_2°. A questo punto basta prendere $v = \phi u$. ◇

Definiamo la funzione $\tilde{\rho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|\boldsymbol{x}|^2}\right) & \text{se } |\boldsymbol{x}| < 1; \\ 0 & \text{se } |\boldsymbol{x}| \geq 1. \end{cases}$$

Si verifica che $\tilde{\rho}$ è di classe C^∞. Poiché $\tilde{\rho} \geq 0$ ovunque e $\tilde{\rho} > 0$ su $B(0,1)$, si ha $I = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\rho} > 0$. Definiamo una funzione rinormalizzata $\rho = \tilde{\rho}/I$.

Adesso useremo l'osservazione precedente per trovare la v cercata tramite la tecnica dell'*approssimazione mediante convoluzione*. Avrà un ruolo fondamentale il seguente:

Lemma 13.1 *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua il cui supporto sia contenuto in un compatto $K \subset \Omega$, e per ogni $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \Omega^C)$ sia*

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \int_{B(0,1)} f(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Allora:

1. *le f_ε sono di classe C^∞;*
2. *il supporto di f_ε è contenuto in $K_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, K) < \varepsilon\}$;*
3. *$f_\varepsilon \to f$ uniformemente su K per $\varepsilon \to 0$.*

Dim. *1*. Effettuo un cambio di variabile nell'integrale: $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{\xi}$. Si ha $\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = \varepsilon^n \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ e dunque

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(0,1)} f(\boldsymbol{\eta})\rho\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta}}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}.$$

Da ciò segue che f_ε è di classe C^∞, perché le derivate parziali rispetto ad una qualunque x_j passano sotto il segno di integrale, dove solo ρ dipende da $\boldsymbol{x}$, ed è di classe C^∞.

2. Sia $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) = \int f(\boldsymbol{x}_0 - \varepsilon\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \neq 0$. Allora l'integrando non è identicamente nullo, quindi esiste un $\boldsymbol{\xi} \in B(0,1)$ tale che $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{x}_0 - \varepsilon\boldsymbol{\xi}$ si trova nel supporto di f, quindi in K. Ma allora $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{k}| < \varepsilon$, e dunque $\boldsymbol{x}_0 \in K_\varepsilon$.

3. Fissiamo un $\delta > 0$. f, essendo una funzione continua a supporto compatto, è uniformemente continua: sia $\tilde{\varepsilon} > 0$ tale che $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \delta$. Ricordiamo inoltre $\rho > 0$, e $\int_{B(0,1)} \rho = 1$. Allora per ogni $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, si ha

$$|f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| \leq \int_{B(0,1)} |f(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{\xi}) - f(\boldsymbol{x})|\rho(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \leq \delta \int_{B(0,1)} \rho(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \delta.$$

□

Osservazione. Sul punto 2 si può essere più precisi nel caso in cui valga ovunque $f \geq 0$: se U è esattamente il luogo dei punti in cui $f \neq 0$, allora il luogo dei punti in cui $f_\varepsilon \neq 0$ è esattamente $U_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, U) < \varepsilon\}$: far vedere che è contenuto in quest'insieme è analogo a sopra. Ma anche l'altro contenimento può essere dimostrato: se $\boldsymbol{x} \in U_\varepsilon$, esiste un aperto $A \subseteq B(0,1)$ tale che, per ogni $\boldsymbol{\xi} \in A$ si abbia $\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{\xi} \in U$; dunque $f_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ è l'integrale di una funzione che è ovunque non negativa, e strettamente positiva su A, e dunque è positivo. ◇

A questo punto, abbiamo quasi raggiunto il risultato desiderato:

Proposizione 13.1 *Siano K_1, K_2, Ω come sopra. Allora esiste una funzione $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, $\psi \geq 0$, $\psi \equiv 1$ su K_1, $\psi \equiv 0$ fuori da K_2.*

Dim. Sia $\varepsilon = \operatorname{dist}(K_1, bK_2)/2 > 0$. Consideriamo $K_{1\varepsilon} = \{\boldsymbol{x} | \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, K_1) \leq \varepsilon\}$, ed

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \Omega^C)}{\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, K_{1\varepsilon}) + \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \Omega^C)}.$$

Sia ora $\phi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \int_{B(0,1)} \phi(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$, l'approssimazione mediante convoluzione di ϕ.

Dal secondo punto del lemma precedente segue che il supporto di ϕ_ε è contenuto in $\{\boldsymbol{x} \,|\, \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, K_1) < 2\varepsilon\} \subseteq K_2$. Inoltre per tutti gli $\boldsymbol{x} \in K_{1\varepsilon}$ si ha $\phi(\boldsymbol{x}) = 1$; dunque per tutti gli $\boldsymbol{x} \in K_1, \boldsymbol{\xi} \in B(0,1)$ si ha $\phi(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{\xi}) = 1$. Ma allora per tali $\boldsymbol{x}$ si ha $\phi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 1$. Si verifica facilmente anche che $\psi \geq 0$ ovunque. Tutto ciò significa che $\psi = \phi_\varepsilon$ è una funzione come cercata. □

Corollario 13.1 *Siano K_1, K_2, Ω come sopra, e sia $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Allora esiste una funzione $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tale che $u \equiv v$ su K_1, e $v \equiv 0$ fuori da K_2.*

Dim. Basta considerare la ψ sopra costruita e prendere $v = \psi u$. □

Osservazione. Un piccolo adattamento da tener presente è il seguente: consideriamo un compatto K contenuto in un aperto Ω, vogliamo una funzione ψ di classe $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, a supporto compatto (contenuto in Ω) e che valga 1 su K. In questo caso sia $\delta = \mathrm{dist}(K, b\Omega)/2 > 0$ ed applichiamo i risultati precedenti con $K_1 = K$, $K_2 = \{\boldsymbol{x}|\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, K) \leq \delta\}$. Lo stesso dicasi se cerchiamo una funzione a supporto compatto che concida con una certa u su K. ◇

13.2 L'equazione differenziale $\partial u/\partial \bar{z} = f$

Ci interessa ora dimostrare l'esistenza di una soluzione ad un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$$

con $f \in C^k(\mathbb{C}; \mathbb{C})$, $k \geq 1$. Per farlo, ci basiamo su una formula che è diretta conseguenza di quelle di Gauss-Green e di Stokes:

Teorema 13.1 (Formula di Green-Stokes per funzioni complesse) *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$ con frontiera regolare. Se $f \in C^1(\bar{D}, \mathbb{C})$, per ogni $z \in D$ vale*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

Cosa vuol dire il prodotto vettore $\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}$? Osserviamo che, se $\zeta = x' + iy'$, si ha $\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}x' + i\mathrm{d}y'$, $\mathrm{d}\bar{\zeta} = \mathrm{d}x' - i\mathrm{d}y'$ e dunque, formalmente, trattando $\mathrm{d}x'$ e $\mathrm{d}y'$ come due vettori ortogonali,

$$(\mathrm{d}x' + i\mathrm{d}y') \wedge (\mathrm{d}x' - i\mathrm{d}y') = -2i\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.$$

Dim. Se ϕ, ψ sono due funzioni di classe C^1 su $\bar{D}$ (a valori indifferentemente in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$), vale la formula di Stokes $\int_{bD} \phi\mathrm{d}x + \psi\mathrm{d}y = \int_D (\psi_x - \phi_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Poniamo $\psi = i\phi$ e trasformiamo la forma differenziale $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$:

$$\int_{bD} \phi(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \int_{bD} \phi\mathrm{d}z = \int_D (i\phi_x - \phi_y)\frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}}{-2i} = -\int_D \frac{\phi_x + i\phi_y}{2}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -\int_D \phi_{\bar{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}.$$

A questo punto, consideriamo solo l'uguaglianza fra la seconda e la quinta espressione, ridenominando la variabile di integrazione da z in ζ. Sia $z \in D$, e poniamo $\phi(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$

(effettueremo gli integrali non più su D e bD, ma su $D_\varepsilon = D \setminus \overline{\Delta(z,\varepsilon)}$ e su bD_ε). Si ha $\phi_{\bar\zeta} = f_{\bar\zeta}/(\zeta - z)$, e dunque

$$\int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \int_{b\Delta(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \int_{bD_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = -\int_{D_\varepsilon} \frac{f_{\bar\zeta}}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta.$$

Vediamo cosa succede al limite per $\varepsilon \to 0$. L'integrale su D_ε presenta una singolarità per $\zeta = z$, che però risulta sommabile (in coordinate polari si ha $\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\vartheta$ e dunque una singolarità dell'ordine di $1/\rho$ si integra): allora il passaggio al limite $\int_{bD_\varepsilon} \frac{f_{\bar\zeta}}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta \to \int_{bD} \frac{f_{\bar\zeta}}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta$ è lecito.

Si ha inoltre

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b\Delta(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\vartheta})}{\varepsilon e^{i\vartheta}} \varepsilon i e^{i\vartheta} \mathrm{d}\vartheta = \lim_{\varepsilon \to 0} i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\vartheta}) \mathrm{d}\vartheta = 2\pi i f(z).$$

Recapitolando, con il passaggio al limite $\varepsilon \to 0$ si ha

$$\int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - 2\pi i f(z) = -\int_D \frac{f_{\bar\zeta}}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta$$

cioè la tesi. □

Corollario 13.2 *Se $f \in C^1(\mathbb{C})$ è una funzione a supporto compatto, per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta.$$

Dim. Detto K un compatto che contiene il supporto di f e fissato z, sia $R > 0$ tale che $\Delta(0,R) \supseteq K$, e $z \in \Delta(0,R)$. Allora dalla formula di Green-Stokes

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b\Delta(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta(0,R)} \frac{f_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta$$

ma il primo addendo di destra è nullo perché $b\Delta(0,R) \cap K = \varnothing$. Per $R \to +\infty$ si ha la tesi. □

Possiamo ora dedicarci allo scopo di questa sezione:

Teorema 13.2 *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^k ($k \geq 1$). Allora esiste una funzione $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ di classe C^k tale che*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f.$$

Osservazione. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni dell'equazione differenziale data, si ha $\frac{\partial}{\partial \bar z}(u_2 - u_1) = f - f = 0$, cioè $u_2 - u_1$ è olomorfa intera. Viceversa, se u è una soluzione dell'equazione e v è una funzione olomorfa intera, $u + v$ è ancora una soluzione. ◇

Dim. *1° caso:* f è una funzione a supporto compatto.
Definiamo, per $z \in \mathbb{C}$,

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar\zeta.$$

Effettuiamo il cambio di variabile $\tau = \zeta - z$:

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(z+\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\bar{\tau}$$

Poiché, come già osservato, la singolarità in $\tau = 0$ è sommabile, le derivate rispetto a z e $\bar{z}$ passano sotto il segno di integrale; e poiché f è di classe C^k, anche u_0 lo sarà. Inoltre

$$\frac{\partial u_0}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f_{\bar{z}}(z+\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\bar{\tau} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta} = f(z)$$

per il corollario sopra dimostrato.

<u>$2°$ caso:</u> f è una funzione a supporto non compatto.
Scriviamo $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ dove $D_n = \overline{\Delta(0,n)}$. Per ogni n, inoltre, sia ψ_n una funzione C^∞ che valga 1 su un intorno di D_n e 0 fuori da D_{n+1} (come costruita nella precedente sezione). Inoltre, sia $f_n = \psi_n f$: f_n è di classe C^k, coincide con f su un intorno di D_n ed il suo supporto è contenuto nel compatto D_{n+1}.

Definiamo una successione di funzioni in questo modo: sia u_1 una soluzione dell'equazione $\partial u/\partial\bar{z} = f_1$. Quindi, supponendo di avere definito u_n, sia $\tilde{u}_{n+1}$ una soluzione dell'equazione $\partial u/\partial\bar{z} = f_{n+1}$. $\tilde{u}_{n+1} - u_n$ è una funzione olomorfa su un intorno di D_n in quanto qui si ha $f_n = f_{n+1}$ e quindi si annulla la derivata rispetto a $\bar{z}$ di $\tilde{u}_{n+1} - u_n$. Esisterà allora un polinomio p_n tale che $\|(\tilde{u}_{n+1} - p_n) - u_n\|_{D_n} < 2^{-n}$. Definiamo quindi $u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1} - p_n$: essa sarà ancora soluzione di $\partial u/\partial\bar{z} = f_{n+1}$ per l'osservazione precedente.

Sia ora $u = \lim_{n\to+\infty} u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$. Per ogni n, $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$ è una funzione olomorfa su un intorno di D_n, in quanto somma di una serie di funzioni olomorfe convergente totalmente. Perciò, su tale intorno di D_n si ha $u = u_n + v_n$ e dunque $\partial u/\partial\bar{z} = \partial u_n/\partial\bar{z} + 0 = f_n = f$. Cioè, u è soluzione dell'equazione differenziale data su tutti i D_n, quindi lo è su $\mathbb{C}$. □

Osservazione. Anche quando f è una funzione a supporto compatto, non è detto che esista una soluzione u all'equazione differenziale che lo sia. Infatti, quella usata nella dimostrazione del teorema,

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}$$

non dà alcuna garanzia di essere uguale a 0 per $|z|$ sufficientemente grande. Quello che si può dire sicuramente è che, se K è un compatto che contiene il supporto di f e $z \notin K$,

$$|u_0(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}\right| \leq M \cdot \mathrm{Area}(K) \cdot \frac{1}{\mathrm{dist}(z,K)}$$

dove M è un'opportuna costante. Supponiamo adesso di avere una soluzione u' a supporto compatto. Come già visto, $u_0 - u'$ è una funzione olomorfa intera, e si ha $\lim_{|z|\to+\infty} |u_0(z) - u'(z)| = 0$. Per il teorema di Liouville, allora, $u_0 \equiv u'$. In altri termini, se c'è una soluzione a supporto compatto, questa è proprio u_0. ◇

L'enunciato del teorema ora dimostrato può essere reso più generale:

Teorema 13.3 *Sia D un dominio di $\mathbb{C}$, e sia $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^k ($k \geq 1$). Allora esiste una funzione $u : D \to \mathbb{C}$ di classe C^k tale che*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f.$$

La dimostrazione di questo risultato differisce poco da quella del teorema precedente. La differenza sostanziale è nel caso di f a supporto non compatto: qui prenderemo come successione D_n non dei dischi di raggio n, ma una successione di compatti esaustiva per D (vedi proposizione 5.1).

13.3 Il problema di Cousin

Siamo quasi pronti ad affrontare il problema di Cousin. Rimane da vedere solo la questione della *partizione dell'unità:*

Definizione 13.1 *Un ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ si dice* localmente finito *se gli U_n sono limitati, $\bar{U}_n \subset D$ ed ogni $z \in D$ possiede un intorno che interseca solo ad un numero finito degli U_n.*

Una partizione dell'unità *è una successione di funzioni $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non negative, di classe C^∞, tali che, per ogni n, il supporto di ψ_n è contenuto in U_n, e $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \equiv 1$ su D.*

Da notare che la somma, anche se si presenta come serie, presenta solo un numero finito di termini $\neq 0$ per ogni $z \in D$. Dato un ricoprimento localmente finito, una partizione dell'unità esiste sempre, e si costruisce in questo modo: utilizziamo un altro ricoprimento localmente finito di D, costituito da aperti limitati V_n tali che $\bar{V}_n \subset U_n$ per ogni n. Per ogni n, cerchiamo poi una funzione ρ_n di classe C^∞ e non negativa il cui supporto sia contenuto in U_n e contenga $\bar{V}_n$. Dopodiché, detta $\rho = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n$, che risulta ovunque > 0, per ogni n sia $\psi_n = \rho_n/\rho$. Le ψ_n saranno le funzioni cercate.

Costruiamo quindi gli insiemi V_n. Procederemo restringendo gli U_n uno alla volta, assicurandoci ad ogni passo che la nuova famiglia continui a ricoprire D. Dopodiché, anche la famiglia "finale" continuerà a ricoprire D, perché ogni $z \in D$, essendo contenuto in un numero finito degli U_n, è interessato solo da un numero finito di queste trasformazioni.

Supponiamo quindi di avere costruito i V_k per $k < n$ (n può anche essere 1, cioè non abbiamo costruito ancora nulla); vogliamo trovare un buon V_n. Consideriamo il ricoprimento $\{V_1, \ldots, V_{n-1}, U_n, U_{n+1}, \ldots\}$. Per comodità, nel seguito etichettiamo anche $W_k = V_k$ per $k < n$, $W_k = U_k$ per $k \geq n$. Per ogni $z \in \bar{U}_n$ definiamo

$$\delta_n(z) = \max_{k\in\mathbb{N}: z\in W_k} \operatorname{dist}(z, W_k^C).$$

δ_n è una funzione continua; definiamo ε_n il minimo valore assunto da δ_n sul compatto $\bar{U}_n$. $\varepsilon_n > 0$ sicuramente, perché ogni $z \in \bar{U}_n \subset D$ appartiene a qualcuno dei W_k, che sono aperti. Allora definiamo

$$V_n = \{z \in U_n | \operatorname{dist}(z, U_n^C) > \varepsilon_n/2\}$$

in modo che gli elementi di $U_n \setminus V_n$ appartengano a qualche altro insieme del ricoprimento.

Definita quindi la famiglia dei V_n, consideriamo come ρ_n una funzione che valga 1 su $\bar{V}_n$, e il cui supporto sia contenuto in $\bar{U}_n$ (sono entrambi compatti, e il supporto di una funzione continua è aperto, dunque in realtà il supporto di ρ_n sarà contenuto in U_n), di cui conosciamo già l'esistenza (vedi proposizione 13.1).

Detto quanto serviva anche sulle partizioni dell'unità, possiamo finalmente concludere con il seguente

Teorema 13.4 *Sia $\Sigma = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ un insieme discreto, e sia $\{p_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di polinomi a coefficienti complessi. Allora esiste una funzione f meromorfa su $\mathbb{C}$ tale che*

- *per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(z) - p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ sia olomorfa su un intorno di a_n;*
- *$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \Sigma)$.*

Dim. Ci servirà un ricoprimento localmente finito di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ tale che in ogni insieme del ricoprimento ricada al più un punto di Σ. Vediamo a grandi linee come può essere costruito: consideriamo, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $I_j = (-j, j)^2$; banalmente $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$.

Essendo Σ un insieme discreto e $\bar{I}_1$ un compatto, $\Sigma \cap I_1$ è un insieme finito. Sia $\delta_1 = \min\{\mathrm{dist}(z, z')|z, z' \in \Sigma \cap I_1; z \neq z'\} \cup \{1/3\}$; chiaramente $\delta_1 > 0$. Allora $I_1 = \bigcup_{k=1}^{K_1} Q_{1k}$, dove i Q_{1k} sono quadrati aperti di lato δ_1, che ricoprono I_1 e sono disposti "tabularmente", ciascuno con i lati paralleli agli assi, e sovrapponendosi ognuno a ciascuno di quelli contigui per una lunghezza $\geq \delta_1/3$. Questo è un ricoprimento localmente finito di I_1, tale che ogni Q_{1k} contenga al più un elemento di Σ.

Su I_2 facciamo una costruzione analoga, ma eliminiamo i Q_{2k} completamente contenuti in I_1 e consideriamo come ricoprimento localmente finito di I_2 quello costituito dagli Q_{1k} e dagli Q_{2k} rimasti. Per i successivi I_j continuiamo a fare lo stesso, tenendoci come Q_{j_k} solo quelli che non sono completamente contenuti in I_{j-1}. In questo modo, la famiglia $\{Q_{jk}|j \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq K_j\}$ è un ricoprimento di $\mathbb{C}$ come lo desideravamo: è anch'esso localmente finito perché, se $z \in I_j$, z può appartenere solo agli $Q_{j'k}$ con $j' \leq j+1$, che sono un numero finito; che rispetti l'altra condizione è ovvio dalla costruzione.

Poiché nel seguito ci basta un solo indice, rinumeriamo i quadrati in una successione $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Sia $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una partizione dell'unità sul ricoprimento dato dai Q_k, e per ogni k definiamo su $\mathbb{C}$ una funzione meromorfa

$$f_k(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } Q_k \cap \Sigma = \varnothing \\ p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) & \text{se } Q_k \cap \Sigma = \{a_n\} \end{cases}$$

Per ogni j e k, sia inoltre $f_{jk} = f_j - f_k$. Osserviamo che, ogni volta che $Q_j \cap Q_k \neq \varnothing$, si ha $f_{jk} = f_j - f_k \in \mathcal{O}(Q_j \cap Q_k)$; e che per ogni j, k, l vale $f_{jk} + f_{kl} + f_{lj} = 0$ (si chiama *relazione di cociclo*).

Per ogni k definiamo $h_k = \sum_{s=1}^{+\infty} \psi_s f_{ks}$, che è una somma finita in un intorno di ogni $z \in \mathbb{C}$; ma allora h_k è di classe C^∞. Osserviamo inoltre che $h_j - h_k = \sum_{s=1}^{+\infty} \psi_s f_{js} - \sum_{s=1}^{+\infty} \psi_s f_{ks} = \sum_{s=1}^{+\infty} \psi_s (f_{js} + f_{sk}) =$ (per la relazione di cociclo) $f_{jk} \sum_{s=1}^{+\infty} \psi_s = f_{jk}$. Allora, se $Q_j \cap Q_k \neq \varnothing$, su tale intersezione si ha

$$\frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{jk}}{\partial \bar{z}} = 0$$

perché f_{jk} è olomorfa. Dunque, è ben definita su $\mathbb{C}$ una funzione F che, per ogni k, coincida con $\partial h_k / \partial \bar{z}$ su Q_k; ed inoltre tale F sarà C^∞.

Sia u la soluzione su $\mathbb{C}$ dell'equazione differenziale $\partial u/\partial\bar{z} = F$; chiaramente u è anch'essa C^∞. Poiché su Q_k si ha $\partial u/\partial\bar{z} = F = \partial h_k/\partial\bar{z}$, la funzione $g_k = u - h_k$ è olomorfa su Q_k.

Osserviamo che $g_j - g_k = h_k - h_j = f_{kj} = f_k - f_j$ e quindi $g_j + f_j = g_k + f_k$: dunque è ben definita su $\mathbb{C}$ una funzione f che, per ogni k, coincida con $g_k + f_k$ su Q_k. Tale f è quindi meromorfa su tutto $\mathbb{C}$, ed è facile verificare che è una soluzione al problema di Cousin. □

Un teorema analogo può essere enunciato prendendo come dominio su cui definire f non $\mathbb{C}$, ma un suo aperto D. La dimostrazione funziona ugualmente una volta dimostrata l'esistenza di un ricoprimento localmente finito di D tale che in ogni aperto ricada al più un elemento di Σ.

13.4 Ancora sul problema di Cousin

Come preannunciato, il modo in cui siamo arrivati a dimostrare l'esistenza di una soluzione al problema di Cousin su $\mathbb{C}$ non è affatto il più veloce, né il più soddisfacente. Qui ne vedremo un altro, molto più semplice.

Osserviamo che, se Σ è discreto, necessariamente $|a_n| \to +\infty$. Allora, detti $D_n = \overline{\Delta(0, |a_n|/2)}$, si ha $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Per ogni n, sia q_n un polinomio tale che

$$\left| p_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - q_n(z) \right| < 2^{-n} \text{ su } D_n$$

(esisterà un tale polinomio perché $p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ è una funzione olomorfa su D_n, quindi basta troncare lo sviluppo di Taylor centrato in 0). Chiamiamo f_n la quantità messa in modulo, e definiamo $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Tale serie converge totalmente sui compatti contenuti in $\mathbb{C} \setminus \Sigma$: infatti, per tutti gli $n > N$ opportuno, un tale compatto è contenuto in D_n: dunque la serie converge totalmente su di esso. Essendo somma di una serie convergente totalmente sui compatti (e quindi limite uniforme di una successione) di funzioni olomorfe, f è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\Sigma$. E nell'intorno dei punti di Σ? Se consideriamo un intorno compatto di un a_n, abbastanza piccolo affinché non contenga altri punti di Σ, su tale intorno le f_k sono tutte olomorfe tranne f_n. E poiché le f_k, per $k > n$, convergeranno totalmente su tale intorno (come prima), f sarà somma di f_n e di una funzione olomorfa, ma ricordando la definizione di f_n, è somma di p_n e di una funzione olomorfa. Quindi f si comporta come desiderato.

Vedremo ora come risolvere una "variante" del problema di Cousin: vogliamo definire una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ i cui zeri, poli, e i relativi ordini, siano assegnati. Per farlo, dobbiamo discutere preliminarmente di una sorta di analogo moltiplicativo delle serie: i prodotti infiniti.

Definizione 13.2 *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, il loro* prodotto infinito *è la scrittura*

$$P = \prod_{n=1}^{+\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n \text{ (se esiste).}$$

Diciamo che P converge *se il limite esiste finito ed è diverso da 0; oppure se un numero finito degli a_n è nullo e il prodotto infinito degli altri ammette limite finito e diverso da 0.*

Nel seguito, gli a_n saranno numeri complessi; dopo saranno delle funzioni olomorfe. La prima cosa che si può pensare è che esista una relazione con la serie del logaritmi: e in effetti, è così.

Proposizione 13.2 *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri complessi diversi da* 0*, e sia* $\log$ *la determinazione principale del logaritmo complesso, definita su tutto* $\mathbb{C}^*$ *(*$0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$*). Allora* $P = \prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge se e solo se* $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \log a_n$ *converge. Se accade una di queste, si ha* $P = e^S$ *(ma* S *potrebbe essere un altro logaritmo di* P*).*

Dim. $\Leftarrow$) Se S converge, si ha

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to+\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \log a_n\right) = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \log a_n\right) = e^S.$$

$\Rightarrow$) Viceversa, supponiamo che P converga. Indichiamo con P_N e S_N rispettivamente i "prodotti parziali" di S e le "somme parziali" di P. Si ha

$$0 = \lim_{N\to+\infty} \log(P_N/P) = \lim_{N\to+\infty} \log P_N - \log P = \lim_{N\to+\infty} (S_N + 2\pi i h_N - \log P)$$

dove l'addendo $2\pi i h_N$ (con $h_N \in \mathbb{Z}$) è dovuto al fatto che la parte immaginaria di S_N potrebbe essere $\geq 2\pi$: ovvero, vale $P_N = e^{S_N}$, ma non necessariamente $S_N = \log P_N$ se per log si intende la determinazione principale. Gli h_N sono definitivamente costanti:

$$2\pi i(h_N + h_{N-1}) = \log \frac{P_N}{P} - \log \frac{P_{N-1}}{P} - S_N + S_{N-1} = \log \frac{P_N}{P_{N-1}} - \log a_N$$

dunque la differenza tende a 0 ma, poiché gli h_N sono interi, deve essere definitivamente 0. Detto $h = \lim_{N\to+\infty} h_N$, si avrà $S_N \to \log P - 2\pi i h$ e ciò dimostra la nostra tesi. □

Osservazione. Consideriamo un prodotto infinito $\prod_{n=1}^{+\infty} f_n$. Osserviamo che si ha convergenza uniforme del prodotto infinito (in un dato dominio) se e solo se si ha quella della serie dei logaritmi, infatti le differenze fra termini della serie si possono maggiorare uniformemente in un caso se e solo se si può fare nell'altro. ◇

Possiamo ora affrontare con questi strumenti la soluzione del problema di Cousin. Partiamo da una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ senza punti di accumulazione in $\mathbb{C}$, il che equivale a dire che $|a_n| \to +\infty$, e ricerchiamo innanzitutto una funzione olomorfa che abbia come zeri tutti e soli gli a_n (desideriamo che uno zero abbia molteplicità pari al numero di volte che si ripete nella successione).

Per comodità, supponiamo che $a_n \neq 0$ per ogni n, e consideriamo a parte la moltiplicità $k \geq 0$ dello zero che la nostra funzione dovrà avere in 0. Se convergesse $z^k \prod(1 - z/a_n)$ saremmo a posto. Altrimenti, osserviamo che i nostri scopi non vengono alterati se correggiamo ogni termine di questo prodotto con una funzione olomorfa mai nulla.

Definiamo $p_n(z)$ il polinomio dato dallo sviluppo di Taylor di $\log(1 + z/a_n)$ in 0, troncato ad un ordine m_n che sceglieremo in modo che $|\log(1 - z/a_n) - p_n(z)| < 2^{-n}$ per ogni $z \in \Delta(0, |a_n|/2)$. Allora, poiché $|a_n| \to +\infty$, la serie $\sum \log(1 - z/a_n) - p_n(z)$ convergerà uniformemente su tutto $\mathbb{C}$: come osservato precedentemente, lo farà allora anche il prodotto infinito associato. Quindi

$$f(z) = z^k \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{-p_n(z)}$$

è la funzione cercata (olomorfa perché limite uniforme di funzioni olomorfe).

Se vogliamo risolvere il problema di Cousin nella forma più generale, ovvero trovare una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ i cui zeri e poli siano assegnati, consideriamo anche un'altra successione $\{b_n\}$, anch'essa discreta, che rappresenterà i punti in cui vogliamo i poli della nostra funzione, ciascuno di ordine dato dal numero di volte che si ripetono nella successione. Trattiamo i b_n come nel caso precedente e sia $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tale che i b_n siano gli zeri. Allora è facile verificare che f/g è la funzione meromorfa cercata.

Per concludere, osserviamo che se esiste un'altra funzione meromorfa con questa proprietà, che scriviamo come rapporto di funzioni olomorfe ϕ/ψ, si ha che $f\psi/g\phi$ è olomorfa intera e non ha zeri: e poiché $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso, si può scrivere nella forma e^F con $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Dunque, se due funzioni meromorfe h_1 e h_2 soddisfano lo stesso problema di Cousin, si può sempre scrivere $h_2 = h_1 e^F$.