# Cantor e la teoria degli insiemi infiniti

**Alessio Del Vigna**[1]

[1]Department of Mathematics, University of Pisa

# Introduzione

# I problemi dell'infinito

Iniziamo con una citazione di David Hilbert[a]:

"*L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso più profondamente lo spirito umano*"

[a] Eminente matematico tedesco vissuto a cavallo tra Ottocento e Novecento.

Sin dall'antica Grecia le discussioni sull'infinito furono argomento di interesse per i filosofi. Tale interesse era dovuto al fatto che nel contemplare l'infinito sorgeva un gran numero di *paradossi*, dovuto soprattutto ai seguenti fatti:

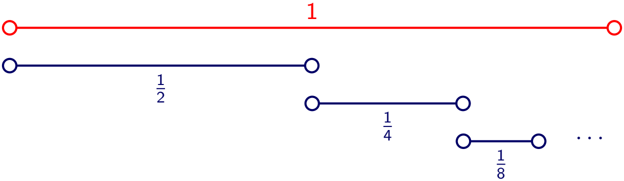
1. esistenza di quantità arbitrariamente grandi;
2. sommare infiniti addendi;
3. suddividere infinite volte un oggetto di estensione finita (un segmento, un poligono).

# Il paradosso dell'atleta

Zenone di Elea formulò un paradosso derivante dalla suddivisione infinita di un segmento unitario, il celebre *paradosso dell'atleta*.

Supponiamo che un atleta debba percorre 1 metro:

- prima deve percorrerne la metà, ossia $\frac{1}{2}$;
- poi la metà del tratto rimanente, ossia $\frac{1}{4}$;
- poi la metà del tratto rimanente, ossia $\frac{1}{8}$, e così via.




Il paradosso consiste nel fatto che l'atleta deve percorrere infiniti tratti e quindi non arriverà mai percorrere 1 metro.

# Il paradosso dell'atleta

**Come viene spiegato il paradosso?**

Il tragitto che l'atleta deve percorrere è formato da infiniti tratti, la cui lunghezza complessiva corrisponde alla somma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.$$

**Problema**

Può una somma infinita avere un risultato finito?

La risposta a questa domanda è affermativa: si potrebbe rigorosamente definire cosa si intende per somma infinita, e, secondo questa definizione la precedente somma ha proprio come risultato 1.

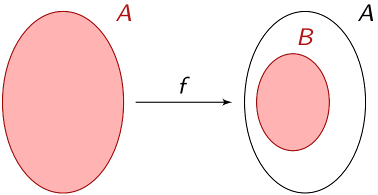
# Insiemi infiniti

Se dessimo una definizione di insieme finito, allora una possibile definizione di insieme infinito potrebbe essere "un insieme che non è finito".

Sorprendetemente, è più semplice definire cosa si intende per insieme infinito. Nel 1872, Dedekind dette la seguente definizione.

## Definizione

Un *insieme infinito* è un insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.



# I numeri naturali

**Esempio**

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un insieme infinito.

Infatti $\mathbb{N}$ ha un sottoinsieme proprio con cui può essere messo in corrispondenza biunivoca, i numeri pari $\mathfrak{P}$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}$ definita da

$$f(n) = 2n.$$

La funzione $f$ è biunivoca (verificare!) e $\mathfrak{P}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N}$ è un insieme infinito, perché rispetta la definizione.

## Cardinalità e equipotenza

**Quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi?**

- Un'idea potrebbe essere quella di *contare* gli elementi dei due insiemi e vedere se sono uguali.
- Questa strategia però non può essere usata sempre: come facciamo a "contare" gli elementi di un insieme infinito?

**Problema**

Esiste un modo per sapere se due insiemi hanno lo stesso numero di elementi *prescindendo* dal loro effettivo numero?

La risposta è sì, e i bambini la conoscono...

## Cardinalità e equipotenza

Basta introdurre il concetto di *corrispondenza biunivoca*, la quale, associando *uno ad uno* gli elementi dei due insiemi permette di concludere che i due insiemi sono ugualmente numerosi pur senza contarli effettivamente uno ad uno.

**Definizione**

Due insiemi $A$ e $B$ si dicono *equipotenti* se esiste una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, ossia se esiste una funzione $f : A \to B$ biunivoca.

Quando $A$ e $B$ sono equipotenti si dice che tali due insiemi hanno la stessa *cardinalità* e si scrive

$$\#A = \#B.$$

Intuitivamente, la cardinalità misura quanti elementi ha un insieme.

# Misurare l'infinito

Sappiamo quando due insiemi sono ugualmente numerosi, ma non sappiamo ancora dire, dato un insieme $A$, quanti elementi esso ha.

- Se l'insieme $A$ è finito, $\#A$ è il numero di elementi di $A$;
- se l'insieme $A$ è infinito non possiamo più contarne gli elementi...

**Problema**

Come esprimere la cardinalità di un insieme infinito?

Quando Cantor si trovò di fronte a questo problema introdusse il concetto di *numero transfinito*. Il primo di essi è

$$\aleph_0,$$

e rappresenta la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali (e di tutti gli insiemi ad esso equipotenti).

**Definizione**

La cardinalità di $\mathbb{N}$ è $\aleph_0$, ossia $\aleph_0 := \#\mathbb{N}$.

# Una relazione di ordine

Definiamo quando un insieme ha cardinalità *minore o uguale* alla cardinalità di un altro insieme.

## Definizione

Siano $X$ e $Y$ due insiemi. Diciamo che

$$\#X \leq \#Y$$

se esiste un'applicazione iniettiva da $X$ in $Y$.

Mostriamo che $\#\mathbb{N} \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

*Dimostrazione.* Dobbiamo trovare una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Basta mandare un elemento di $\mathbb{N}$ nel suo singoletto:

$$f(n) = \{n\}.$$

$\square$

# Insiemi numerabili

# Definizione di numerabilità

**Definizione**

Un insieme equipotente a $\mathbb{N}$ si dice *insieme numerabile*.

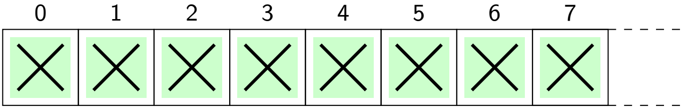
- Un insieme numerabile è un insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.
- La cardinalità di un insieme numerabile è $\aleph_0$.

Il significato della numerabilità di un insieme $A$ risiede nella possibilità di ordinare gli elementi di $A$ in una successione, etichettandoli con i numeri naturali. Gli elementi di $A$ possono cioè essere scritti come:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

# L'albergo di Russel

L'*albergo di Russell* è un albergo con un'infinità numerabile di stanze disposte su un solo piano.




Supponiamo che l'albergo abbia tutte le stanze occupate. Vogliamo far vedere che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungono sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito (numerabile).

# Un numero finito di ospiti

**Problema**

All'albergo arriva un solo ospite e vogliamo farlo alloggiare, come fare?

Basta spostare tutti i clienti nella camera successiva a quella in cui sono e così si libera un posto. In tal modo il nuovo ospite potrà alloggiare nell'albergo.

$$\Downarrow$$

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

Se arriva un numero finito $n$ di ospiti è sufficiente ripetere il procedimento precedente $n$ volte e avremo creato posto anche per questi.

$$\Downarrow$$

$$\forall n \geq 0 \ \aleph_0 + n = \aleph_0.$$

# Infiniti ospiti!

**Problema**

All'albergo arriva un'infinità numerabile di ospiti, come farli alloggiare senza spostare tutti infinite volte?

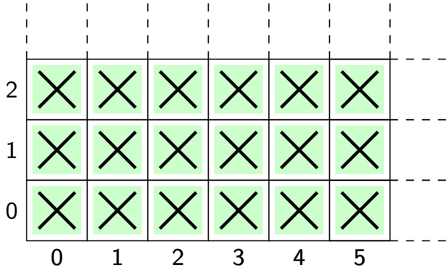
Un modo consiste nello spostare ogni ospite nella stanza con il numero doppio rispetto a quello che aveva prima: si liberano quindi le camere con il numero dispari, che sono infinite (numerabili).

$$\Downarrow$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

# L'albergo di Cantor

L'*albergo di Cantor* è un albergo con un'infinità numerabile di piani e un'infinità numerabile di stanze per piano.




Indicheremo con $(n, m)$ la camera $n$ del piano $m$, numerati con i numeri naturali (zero incluso). Sostanzialmente le camere dell'albergo di Cantor corrispondono alle coppie ordinate di numeri naturali, ossia all'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

# I due alberghi

**Problema**

È possibile trasferire l'albergo di Cantor in quello di Russell?

Abbiamo l'albergo di Cantor completamente occupato. Tutti gli ospiti devono essere trasferiti nell'albergo di Russell: è possibile? Se sì, come fare?

*Osservazione*. Se i clienti del piano 0 dell'albergo di Cantor andassero ad occupare una dopo l'altra le stanze dell'albergo di Russell non ci sarebbe posto per i clienti dei piani superiori.

# Metodo alternato

La *soluzione alternata* è la seguente:

- i clienti del piano 0 vanno ad occupare una camera sì e una no dell'albergo di Russell, in modo da occupare solo le pari e lasciando quindi le dispari a disposizione degli altri;
- quelli del piano 1 fanno esattamente la stessa cosa: occupano una stanza sì e una no delle stanze rimaste e così via.

In questo modo ognuno trova prima o poi la sua camera corrispondente e nessuno rimane fuori.

Si potrebbe dimostrare che il cliente della camera $(n, m)$ dell'albergo di Cantor va a finire nella camera

$$2^m(2n+1)-1$$

dell'albergo di Russell.

# Metodo diagonale

Si consideri la somma $n + m$ tra numero di camera e numero di piano di un cliente dell'albergo di Cantor.

*Osservazione.* Questa somma è costante lungo le diagonali discendenti dell'albergo.

Il *metodo diagonale* di Cantor consiste nel dare la precedenza ai clienti la cui somma $n + m$ è più bassa, e a parità di somma privilegiando il numero di camera.

Si potrebbe dimostrare che il cliente della camera $(n, m)$ va a finire nella camera

$$\frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$$

dell'albergo di Russell.

# L'albergo di Cantor

Che insiemi numerici rappresentano i due alberghi?

- L'albergo di Russel rappresenta l'insieme $\mathbb{N}$;
- L'albergo di Cantor è invece l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esser riusciti a trasferire l'albergo di Cantor in quello di Russel (non lasciando camere vuote) significa aver determinato una *corrispondenza biunivoca* tra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$. Ossia, gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sono equipotenti.

**Teorema**

*L'insieme* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *è numerabile, ovvero* $\#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$.

$$\Downarrow$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

# I numeri interi

**Teorema**

*L'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare il teorema, dobbiamo costruire una corrispondenza biunivoca $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Si riesce a costruire esplicitamente questa funzione con un procedimento a spirale:

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Proviamo a fare un disegno: a ogni intero in $n \in \mathbb{N}$ è associato il numero intero che sta sulla coda del ponte contrassegnato con $n$. $\square$

# I numeri razionali

**Teorema**

*L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile.*

*Dimostrazione.* Ad ogni numero razionale non negativo $\frac{n}{m}$, con $n, m \in \mathbb{N}$ e $m \neq 0$, si può associare la coppia ordinata $(n, m)$ di numeri naturali. In questo modo i numeri razionali non negativi $\mathbb{Q}^+$ possono essere identificati con (alcune) camere dell'albergo di Cantor. In particolare, $\mathbb{Q}^+$ può essere visto come sottoinsieme infinito di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ma $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, dunque anche $\mathbb{Q}^+$ sarà numerabile.
Con lo stesso ragionamento si mostra anche che $\mathbb{Q}^-$ è numerabile, e dunque $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ è numerabile, in quanto unione di due insiemi numerabili. $\square$

# Insiemi non numerabili

# La cardinalità del continuo

I numeri razionali non esauriscono tutti i punti di una retta, in quanto da essi sono esclusi i numeri irrazionali, che della retta invece fanno parte.

I numeri che "riempiono" la retta (ossia che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i punti della retta) sono i *numeri reali*.

**Definizione**

Si indica con $\mathfrak{c}$ la cardinalità dei punti della retta (o dell'insieme dei numeri reali), detta *cardinalità del continuo*.

L'obiettivo, adesso, è cercare di capire in che relazione stanno $\mathfrak{c}$ e la cardinalità del numerabile $\aleph_0$.

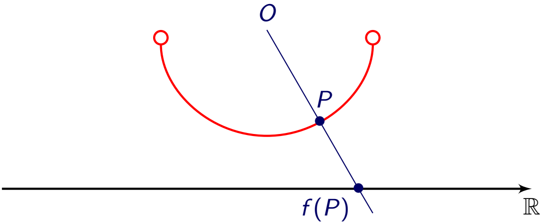
# I segmenti aperti

Un segmento aperto è un segmento che non comprende gli estremi.

**Teorema**

*Un segmento aperto è equipotente a tutta la retta.*

*Dimostrazione.* Se si curva il segmento aperto forma di semicirconferenza e lo si proietta dal suo centro si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra il segmento curvato e la retta tutta. □



# Esistono insiemi non numerabili!

**Teorema**

*Vale la disuguaglianza $\mathfrak{c} > \aleph_0$.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione del teorema consiste di due parti: proviamo dapprima la disuguaglianza più debole $\mathfrak{c} \geq \aleph_0$, per poi mostrare che $\mathfrak{c} \neq \aleph_0$.

**Prima parte.** Per mostrare che $\mathfrak{c} \geq \aleph_0$, basta determinare una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Per far questo, è sufficiente definire per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = n.$$

Questa funzione è iniettiva.

# Esistono insiemi non numerabili!

**Seconda parte.** Per mostrare che $\mathfrak{c} \neq \aleph_0$ consideriamo l'intervallo $I := (0, 1)$ e mostriamo che questo insieme non è numerabile. Ciò è sufficiente, in quanto $\#I = \mathfrak{c}$, come abbiamo mostrato prima.

La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo per assurdo che l'intervallo $I$ contenga un'infinità numerabile di punti. Ciò significa che possiamo trovare una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ ed $I$. Dunque *tutti* gli elementi di $I$ sono del tipo

$$\begin{array}{c}
0.\color{red}{a_{01}}\,a_{02}\,a_{03}\,a_{04}\cdots \\
0.a_{11}\,\color{red}{a_{12}}\,a_{13}\,a_{14}\cdots \\
0.a_{21}\,a_{22}\,\color{red}{a_{23}}\,a_{24}\cdots \\
0.a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,\color{red}{a_{34}}\cdots \\
\vdots
\end{array}$$

Consideriamo il numero composto dalla cifre in rosso, ossia $0.a_{01}a_{12}a_{23}\cdots$ e aumentiamo ogni sua cifra di 1 (e dove c'è 9 comparirà 0) e sia $x$ il numero così ottenuto. Si ha che $x$ non appartiene all'elenco scritto ma sta in $I$, assurdo. $\square$

# I numeri irrazionali

Abbiamo appena dimostrato che $\mathfrak{c}$ è diversa dalla cardinalità del numerabile, ed anzi, è strettamente più grande.

**Corollario**

*La cardinalità dell'insieme dei numeri irrazioni è* $\mathfrak{c}$.

*Dimostrazione.* I numeri reali sono unione dei razionali e degli irrazionali

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$

e questa unione è disgiunta, dato che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ sono uno il complementare dell'altro per definizione. Sappiamo già che $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$ e che $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$. Siccome l'unione precedente è tra insiemi disgiunti, la tesi segue. $\square$

# L'insieme di Cantor

Consideriamo il segmento chiuso $[0,1]$ e rimuoviamo il segmento centrale aperto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ di lunghezza pari a un terzo del segmento di partenza. Quello che rimane sono due segmenti laterali chiusi che chiamiamo "segmenti figli". Ripetiamo la stessa operazione su ciascuno dei due figli, per avere altri segmenti figli, e così via.

**Definizione**

L'insieme dei punti che rimangono dopo infinite generazioni si chiama *insieme di Cantor*.

# L'insieme di Cantor

**Problema**

Quanti punti ha l'insieme di Cantor?

- Gli estremi dei vari segmenti non sono mai cancellati (ma questi sono solo numerabili).
- Oltre a questi ci sono anche dei punti interni che non verranno mai cancellati. Infatti ogni successione di segmenti che si può scegliere costituisce una successione di segmenti chiusi ognuno incluso nel precedente e quindi, per l'assioma di continuità, individua almeno un punto, ed in effetti uno soltanto. Quindi i punti dell'insieme di Cantor sono tanti quante le possibili successioni di segmenti.
- Ogni successione di segmenti non è altro che una successione di "istruzioni" date dallo scegliere il segmento di destra o quello di sinistra a ogni generazione: allora il numero di possibili successioni risulterà $2^{\aleph_0}$.

**Proposizione**

*L'insieme di Cantor ha cardinalità* $2^{\aleph_0}$.

# Il punto della situazione

Il risultato fondamentale cui Cantor è giunto è che *non tutti gli insiemi infiniti hanno lo stesso numero di elementi* (!).

- Abbiamo incontrato $\mathbb{N}$ (e altri insiemi), con la cardinalità del numerabile $\aleph_0$.
- Abbiamo incontrato insiemi con cardinalità $\mathfrak{c}$ (come i numeri reali).
- Abbiamo mostrato che $\mathfrak{c} \neq \aleph_0$.

Dobbiamo ancora esaminare tre aspetti su questi due numeri cardinali transfiniti.

**Problemi**

1. Sono legati tra loro?
2. Esistono cardinalità strettamente maggiori di $\mathfrak{c}$?
3. Ci sono altre cardinalità comprese tra loro?

# La serie degli aleph

# L'assioma di continuità

Cosa significa dire che la retta è continua? Una definizione rigorosa è stata raggiunta solo a fine Ottocento da Dedekind.

**Definizione**

Sia $X$ un insieme ordinato e $A, B \subseteq X$. Diciamo $A < B$ se $a < b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$.

**Definizione**

Sia $X$ un insieme. Si dice che $X$ è *continuo* se per ogni $A, B \subseteq X$ disgiunti, complementari e tali che $A < B$, esiste un elemento $x \in A$ o $x \in B$ tale che $a \leq x \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.

L'*assioma di continuità* afferma che $\mathbb{R}$ è un insieme continuo[a].

[a] Attenzione, $\mathbb{Q}$ non lo è! Sapreste dimostrarlo?

# Il legame tra numerabile e continuo

**Teorema**

*Vale che* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

*Dimostrazione.* Come primo passo dimostreremo separatamente le due disuguaglianze

$$\mathfrak{c} \geq 2^{\aleph_0} \quad \text{e} \quad \mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}.$$

La loro validità implica $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, come accade per le disuguaglianze tra numeri interi[1].

**Prima disuguaglianza.** Per mostrare che $\mathfrak{c} \geq 2^{\aleph_0}$ si esibisce una corrispondenza iniettiva dall'insieme di Cantor al segmento chiuso $[0, 1]$: basta mandare ogni punto dell'insieme di Cantor in se stesso. Questo dimostra che

$$2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}.$$

[1] Questo fatto non è scontato, serve un teorema. Il teorema di Schröder–Bernstein afferma che se $\#X \leq \#Y$ e $\#Y \leq \#X$ allora $\#X = \#Y$.

# Il legame tra numerabile e continuo

**Seconda disuguaglianza.** Per dimostrare la seconda disuguaglianza, ossia $2^{\aleph_0} \geq \mathfrak{c}$, dobbiamo rifarci alla proprietà di Archimede.

**Proposizione (proprietà di Archimede)**

*Dati due qualsiasi numeri reali positivi $a$ e $b$, con $a < b$, esiste un numero intero $n$ tale che $na > b$.*

Consideriamo ora la corrispondenza che associa ad ogni punto della retta una parte dei razionali:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\ & r & \mapsto & \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\} \end{array} .$$

La proprietà di Archimede interviene per garantire l'iniettività della corrispondenza: a due punti distinti $r < r'$ sulla retta sono associate parti dei razionali distinte, dal momento che tra $r$ e $r'$ esiste almeno un punto razionale $q$ per la proprietà di Archimede. Questo dimostra che $\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}$ perché l'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ ha cardinalità $2^{\aleph_0}$. $\square$

# L'insieme delle parti

Consideriamo un insieme finito con $n$ elementi: il suo insieme delle parti ha $2^n$ elementi. È chiaro quindi che non si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra un insieme finito e il suo insieme delle parti.

**Teorema**

*Sia $X$ un insieme non vuoto. Allora $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.*

*Dimostrazione.* Mostriamo dapprima che $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$. Si stabilisce una corrispondenza iniettiva che associa ad ogni elemento di $X$ un elemento di $\mathcal{P}(X)$: basta associare ad un elemento $x \in X$ il sottoinsieme $\{x\} \subseteq X$.

Mostriamo ora che $\#X \neq \#\mathcal{P}(X)$. Si ragiona per assurdo: supponiamo che le due cardinalità siano uguali, ossia che esista una corrispondenza biunivoca $f$ tra i due insiemi. Consideriamo l'insieme $A$ definito come

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Per costruzione $A \in \mathcal{P}(X)$. Allora per suriettività di $f$ esisterà un certo $x^\star \in X$ tale che $f(x^\star) = A$: se $x^\star \in A$ allora $x^\star \notin f(x^\star) = A$, assurdo; se $x^\star \notin A$ allora $x^\star \in f(x^\star) = A$, assurdo. $\square$

# La serie degli aleph

Abbiamo visto che nel passare da un insieme al suo insieme delle parti la cardinalità aumenta. Dato un insieme $X$ il suo insieme delle parti ha cardinalità $2^{\#X}$.

- Se prendiamo un insieme numerabile il suo insieme delle parti ha cardinalità $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
- Se prendiamo un insieme con cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$, il suo insieme delle parti avrà cardinalità $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$.
- Questo procedimento può essere portato avanti indefinitamente. Così non esiste un numero cardinale maggiore di tutti gli altri.

A partire da $\aleph_0$, si riesce a costruire una sequenza di numeri cardinali transfiniti

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots ,$$

detta *serie degli aleph*.Tra un certo aleph e il successivo della sequenza non ci sono altri cardinali: ossia, il successivo di un numero cardinale $\kappa$ è proprio il più piccolo dei cardinali che sono strettamente maggiori di $\kappa$.

# Sviluppi moderni

# L'ipotesi del continuo

Sinora abbiamo incontrato $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$, e abbiamo mostrato che $\mathfrak{c} > \aleph_0$.

**Problema**

Esistono insiemi di cardinalità intermedie tra queste due?

Cantor non seppe trovare una risposta a questa domanda, e alla fine giunse alla formulazione della celeberrima *ipotesi del continuo*.

**Congettura (CH)**

Non esiste un insieme di cardinalità intermedia tra numerabile e continuo.

L'ipotesi del continuo afferma che subito dopo $\aleph_0$, la prima cardinalità che si incontra è proprio $\mathfrak{c}$. Dunque l'ipotesi del continuo equivale a dire che

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \overset{\text{CH}}{=} \aleph_1.$$

# Indecidibilità di CH

La teoria entro cui tutto quello di cui abbiamo parlato può essere formalizzato è la *teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel* (ZF).

- Nel 1940 Kurt Gödel dimostrò che l'ipotesi del continuo non può essere dimostrata falsa usando il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel (ZF), neppure con l'aggiunta dell'assioma della scelta (AC).
- D'altra parte, nel 1963 Paul Cohen dimostrò che l'ipotesi del continuo non può neppure essere dimostrata vera a partire da quegli assiomi.

$$\Downarrow$$

Il risultato complessivo è che l'ipotesi del continuo è indipendente dal sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel e dall'assioma della scelta.

*Osservazione*. Entrambi questi risultati partono dall'assunto che gli assiomi di Zermelo-Fraenkel non siano tra loro contraddittori.

# Tre citazioni

"Lo vedo ma non ci credo!"

(*G. Cantor*)

"Nessuno potrà mai cacciarci dal paradiso
che Cantor ha creato per noi"

(*D. Hilbert*)

"L'essenza della matematica è la sua libertà"

(*G. Cantor*)