IL PROBLEMA DI WARING

ALESSIO DEL VIGNA

1. Introduzione

Il problema di Waring nasce con il problema dei quadrati. Già Eulero, benché non sia stato lui a dimostrarlo, si era accorto che ogni intero si può esprimere come somma di quattro quadrati. Questo risultato è noto come Teorema di Lagrange (1770). La generalizzazione di Waring è la seguente: dato un intero $k \geq 2$, esiste un numero minimo s di potenze k-esime tale che ogni intero si può scrivere come somma di s potenze k-esime? Hilbert, nel 1909, dimostrò un teorema che dà risposta affermativa a tale questione. In questo modo risulta ben definita la seguente funzione.

Definizione 1. Per $k \geq 2$ denotiamo con $g(k)$ il numero minimo di potenze k-esime necessarie a rappresentare ogni intero come loro somma.

Il Teorema di Lagrange implica che $g(2) \leq 4$. Per vedere se vale o meno l'uguaglianza dobbiamo investigare le somme di 3 quadrati. Lavorando modulo 8 i quadrati sono 0, 1 e 4, così le possibili somme di tre quadrati danno tutte le classi modulo 8 tranne la classe del 7. Ciò implica che gli interi della progressione $8k + 7$ non si possono scrivere come somma di tre quadrati, e ciò è sufficiente per concludere che

$$g(2) = 4.$$

Ad oggi è noto che

$$g(2) = 4, \quad g(3) = 9, \quad g(4) = 19, \quad g(5) = 37, \quad \text{e} \quad g(6) = 73.$$

In generale possiamo dare la seguente limitazione dal basso a $g(k)$.

Teorema 2. *Per ogni $k \geq 2$ vale*

$$g(k) \geq 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2.$$

Dimostrazione. Fissiamo k e mostriamo che esiste un intero n_k che si scrive come somma di un numero minimo di potenze k-esime pari al secondo membro della disequazione. Sia

$$n_k = 2^k \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 1.$$

Dato che $n_k < 3^k$, per scriverlo come somma di potenze k-esime possiamo utilizzare solo 2^k e 1, e per avere il numero minimo di potenze k-esime dovremo utilizzare il massimo numero di 2^k. Quanti addendi 2^k al massimo possiamo utilizzare? Certamente tale numero è $a_2 = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 1$. Utilizzati questi, gli 1 che possiamo mettere sono in numero di $a_1 = n_k - 2^k \cdot a_2 = 2^k - 1$. Dunque per scrivere n_k come somma di potenze k-esime abbiamo bisogno di almeno $a_1 + a_2 = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2$ potenze k-esime. $\square$

Adesso riportiamo qualche curiosità relativa al problema di Waring. È noto che se vale

$$2^k\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\}+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]\le 2^k$$

allora nel precedente teorema vale l'uguaglianza, e che se questa è falsa lo è solo in un numero finito di casi. Questi risultati portanto a congetturare che la maggiorazione data per $g(k)$ sia in realtà un'uguaglianza. Il lettore può controllare che per i valori di k riportati sopra in effetti la maggiorazione è un'uguaglianza.

È chiaro che $g(k)$ è determinato sostanzialmente dal contributo di pochi e relativamente piccoli interi eccezionali. Così è più interessante la stima del numero $G(k)$, definito per $k\ge 2$, che esprime il minimo s tale ogni intero sufficientemente grande è somma di al massimo s potenze k-esime. Vediamo che cosa è noto al giorno d'oggi. Sicuramente abbiamo $G(k)\le g(k)$, e dunque questo rende la valutazione di $G(k)$ più difficile. Infatti il valore di $G(k)$ è noto solo per $k=2$ o $k=4$, per i quali si ha

$$G(2)=4=g(2)\quad\text{e}\quad G(4)=16<g(4)=19.$$

Linnik ha mostrato che $G(3)\le 7$ (1934), ed è semplice vedere che $G(3)\ge 4$. Infatti modulo 9 i cubi sono 0, 1 e -1, per cui sommandone tre si ottengono tutte le classi modulo 9 tranne la classe 4 e la classe 5, per le quali servono almeno 4 cubi.

In questa nota vedremo come applicare il metodo del cerchio di Hardy e Littlewood al problema di Waring, e in particolare per stimare $G(k)$. Seguiremo essenzialmente [3, Chapter 4].

2. La stima più semplice

Poniamo

$$R_s(n)=\sum_{m_1^k+\cdots+m_s^k=n}1,$$

ossia il numero di rappresentazioni di n come somma di s potenze k-esime. Mostriamo adesso brevemente il percorso per ottenere la stima dall'alto $G(k)\le 2^k+1$. Sia n grande e poniamo

$$N=[n^{1/k}]\quad\text{e}\quad P=N^{\frac{1}{100}}=N^{\nu}.$$

Per $1\le a\le q\le P$ e $(a,q)=1$ definiamo l'arco principale

$$\mathfrak{M}_{q,a}=\left\{\alpha\,:\,\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{P}{N^k}\right\}\tag{1}$$

e definiamo l'insieme degli archi principali come unione tutti questi archi al variare di a e q. Una semplice osservazione mostra che se $\frac{a}{q}\ne\frac{a'}{q'}$ allora $\mathfrak{M}_{q,a}$ e $\mathfrak{M}_{q',a'}$ sono disgiunti. Infine gli archi secondari sono l'insieme

$$\mathfrak{m}=\left(\frac{P}{N^k},1+\frac{P}{N^k}\right]-\mathfrak{M}.$$

A questo punto definiamo

$$f(\alpha)=\sum_{m=1}^{N}e^{2\pi i\alpha m^k},$$

così con la formula di inversione di Fourier si ha subito

$$R_s(n)=\int_0^1 f(\alpha)^s e^{-2\pi i\alpha n}\,\mathrm{d}\alpha=\int_{\mathfrak{M}}f(\alpha)^s e^{-2\pi i\alpha n}\,\mathrm{d}\alpha+\int_{\mathfrak{m}}f(\alpha)^s e^{-2\pi i\alpha n}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Il percorso consisterà nel dare delle stime per i contributi che derivano dagli archi principali e da quelli secondari, così da arrivare ad una formula asintotica. Data una stima asintotica in n per l'espressione di $R_s(n)$, trovare il minimo s per cui la formula asintotica vale significa trovare $G(k)$. Introduciamo innanzitutto la funzione

$$v(\beta) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{k} m^{\frac{1}{k}-1} e^{2\pi i \beta m}.$$

Tra i primi fatti che si dimostrano nella stima di $R_s(n)$ abbiamo il seguente: se $s \geq 2^k + 1$ allora

$$R_s(n) = \mathfrak{S}(n) J(n) + \mathcal{O}\Big(n^{s/k-1-\delta}\Big),$$

dove

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} S(q) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \frac{S(q,a)^s}{q^s} e^{\frac{-2\pi i a n}{q}}$$

e

$$J(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v(\beta)^s e^{-2\pi i \beta n} \, \mathrm{d}\beta.$$

Queste due quantità appena definite si chiamano rispettivamente *serie singolare* e *integrale singolare*. Per queste espressioni abbiamo le stime fornite dai seguenti risultati.

Teorema 3 ([3])**.** *Se* $s \geq 2^k + 1$ *allora* $\mathfrak{S}(n) \gg 1$.

Teorema 4 ([3])**.** *Per* $s \geq 2$ *si ha*

$$J(n) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1} n^{\frac{s}{k}-1} + \mathcal{O}\Big(n^{\frac{s-1}{k}-1}\Big).$$

Così per $s \geq 2^k + 1$ vale la stima asintotica

$$R_s(n) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1} n^{\frac{s}{k}-1} \mathfrak{S}(n) + \mathcal{O}\Big(n^{\frac{s}{k}-1-\delta}\Big),$$

dove la serie singolare soddisfa $\mathfrak{S}(n) \gg 1$, il che ha come immediato corollario la stima $G(k) \leq 2^k+1$.

3. Somme esponenziali

Poniamo

$$S(q,a,b) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^k + bx}{q}}.$$

Un risultato noto (la cui dimostrazione si trova su [3, pag. 38]) è il seguente.

Lemma 5 (Hua)**.** *Supponiamo che* $(q,a) = 1$. *Allora*

$$S(q,a,b) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} (q,b).$$

Ricordiamo alcune notazioni che abbiamo introdotto. Poniamo

$$f(\alpha) = \sum_{x \leq n^{1/k}} e^{2\pi i \alpha x^k}, \quad S(q,a) = \sum_{m=1}^{q} e^{2\pi i \frac{am^k}{q}}, \quad \text{e} \quad v(\beta) = \sum_{x \leq n} \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} e^{2\pi i \beta x}.$$

Introduciamo poi la quantità

$$V(\alpha, q, a) = \frac{S(q,a)}{q} v\left(\alpha - \frac{a}{q}\right).$$

Adesso seguiranno alcuni lemmi di natura tecnica che serviranno per dare una stima sulla somma esponenziale $S(q,a)$ quando $(q,a) = 1$, e che saranno utili nel seguito, dato che tale somma esponenziale interviene nella definizione della serie singolare.

Lemma 6. *Supponiamo che $p \nmid a$. Allora*

$$S(p,a) = \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \overline{\chi}(a) \tau(\chi),$$

dove $\mathscr{A}$ è l'insieme dei caratteri non principali modulo p la cui potenza k-esima è il carattere principale, e dove $\tau(\chi)$ denota la somma di Gauss $\sum_{x=1}^{p} \chi(x) e^{2\pi i \frac{x}{p}}$. Inoltre

$$|\tau(\chi)| = p^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \#\mathscr{A} = (k, p-1) - 1.$$

Dimostrazione. Il gruppo dei caratteri modulo p è isomorfo a $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, e inoltre $\mathscr{A} \cup \{\chi_0\}$ rappresenta l'insieme delle radici k-esime dell'unità in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, che sono $(k, p-1)$[1]. Da questo si ha subito

$$\#\mathscr{A} = (k, p-1) - 1.$$

Sia g una radice primitiva modulo p. Adesso affermiamo che

$$\mathscr{A} = \{\chi_h \,:\, 1 \le h < (k, p-1)\},$$

dove χ_h è il carattere modulo p definito da

$$\chi_h(x) = e^{2\pi i \frac{h}{(k,p-1)} \operatorname{ind}_g x},$$

per gli x primi con p. Effettivamente ciascuno di questi caratteri appartiene ad $\mathscr{A}$: non è principale, mentre χ_h^k è proprio il carattere principale (come mostra un rapido calcolo). Del resto però sappiamo anche che $\mathscr{A}$ contiene $(k, p-1) - 1$ caratteri, dunque li abbiamo trovati tutti. Così $1 + \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \chi(x)$ è il numero di soluzioni in y della congruenza $y^k \equiv x \pmod{p}$. Infatti

$$1 + \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \chi(x) = 1 + \sum_{h=1}^{(k,p-1)-1} e^{2\pi i \frac{h}{(k,p-1)} \operatorname{ind}_g x} =$$

$$= \sum_{h=1}^{(k,p-1)} e^{2\pi i \frac{h}{(k,p-1)} \operatorname{ind}_g x} = \begin{cases} 0 & \text{se } (k,p-1) \nmid \operatorname{ind}_g x \\ (k,p-1) & \text{se } (k,p-1) \mid \operatorname{ind}_g x \end{cases},$$

e l'ultima espressione scritta è proprio il numero di soluzioni in y della congruenza $y^k \equiv x \pmod{p}$ [2, pagg. 47-49]. In questo modo abbiamo che

$$S(p,a) = \sum_{m=1}^{p} e^{2\pi i a \frac{m^k}{p}} = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i a \frac{x}{p}} \left(1 + \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \chi(x)\right) =$$

$$= \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i a \frac{x}{p}} + \sum_{x=1}^{p} \sum_{\chi \in \mathscr{A}} e^{2\pi i a \frac{x}{p}} \chi(x) = \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i a \frac{x}{p}} \chi(x).$$

[1] Ciò si può vedere contando le soluzioni della congruenza $x^k \equiv 1 \pmod{p}$. Tale numero di soluzioni è proprio $(k, p-1)$, e la dimostrazione si può trovare ad esempio in [2, Teorema 7.1].

Adesso osserviamo che, dato che $p \nmid a$, quando x percorre gli interi modulo p anche ax fa altrettanto. Dunque ponendo $y = ax$ si ha che

$$S(p, a) = \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{y}{p}} \chi(y) \overline{\chi}(a) = \sum_{\chi \in \mathscr{A}} \overline{\chi}(a) \tau(\chi).$$

□

Dato p primo, definiamo $\tau = \tau(p)$ coma la massima potenza di p che divide k, e dopodiché poniamo

$$\gamma = \gamma(p) = \begin{cases} \tau + 1 & \text{se } p > 2 \text{ o se } p = 2 \text{ e } \tau = 0 \\ \tau + 2 & \text{se } p = 2 \text{ e } \tau > 0 \end{cases}.$$

Osservazione 7. Notiamo che $\gamma \leq k$, tranne nel caso $k = p = 2$ per il quale $\gamma = 3$.

Lemma 8. *Supponiamo che $p \nmid a$ e $l > \gamma$. Allora*

$$S(p^l, a) = \begin{cases} p^{l-1} & \text{se } l \leq k \\ p^{k-1} S(p^{l-k}, a) & \text{se } l > k \end{cases}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$S(p^l, a) = \sum_{m=1}^{p^l} e^{2\pi i a \frac{m^k}{p^l}} = \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^l} e^{2\pi i a \frac{m^k}{p^l}} + \sum_{m_1=1}^{p^{l-1}} e^{2\pi i a \frac{p^k m_1^k}{p^l}},$$

avendo scritto $m = pm_1$ quando $p \mid m$. Ricordiamo adesso che un residuo modulo p^l è una potenza k-esima modulo p^l se e solo se lo è modulo p^γ: così nella prima sommatoria al posto del ridotto modulo p^l di m^k possiamo scrivere $zp^\gamma + y^k$, con $z = 1, \ldots, p^{l-\gamma}$ e $y = 1, \ldots, p^\gamma$ ed anche $p \nmid y$. Quindi

$$S(p^l, a) = \sum_{m=1}^{p^l} e^{2\pi i a \frac{m^k}{p^l}} = \sum_{\substack{y=1 \\ p \nmid y}}^{p^\gamma} \sum_{z=1}^{p^{l-\gamma}} e^{2\pi i a \frac{zp^\gamma + y^k}{p^l}} + \sum_{m_1=1}^{p^{l-1}} e^{2\pi i a \frac{p^k m_1^k}{p^l}}.$$

La somma interna nella doppia sommatoria è nulla, pertanto dobbiamo analizzare la seconda. Se $l \leq k$ abbiamo

$$\sum_{m_1=1}^{p^{l-1}} e^{2\pi i a p^{k-l} m_1^k} = p^{l-1},$$

e se invece $l > k$ possiamo scrivere

$$\sum_{m_1=1}^{p^{l-1}} e^{2\pi i a \frac{p^k m_1^k}{p^l}} = \sum_{x=0}^{p^{k-1}-1} \sum_{m_1 = xp^{l-k}+1}^{xp^{l-k}+p^{l-k}} e^{2\pi i a \frac{m_1^k}{p^{l-k}}} = p^{k-1} S(p^{l-k}, a)$$

poiché la somma interna è $S(p^{l-k}, a)$ per ogni x, dato che m_1^k può essere ridotto modulo p^{l-k}. □

Lemma 9. *Supponiamo che $(q, r) = (qr, a) = 1$. Allora*

$$S(qr, a) = S(q, ar^{k-1}) S(r, aq^{k-1}).$$

Dimostrazione. Dall'algoritmo di Euclide ogni classe m modulo qr può essere scritta univocamente nella forma $m = tr + uq$ con $t = 1, \ldots, q$ e $u = 1, \ldots, r$. Così si ha

$$S(qr, a) = \sum_{m=1}^{qr} e^{2\pi i a \frac{m^k}{qr}} = \sum_{t=1}^{q} \sum_{u=1}^{r} e^{2\pi i a \frac{(tr+uq)^k}{qr}}.$$

La potenza k-esima all'esponente può essere ridotta modulo qr, così si ottiene

$$\begin{aligned} S(qr, a) &= \sum_{t=1}^{q} \sum_{u=1}^{r} e^{2\pi i a \frac{t^k r^k + u^k q^k}{qr}} = \\ &= \sum_{t=1}^{q} e^{2\pi i a r^{k-1} \frac{t^k}{q}} \cdot \sum_{u=1}^{r} e^{2\pi i a q^{k-1} \frac{u^k}{r}} = S(q, ar^{k-1}) S(r, aq^{k-1}). \end{aligned}$$

□

Teorema 10. *Supponiamo che* $(q, a) = 1$. *Allora*

$$S(q, a) \ll q^{1-1/k}.$$

Dimostrazione. Affrontiamo dapprima il caso in cui $k = 2$. Si ha

$$\begin{aligned} |S(q, a)|^2 = S(q, a)\overline{S(q, a)} &= \sum_{x=1}^{q} \sum_{y=1}^{q} e^{2\pi i a \frac{y^2 - x^2}{q}} = \\ &= \sum_{x=1}^{q} \sum_{z=1}^{q} e^{2\pi i a \frac{(z-2x)z}{q}} = \sum_{x=1}^{q} \left(\sum_{z=1}^{q} e^{2\pi i a \frac{z^2}{q}} \cdot e^{-2\pi i a \frac{2xz}{q}} \right) = \\ &= \sum_{z=1}^{q} e^{2\pi i a \frac{z^2}{q}} \cdot \sum_{x=1}^{q} \left(e^{-2\pi i a \frac{2z}{q}} \right)^x. \end{aligned}$$

Se $q \mid 2z$ la sommatoria in x dà come risultato q (in quanto si somma q volte il numero 1), mentre se $q \nmid 2z$ la sommatoria dà come risultato 0. Così possiamo scrivere

$$|S(q, a)|^2 = q \sum_{\substack{z=1 \\ q \mid 2z}}^{q} e^{2\pi i a \frac{z^2}{q}}.$$

Ora, $q \mid 2z$ se $z = q$ oppure se $z = q/2$ quando q è pari: con questa osservazione si ottiene subito che $|S(q, a)|^2 \leq 2q$, che dà la tesi nel caso in cui $k = 2$.
Dunque adesso possiamo supporre $k > 2$, e scriviamo $l = uk + v$ con $u \geq 0$ e $1 \leq v \leq k$, e supponiamo che $p \nmid a$. Grazie al Lemma 8 e all'osservazione 7 si ha

$$S(p^l, a) = p^{(k-1)u} S(p^v, a). \tag{2}$$

Se $u = 0$ l'uguaglianza è banale. Se $u > 0$ allora $l > k$ e $k \geq \gamma$ (grazie all'osservazione) e allora siamo nelle ipotesi del Lemma 8, che va applicato u volte. Per proseguire, consideriamo dapprima il caso $v > 1$. Se $p > k$ allora $\gamma = 1$: essendo $v > \gamma = 1$ e $v \leq k$ possiamo applicare il Lemma 8 e concludere che $S(p^v, a) = p^{v-1}$. Se $p \leq k$ allora banalmente $|S(p^v, a)| \leq p^v \leq kp^{v-1}$. Così nel caso $v > 1$

$$|S(p^l, a)| \leq \begin{cases} p^{l-l/k} & \text{se } p > k \\ kp^{l-l/k} & \text{se } p \leq k \end{cases}. \tag{3}$$

Per ottenere l'esponente $l - l/k$ si deve osservare che nella moltiplicazione delle due potenze di p dovute alla (2) si ha

$$(k-1)u + v - 1 = l - u - 1 = l - \frac{1}{k}(uk + k) \leq l - \frac{1}{k}(uk + v) = l - \frac{l}{k}.$$

Consideriamo adesso il caso $v = 1$. Dal Lemma 6 si ottiene

$$|S(p^v, a)| \leq kp^{1/2} \leq kp^{-1/6}p^{1-1/k},$$

in quanto $1/2 \leq -1/6 + 1 - 1/k$ quando $k \geq 3$. Usando questa stima si ha

$$\begin{aligned} |S(p^l, a)| &= p^{(k-1)u} \cdot kp^{-1/6}p^{1-1/k} = \\ &= kp^{l-l/k}p^{-1/6} \leq \begin{cases} p^{l-l/k} & \text{se } p > k^6 \\ kp^{l-l/k} & \text{se } p \leq k^6 \end{cases} . \end{aligned} \tag{4}$$

Adesso scriviamo $q = \prod_{i=1}^{h} p_i^{l_i}$ e applichiamo il Lemma 9 più volte per ottenere

$$S(q, a) = \prod_{i=1}^{h} S\left(p_i^{l_i}, a\Bigg(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{h} p_j^{l_j}\Bigg)^{k-1}\right).$$

Per ogni i scriviamo $l_i = u_i k + v_i$ nel solito modo e applichiamo (3) e (4). Quello che si ottiene è

$$|S(q, a)| \leq \prod_{\substack{i=1 \\ v_i > 1 \\ p_i \leq k}}^{h} k \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ v_i = 1 \\ p_i \leq k^6}}^{h} k \cdot \prod_{i=1}^{h} p_i^{l_i - l_i/k} \leq q^{1-1/k} \prod_{\substack{i=1 \\ p_i \leq k^6}}^{h} k \ll q^{1-1/k},$$

ossia quanto richiesto. □

Lemma 11. *Supponiamo che* $(a, q) = 1$. *Allora*

$$V\left(\frac{a}{q} + \beta, q, a\right) \ll \left\{\frac{1}{q} \min\left(n, |\beta|^{-1}\right)\right\}^{\frac{1}{k}}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo un lemma classico: se $|\beta| \leq 1/2$ allora

$$v(\beta) \ll \min\left(n^{\frac{1}{k}}, |\beta|^{-\frac{1}{k}}\right).$$

Sfruttando il lemma appena citato e il teorema precedente si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} V\left(\frac{a}{q} + \beta, q, a\right) &= \frac{S(q, a)}{q} v(\beta) \ll \frac{1}{q} q^{1-1/k} \min\left(n^{\frac{1}{k}}, |\beta|^{-\frac{1}{k}}\right) = \\ &= \left\{\frac{1}{q} \min\left(n, |\beta|^{-1}\right)\right\}^{\frac{1}{k}}, \end{aligned}$$

che è quanto voluto. □

4. La serie singolare

Per ogni intero h poniamo

$$S_h(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left(\frac{S(q,a)}{q} \right)^s e^{-2\pi i a \frac{h}{q}}.$$

Inoltre poniamo per comodità $S_n(q) = S(q)$ e definiamo la serie singolare $\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} S_n(q)$.

Lemma 12. *Supponiamo che $s \geq 1$ e scriviamo $l = uk + v$ con $1 \leq v \leq k$. Allora*

$$p^{us} S_h(p^l) \ll \begin{cases} p^{-s/2}\left(p^{1/2}(p^{l-1},h) + (p^l,h)\right) & \textit{se } l \equiv 1 \pmod{k} \\ p^{-s}(p^l,h) & \textit{se } l \not\equiv 1 \pmod{k} \end{cases}.$$

Inoltre, quando $\lambda = l - \max(k,\gamma)$ soddisfa $\lambda > 0$ e $p^\lambda \nmid h$ si ha $S_h(p^l) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $p > k$, così $\gamma = 1$. Allora

$$p^{ls} S_h(p^l) = p^{ls} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^l} \left(\frac{S(p^l,a)}{p^l} \right)^s e^{-2\pi i a \frac{h}{p^l}} = \left(p^{u(k-1)}\right)^s \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p^l} S(p^v,a)^s e^{-2\pi i a \frac{h}{p^l}},$$

dove nel secondo passaggio abbiamo applicato l'equazione (2). Chiamiamo S la sommatoria in a rimasta. Ognuno di questi a può essere scritto in modo unico nella forma $a = xp^v + y$ con $0 \leq x < p^{l-v}$ e $1 \leq y \leq p^v$ con $p \nmid y$, così

$$S = \sum_{\substack{y=1 \\ p \nmid y}}^{p^v} \sum_{x=0}^{p^{l-v}-1} S(p^v,a)^s e^{-2\pi i a \frac{h}{p^l}} = \sum_{\substack{y=1 \\ p \nmid y}}^{p^v} e^{-2\pi i y \frac{h}{p^l}} \sum_{x=0}^{p^{l-v}-1} S(p^v,a)^s e^{-2\pi i x \frac{h}{p^{l-v}}}.$$

Inoltre $S(p^v,a)$ può uscire dalla sommatoria in x (tanto a può essere preso modulo p^v). In questo modo

$$S = \sum_{\substack{y=1 \\ p \nmid y}}^{p^v} e^{-2\pi i y \frac{h}{p^l}} S(p^v,a)^s \sum_{x=0}^{p^{l-v}-1} e^{-2\pi i x \frac{h}{p^{l-v}}}.$$

La somma in x è nulla tranne nel caso in cui $p^{l-v} \mid h$, nel quale dà come risultato p^{l-v}: mettiamoci dunque nel caso $p^{l-v} \mid h$. Per facilità di comprensione suddividiamo i due casi che affronteremo adesso.

(i) Supponiamo dapprima $v > 1$ (ossia $l \not\equiv 1 \pmod{k}$). Essendo $\gamma = 1 < v \leq k$ grazie al Lemma 8 si ha $S(p^v,a) = p^{v-1}$, e allora

$$S = p^{l-v} p^{(v-1)s} \sum_{\substack{y=1 \\ p \nmid y}}^{p^v} e^{-2\pi i y \frac{h}{p^l}}.$$

Dato che $p^{l-v} \mid h$ scriviamo $h = p^{l-v}r$, così la sommatoria in y precedente diventa una somma di Ramanujan:

$$\sum_{\substack{y=1\\ p\nmid y}}^{p^v} e^{-2\pi i y \frac{h}{p^l}} = \sum_{\substack{y=1\\ p\nmid y}}^{p^v} e^{-2\pi i y \frac{r}{p^v}} = c_{p^v}(r) = \frac{\mu\left(\frac{p^v}{(p^v,r)}\right)\varphi(p^v)}{\varphi\left(\frac{p^v}{(p^v,r)}\right)} \ll$$
$$\ll \frac{\varphi(p^v)}{\varphi\left(\frac{p^v}{(p^v,r)}\right)} \leq \varphi((p^v,r)) \leq (p^v,r) = (p^v, hp^{v-l}).$$

Quindi in questo caso

$$S_h(p^l) \leq p^{-ls}p^{u(k-1)s}p^{l-v}p^{(v-1)s}p^{v-l}(p^l,h) = p^{-us-s}(p^l,h).$$

(ii) Adesso invece consideriamo il caso $v = 1$. Stavolta

$$S = p^{l-1}\sum_{\substack{y=1\\ p\nmid y}}^{p} S(p,a)^s e^{-2\pi i y \frac{h}{p^l}}.$$

Osservato che $S(p,a) = S(p,y)$ e applicando il Lemma 6 si ha

$$S = p^{l-1}\sum_{\chi_1,\ldots,\chi_s \in \mathscr{A}} \tau(\chi_1)\cdots\tau(\chi_s)\sum_{y=1}^{p}\overline{\chi_1}\cdots\overline{\chi_s}(y)e^{-2\pi i y \frac{h}{p^l}},$$

e sia S_1 la somma in y che qui compare. Quando $\chi_1\cdots\chi_s$ non è principale abbiamo

$$S_1 = \chi_1\cdots\chi_s(hp^{1-l})\tau\left(\overline{\chi_1}\cdots\overline{\chi_s}\right).$$

Per questa uguaglianza dobbiamo distinguere due casi: se $p^l \mid h$ allora le due espressioni sono uguali perché sono entrambe nulle. Se invece $p^l \nmid h$ (ossia $p \nmid hp^{1-l}$) allora basta osservare che quando $(n,q) = 1$ si ha

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi}) = \sum_{y=1}^{q}\overline{\chi}(y)e^{2\pi i y \frac{n}{q}}.$$

La dimostrazione di questa identità si effettua partendo da destra, ponendo $ny = x$ e riscrivendo la sommatoria. Quando invece $\chi_1 s\cdots\chi_s$ è principale, si scrive $h = p^{l-1}r$ e la sommatoria in y diventa

$$S_1 = c_p(r) = \begin{cases} p-1 & \text{se } p^l \mid h \\ -1 & \text{se } p^l \nmid h \end{cases}.$$

Sfruttando questa distinzione si arriva alla formulazione

$$S = p^{l-1}\left(\sum_{\substack{\chi_1,\ldots,\chi_s\in\mathscr{A}\\ \chi_1\cdots\chi_s\equiv 1}} + \sum_{\substack{\chi_1,\ldots,\chi_s\in\mathscr{A}\\ \chi_1\cdots\chi_s\not\equiv 1}}\right)\tau(\chi_1)\cdots\tau(\chi_s)S_1$$

Dal Lemma 6 ricordiamo che $|\tau(\chi_i)| = p^{1/2}$ e stimiamo banalmente $\#\mathscr{A} = (k, p-1) - 1 \le k$. Adesso se $p^l \mid h$ abbiamo

$$\begin{aligned} S &\ll p^{l-1}\left(p^{s/2}(p-1) + p^{s/2}p^{1/2}\right) = p^{l-1}p^{s/2}(p^{1/2} + p - 1) \ll \\ &\ll p^{l-1}p^{s/2}(p^{1/2} + p) = p^{s/2}\left((p^{l-1}, h)p^{1/2} + (p^l, h)\right). \end{aligned}$$

Se invece $p^l \nmid h$ si ha subito

$$S \ll p^{l-1}p^{s/2}(1 + p^{1/2}) = p^{s/2}\left((p^{l-1}, h)p^{1/2} + (p^l, h)\right).$$

Eseguendo il calcolo per $p^{us}S_h(p^l)$ si arriva dunque al risultato voluto.

Adesso dobbiamo ottenere la tesi nel caso in cui $p \le k$, e anche qui separiamo il problema in due casi.

(i) Supponiamo dapprima $l \le \max(k, \gamma)$, così $u = 0$ e $l = v$. Se $v = l = 1$ allora dall'equazione di inizio dimostrazione abbiamo

$$p^s S_h(p) = \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p} S(p, a)^s e^{-2\pi i a \frac{h}{p}} \ll p^{s/2} c_p(h) \le p^{s/2}(p-1) \le p^{s/2}\left(p^{1/2} + (p, h)\right),$$

avendo utilizzato la stima $S(p, a) \ll p^{1/2}$ nel secondo passaggio. Se invece $v = l > 1$ allora abbiamo

$$p^{vs} S_h(p^l) = \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p^l} S(p^l, a)^s e^{-2\pi i a \frac{h}{p^l}} \ll \left(p^{l-1}\right)^s c_{p^l}(h) \ll p^{ls-s}(p^l, h),$$

dove stavolta abbiamo usato il Teorema 10 nella prima stima. Quindi abbiamo la tesi del teorema in questo primo caso.

(ii) Supponiamo adesso $l > \max(k, \gamma)$ e scriviamo $l = uk + v$ dove però stavolta $\max(k, \gamma) - k < v \le \max(k, \gamma)$. Se $p^{l-v} \nmid h$ sappiamo che $S_h(p^l) = 0$. Se invece $p^{l-v} \mid h$ allora dall'equazione di inizio dimostrazione si ha

$$p^{ls} S_h(p^l) = p^{us(k-1)} p^{l-v} \sum_{\substack{y=1 \\ p \nmid y}}^{p^v} S(p^v, a)^s e^{-2\pi i \frac{yh}{p^l}} \ll p^{us(k-1)}(p^l, h),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato $S(p^v, a) \ll p^v \le k^v \ll 1$ e la solita stima con le somme di Ramanujan. Così $S_h(p^l) \ll p^{-us-vs}(p^l, h)$, che è più di quanto richiesto.

$\square$

Teorema 13. *Supponiamo che $s \ge 4$. Allora*

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} S_n(q)$$

converge assolutamente e $\mathfrak{S}(n) \ge 0$. Inoltre, quando $s \ge \max(5, k+2)$ vale $\mathfrak{S}(n) \ll 1$, e quando $\max(4, k) \le s < \max(5, k+2)$ vale $\mathfrak{S}(n) \ll n^{\varepsilon}$.

Dimostrazione. Un lemma classico mostra la moltiplicatività di $S(q)$, come in [3, Lemma 2.11]. Grazie al precedente lemma possiamo dare la stima

$$\sum_{l=1}^{\infty} |S_n(p^l)| \ll p^{-\frac{s-1}{2}} \cdot n \ll np^{-3/2},$$

grazie al fatto che $s \geq 4$. Sfruttando adesso la formula del prodotto di Eulero si ha

$$\sum_{q \leq Q} |S_n(q)| \leq \prod_{p \leq Q} \sum_{l=0}^{\infty} |S_n(p^l)| \leq \prod_{p \leq Q} C_1 np^{-3/2} \leq \prod_{p \leq Q} \left(1 + C_1 p^{-3/2}\right)^n \leq C_2^n,$$

dove C_1 e C_2 dipendono solo da k e da s. Questo mostra l'assoluta convergenza di $\mathfrak{S}(n)$. Il fatto che $\mathfrak{S}(n) \geq 0$ si ha dall'applicazione di alcuni lemmi svolti durante il corso e della prima parte di questo teorema[2].

Sia ϑ la massima potenza di p che divide n. Vogliamo adesso stimare $S_n(p^l)$ al variare di l. Intanto se $l > \vartheta + \max(k, \gamma)$ abbiamo che $l - \max(k, \gamma) > \vartheta \geq 0$ e $p^{l - \max(k,\gamma)} \nmid n$, e dunque per la seconda parte del Lemma 12 si ha $S_n(p^l) = 0$. Supponiamo adesso $l \leq \vartheta + \max(k, \gamma)$ e distinguiamo tre casi:

(i) se $v > 1$ si usa il lemma precedente e si ha

$$S_n(p^l) \ll p^{-us-s}(p^l, n) = \begin{cases} p^{-us-s} p^l & \text{se } \vartheta \geq l \\ p^{-us-s} p^{\vartheta} & \text{se } \vartheta < l \end{cases} = p^{-us-s+\min(l,\vartheta)};$$

(ii) se $v = 1$ e $l > \vartheta$ si ha invece

$$S_n(p^l) \ll p^{-us-s/2} \left(p^{1/2}(p^{l-1}, n) + (p^l, n)\right) = p^{-us-s/2} \left(p^{1/2} p^{\vartheta} + p^{\vartheta}\right) \ll p^{-us-s/2+1/2+\vartheta};$$

(iii) infine se $v = 1$ e $l \leq \vartheta$ allora

$$S_n(p^l) \ll p^{-us-s/2} \left(p^{1/2} p^{l-1} + p^l\right) = p^{-us-s+l}(p^{-1/2} + 1) \ll p^{-us-s/2+l}.$$

Riassumendo questi casi possiamo dire che per $l \leq \vartheta + \max(k, \gamma)$ si ha $S_n(p^l) \ll p^{\omega}$ con

$$\omega + us - \min(l, \vartheta) = \begin{cases} -1/2s & \text{se } l \leq \vartheta \text{ e } v = 1 \\ -1/2(s-1) & \text{se } l > \vartheta \text{ e } v = 1 \\ -s & \text{se } v \neq 1. \end{cases}.$$

Per arrivare a delle stime sulla serie singolare $\mathfrak{S}(n)$ dobbiamo passare dalla stima della quantità $\sum_{l=1}^{\infty} |S_n(p^l)|$. Anche qui daremo questa stima in tre diversi casi, che separiamo subito.

(i) Se $\vartheta = 0$ allora per ω si danno soltanto due dei tre casi scritti (precisamente il secondo e il terzo), e vale

$$\omega \leq -us - \frac{s-1}{2} \leq -\frac{3}{2} - us.$$

Così la serie scritta è $\mathcal{O}\left(p^{-3/2}\right)$ in quanto

$$\sum_{l=1}^{\infty} |S_n(p^l)| \ll \sum_{l=1}^{\max(k,\gamma)} p^{\omega} \ll \sum_{l=1}^{\max(k,\gamma)} p^{-3/2} \ll p^{-3/2}.$$

---

[2]I lemmi citati si trovano in [3], e sono i Lemmi 2.12, 2.13 e 2.15.

(ii) Se $\vartheta \geq 1$ e $s \geq \max(5, k+2)$ scriviamo

$$\sum_{l=1}^{\infty} |S_n(p^l)| = \sum_{l=1}^{\vartheta} |S_n(p^l)| + \sum_{l=\vartheta+1}^{\vartheta+\max(k,\gamma)} |S_n(p^l)|.$$

In ciascuna delle due sommatorie precedenti si utilizza $S_n(p^l) \ll p^\omega$ e dunque come al solito dobbiamo stimare ω:

$$\omega = \begin{cases} -us + l - \frac{1}{2}s & \text{se } l \leq \vartheta \text{ e } v = 1 \\ -us + \vartheta - \frac{1}{2}(s-1) & \text{se } l > \vartheta \text{ e } v = 1 \\ -us + \vartheta - s & \text{se } v \neq 1. \end{cases} \leq$$

$$\leq \begin{cases} -uk - 2u + l - 5/2 & \text{se } l \leq \vartheta \text{ e } v = 1 \\ -uk - 2u + l - 5/2 + 1/2 & \text{se } l > \vartheta \text{ e } v = 1 \\ -uk - 2u + l - k - 2 & \text{se } v \neq 1. \end{cases} \leq \begin{cases} -\frac{3}{2} & \text{se } l \leq \vartheta \text{ e } v = 1 \\ 0 & \text{se } l > \vartheta \text{ e } v = 1 \\ 0 & \text{se } v \neq 1. \end{cases}.$$

Da ciò si deduce che la serie iniziale è $\mathcal{O}\big(p^{-3/2}\big)$.

(iii) Se $\vartheta \geq 1$ e $s \geq \max(4, k)$ allora con il medesimo procedimento si può stimare ω, e stavolta si ottiene $\omega < 0$ in tutti i casi. Pertanto stavolta la serie iniziale è $\mathcal{O}(\vartheta)$.

Dalla formula di Eulero abbiamo

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} S_n(q) = \prod_p \sum_{l=0}^{\infty} S_n(p^l),$$

e quindi se $\vartheta = 0$ o $\vartheta \geq 1$ e $s \geq \max(5, k+2)$ abbiamo $\mathfrak{S}(n) \ll 1$, mentre se $\vartheta \geq 1$ e $s \geq \max(4, k)$ abbiamo $\mathfrak{S}(n) \ll \log n \ll d(n)^C$, dove C dipende solo da k e da s. □

Lemma 14. *Supponiamo che $s \geq \max(4, k+1)$. Allora*

$$\sum_{q \leq Q} q^{1/k} |S_n(q)| \ll (nQ)^\varepsilon.$$

Dimostrazione. Come primo passo occorre stimare la quantità $(p^l)^{1/k} S_n(p^l)$ al variare di l. Se $l > \vartheta + \max(k, \gamma)$ abbiamo già mostrato che tale quantità è nulla. Consideriamo adesso il caso $\vartheta < l \leq \vartheta + \max(k, \gamma)$: qui dobbiamo distinguere due casi a seconda della classe di congruenza di l modulo k.

(i) Se $l \equiv 1 \pmod k$ allora

$$(p^l)^{1/k} S_n(p^l) \ll p^{u + \frac{1}{k}} p^\omega = p^{u + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} - us + \vartheta},$$

e si ha $u + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} - us + \vartheta \leq u + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} - uk - u + l - 1 = -1$.

(ii) Se $l \not\equiv 1 \pmod k$ allora

$$(p^l)^{1/k} S_n(p^l) \ll p^{u + \frac{1}{k}} p^\omega = p^{u + \frac{v}{k} - s - us + \vartheta},$$

e inoltre $u + \frac{v}{k} - s - us + \vartheta \leq u + 1 - k - 1 - uk - u + l - 1 \leq -1$.

In entrambi i casi scritti abbiamo dunque $(p^l)^{1/k} S_n(p^l) \ll p^{-1}$. Infine ci rimane da stimare $(p^l)^{1/k} S_n(p^l)$ quando $l \leq \vartheta$: semplici stime come le due precedenti ci conducono a quantità che risultano $\leq 1 \leq l \leq \vartheta$, pertanto stavolta abbiamo $(p^l)^{1/k} S_n(p^l) \ll \vartheta$. Adesso sfruttiamo la moltiplicatività di $(p^l)^{1/k} S_n(p^l)$ e la formula di Eulero:

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq Q} q^{1/k}|S_n(q)| &\leq \prod_{p\leq Q}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}(p^l)^{1/k}S_n(p^l)\right) \leq \\ &\leq d(n)^C \prod_{p\leq Q}\left(1+\frac{C}{p}\right) \ll d(n)^C \prod_{p\leq Q}\left(1+\frac{1}{p}\right)^C \leq \\ &\leq d(n)^C (\log Q)^C \ll (nQ)^{\varepsilon}.\end{aligned}$$

□

5. Il contributo degli archi principali

Sia n un intero grande e poniamo

$$N = \left[n^{1/k}\right] \quad \text{e} \quad P = \frac{N}{2k}.$$

Definiamo degli archi principali più piccoli di quelli che abbiamo definito nella (1), e in particolare per $1 \leq a \leq q \leq P$ e $(a,q)=1$ poniamo

$$\mathfrak{M}_{q,a} = \left\{\alpha : \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{P}{qn}\right\}.$$

Come al solito denotiamo con $\mathfrak{M}$ l'unione di tutti questi archi. Con queste ipotesi gli archi sono a due a due disgiunti e sono contenuti nell'intervallo unitario

$$\mathfrak{U} = \left(\frac{P}{n}, 1+\frac{P}{n}\right].$$

Poniamo infine $R_{\mathfrak{M}}(m) = \int_{\mathfrak{M}} f(\alpha)^s e^{-2\pi i \alpha m}\, \mathrm{d}\alpha$.

Lemma 15. *Supponiamo $t \geq \max(4,k)$ e poniamo $\lambda = 0$ se $t \geq k+1$ e $\lambda = 1/k$ quando $t = k$. Sia inoltre*

$$S_t^*(q) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \left|\frac{S(q,a)}{q}\right|^t.$$

Allora

$$\sum_{q\leq Q} q^{-\lambda} S_t^*(q) \ll Q^{\varepsilon}.$$

Dimostrazione. In modo analogo a quanto fatto per $S_n(q)$ e con le stesse notazioni del Lemma 12 si dimostra che $S_r^*(q)$ è moltiplicativa e che

$$p^{ut-l} S_t^*(q) \ll \begin{cases} p^{-t/2} & \text{se } l \equiv 1 \pmod{k} \\ p^{-t} & \text{se } l \not\equiv 1 \pmod{k} \end{cases}.$$

In questo modo grazie alla formula di Eulero abbiamo

$$\sum_{q\leq Q} q^{-\lambda} S_t^*(q) \leq \prod_{p\leq Q}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty} p^{-\lambda l} S_t^*(p^l)\right). \tag{5}$$

A questo punto vogliamo dare una stima per la serie in l presente dentro la parentesi. Con pasaggi ovvi abbiamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\infty} p^{-\lambda l} S_t^*(p^l) &= \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{k} p^{-\lambda uk-\lambda v} S_t^*(p^{uk+v}) = \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} p^{-\lambda uk} \left(p^{-\lambda} S_t^*(p^{uk+1}) + \sum_{v=2}^{k} p^{-\lambda v} S_t^*(p^{uk+v}) \right) \ll \\
&\ll \sum_{u=0}^{\infty} p^{-\lambda uk} \left(p^{-\lambda-t/2-ut+uk+1} + \sum_{v=2}^{k} p^{-\lambda v-t-ut+uk+v} \right) = \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} p^{-\lambda uk-ut+uk} \left(p^{1-\lambda-t/2} + \sum_{v=2}^{k} p^{-\lambda v+v-t} \right),
\end{aligned}
$$

e dato che $\lambda \geq \max\left(\frac{1}{k}+1-\frac{t}{k}, 2-\frac{t}{2}\right)$ possiamo concludere la stima precedente con

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\infty} p^{-\lambda l} S_t^*(p^l) &\ll \sum_{u=0}^{\infty} p^{\left(\frac{1}{k}+1-\frac{t}{k}\right)uk-ut+uk} \left(p^{-1} + \sum_{v=2}^{k} p^{-t}(p^{-\lambda+1})^v \right) \leq \\
&\leq \sum_{u=0}^{\infty} p^{\left(\frac{1}{k}+1-\frac{t}{k}\right)uk-ut+uk} \left(p^{-1} + p^{-t} \sum_{v=2}^{k} (p^{-\frac{1}{k}+\frac{t}{k}})^k \right) = \\
&= \left\{ p^{-1} + p^{-1}(k+1) \right\} \sum_{u=0}^{\infty} p^{-u} \ll p^{-1}.
\end{aligned}
$$

Sostituendo questa stima nell'equazione (5) si ha

$$
\sum_{l=1}^{\infty} p^{-\lambda l} S_t^*(p^l) \ll \prod_{p \leq Q} \left(1 + \frac{C}{p}\right) \ll \prod_{p \leq Q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^C \leq (\log Q)^C \ll Q^{\varepsilon},
$$

ossia la tesi. $\square$

Teorema 16. *Supponiamo che $s \geq \max(5, k+1)$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che se $1 \leq m \leq n$ si ha*

$$
R_{\mathfrak{M}}(m) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1} m^{s/k-1} \mathfrak{S}(m) + \mathcal{O}\left(n^{s/k-1-\delta}\right).
$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$
R_{\mathfrak{M}}(m) = \int_{\mathfrak{M}} f(\alpha)^s e^{-2\pi i \alpha m} \, \mathrm{d}\alpha = \sum_{q \leq P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}} f(\alpha)^s e^{-2\pi i \alpha m} \, \mathrm{d}\alpha.
$$

La prima parte della dimostrazione consiste nell'ottenere un'espressione di $R_{\mathfrak{M}}(m)$ che coinvolga l'integrale di $V(\alpha, q, a)$ anziché di $f(\alpha)$. Sia $\alpha \in \mathfrak{M}_{q,a}$ e poniamo $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$. Dalla definizione degli archi maggiori si ha

$$
|\beta| \leq \frac{P}{nq} = \frac{N}{2k} \cdot \frac{1}{nq} = (2kQ)^{-1} \frac{N}{n} \leq (2kq)^{-1} n^{1/k-1},
$$

e allora abbiamo [3, pag. 43]

$$
f(\alpha) - V(\alpha, q, a) \ll q^{1/2+\varepsilon}.
$$

Da ciò abbiamo

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)^s - V(\alpha,q,a)^s = \Big(V(\alpha,q,a) + \mathcal{O}\Big(q^{1/2+\varepsilon}\Big)\Big)^s - V(\alpha,q,a)^s \leq \\
\leq \mathcal{O}\Big((q^{1/2+\varepsilon})^s\Big) + s\mathcal{O}\Big(q^{1/2+\varepsilon}\Big)\, V(\alpha,q,a)^{s-1} \ll \\
\ll (q^{1/2+\varepsilon})^s + q^{1/2+\varepsilon}|V(\alpha,q,a)|^{s-1}.
\end{aligned}
$$

Quindi con delle semplici manipolazioni

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}} (f(\alpha)^s - V(\alpha,q,a)^s) e^{-2\pi i\alpha m}\,\mathrm{d}\alpha \ll \\
&\ll \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}} \Big\{(q^{1/2+\varepsilon})^s + q^{1/2+\varepsilon}|V(\alpha,q,a)|^{s-1}\Big\}\,\mathrm{d}\alpha \leq \\
&\leq (q^{1/2+\varepsilon})^s \frac{P}{n} + \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} q^{1/2+\varepsilon}\left|\frac{S(q,a)}{q}\right|^{s-1} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}} |v(\beta)|^{s-1}\,\mathrm{d}\alpha \leq \\
&\leq (q^{1/2+\varepsilon})^s \frac{P}{n} + q^{1/2+\varepsilon} S^*_{s-1}(q) \int_{-\frac{P}{qn}}^{\frac{P}{qn}} |v(\beta)|^{s-1}\,\mathrm{d}\beta. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Adesso ricordiamo la definizione di $R_{\mathfrak{M}}(m)$ e si ha

$$
\begin{aligned}
R_{\mathfrak{M}}(m) &= \int_{\mathfrak{M}} (f(\alpha)^s - V(\alpha,q,a)^s)\, e^{-2\pi i\alpha m}\,\mathrm{d}\alpha + \int_{\mathfrak{M}} V(\alpha,q,a)^s e^{-2\pi i\alpha m}\,\mathrm{d}\alpha = \\
&= E + \sum_{q\leq P} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}} V(\alpha,q,a)^s e^{-2\pi i\alpha m}\,\mathrm{d}\alpha. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Vogliamo ora dare una stima su E, e per far ciò prendiamo la (6) e utilizziamo anche il lemma citato a inizio dimostrazione del Lemma 11:

$$
\begin{aligned}
E &\ll \sum_{q\leq P} (q^{1/2+\varepsilon})^s P n^{-1} + \sum_{q\leq P} q^{1/2+\varepsilon} S^*_{s-1}(q) \int_{-\frac{P}{qn}}^{\frac{P}{qn}} |v(\beta)|^{s-1}\,\mathrm{d}\beta \ll \\
&\ll Pn^{-1} \int_0^P q^{(1/2+\varepsilon)s}\,\mathrm{d}q + \sum_{q\leq P} q^{1/2+\varepsilon} S^*_{s-1}(q) \frac{P}{qn} n^{(s-1)/k} \leq \\
&\leq Pn^{-1} P^{(1/2+\varepsilon)s+1} + P^{3/4+\varepsilon} \sum_{q\leq P} q^{-1/4} S^*_{s-1}(q) n^{(s-1)/k-1} \leq \\
&\leq P^2 n^{-1} (P^{1/2+\varepsilon})^s + P^{3/4+\varepsilon} \sum_{q\leq P} q^{-1/4} S^*_{s-1}(q) n^{(s-1)/k-1+\varepsilon},
\end{aligned}
$$

dove n^ε nasce dall'aver considerato anche il caso $s = k+1$. Dato che $\lambda \le \frac{1}{4}$ per ogni k e per ogni t si ha

$$
\begin{aligned}
E &\ll P^2 n^{-1}(P^{1/2+\varepsilon})^s + P^{3/4+\varepsilon} n^{(s-1)/k-1+\varepsilon} \sum_{q \le P} q^{-\lambda} S^*_{s-1}(q) \ll \\
&\ll P^2 n^{-1}(P^{1/2+\varepsilon})^s + P^{3/4+\varepsilon} n^{(s-1)/k-1+\varepsilon} P^\varepsilon \ll n^{s/k-1-\delta}
\end{aligned}
$$

per un certo $\delta > 0$. Sin qui abbiamo dunque mostrato che

$$
R_{\mathfrak{M}}(m) = \sum_{q \le P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}} V(\alpha, q, a)^s e^{-2\pi i \alpha m} \, d\alpha + \mathcal{O}\Big(n^{s/k-1-\delta}\Big).
$$

L'integrale sull'arco $\mathfrak{M}_{q,a}$ è fatto per $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{P}{qn}$, e dato che $\frac{P}{qn} \le \frac{1}{2}$ vorremmo prolungare l'integrale sull'arco $\mathfrak{M}_{q,a}$ a un integrale su $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{2}$. Per fare ciò poniamo

$$
\mathfrak{N}_{q,a} = \left\{ \alpha \,:\, \frac{P}{qn} < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{2} \right\},
$$

allora si ha

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{N}_{q,a}} V(\alpha, q, a)^s e^{-2\pi i \alpha m} \, \mathrm{d}\alpha &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \frac{S(q,a)^s}{q^s} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{P}{qn}} + \int_{\frac{P}{qn}}^{\frac{1}{2}} \right) v(\beta)^s e^{-2\pi i \beta m} e^{-2\pi i a \frac{m}{q}} \, \mathrm{d}\beta = \\
= S_m(q) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{P}{qn}} + \int_{\frac{P}{qn}}^{\frac{1}{2}} \right) v(\beta)^s e^{-2\pi i \beta m} \, \mathrm{d}\beta &\ll |S_m(q)| \int_{\frac{P}{qn}}^{\infty} \beta^{-s/k} \, \mathrm{d}\beta \ll \left(\frac{qn}{P}\right)^{s/k-1} |S_m(q)|.
\end{aligned}
$$

Adesso applichiamo il Lemma 14 e teniamo conto che $m \le n$: si ha

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q \le P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{N}_{q,a}} V(\alpha, q, a)^s e^{-2\pi i \alpha m} \, \mathrm{d}\alpha \ll \\
&\quad \ll \sum_{q \le P} |S_m(q)| \left(\frac{qn}{P}\right)^{s/k-1} \le \frac{n^{s/k-1}}{P^{s/k-1}} P^{(s-1)/k-1} \sum_{q \le P} |S_m(q)| q^{1/k} \ll \\
&\quad \ll n^{s/k-1} P^{-1/k} (mP)^\varepsilon \ll n^{s/k-1-\delta}.
\end{aligned}
$$

Riprendiamo adesso l'equazione (7) per $R_{\mathfrak{M}}(m)$, utilizziamo la stima per E e la stima appena conclusa:

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{M}}(m) &= \sum_{q\le P} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}} V(\alpha,q,a)^s e^{-2\pi i\alpha m}\,\mathrm{d}\alpha + \mathcal{O}\Big(n^{s/k-1-\delta}\Big) = \\ &= \sum_{q\le P} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}_{q,a}\cup\mathfrak{N}_{q,a}} V(\alpha,q,a)^s e^{-2\pi i\alpha m}\,\mathrm{d}\alpha + \mathcal{O}\Big(n^{s/k-1-\delta}\Big) = \\ &= \sum_{q\le P} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}} \frac{S(q,a)^s}{q^s} e^{-2\pi i a\frac{m}{q}} \int_{-\frac12}^{\frac12} v(\beta)^s e^{-2\pi i\beta m}\,\mathrm{d}\beta + \mathcal{O}\Big(n^{s/k-1-\delta}\Big) = \\ &= \sum_{q\le P} S_m(q)\cdot \int_{-\frac12}^{\frac12} v(\beta)^s\,\mathrm{d}\beta + \mathcal{O}\Big(n^{s/k-1-\delta}\Big) = \\ &= \mathfrak{S}(m,P) I(m) + \mathcal{O}\Big(n^{s/k-1-\delta}\Big), \end{aligned}$$

con le ovvie definizioni di $\mathfrak{S}(m,P)$ e $I(m)$. L'ultimo passaggio consiste nel sostituire la serie alla somma troncata $\mathfrak{S}(m,P)$. Applicando il Lemma 14 abbiamo

$$\sum_{Q<q\le 2Q} |S_m(q)| \le Q^{-1/k} \sum_{Q<q\le 2Q} q^{1/k}|S_m(q)| \ll n^{\varepsilon} Q^{\varepsilon-1/k},$$

e quindi

$$\sum_{q>P} |S_m(q)| = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j P<q\le 2^{j+1}P} |S_m(q)| \ll n^{-\delta}.$$

Così possiamo scrivere che $\mathfrak{S}(m,P) = \mathfrak{S}(m) + \mathcal{O}\big(n^{-\delta}\big)$. Per il Teorema 4 abbiamo anche che

$$I(m) = J(m) = \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1} m^{s/k-1}\left(1+\mathcal{O}\Big(m^{-1/k}\Big)\right),$$

da cui abbiamo la tesi grazie al Teorema 13. □

6. Il risultato finale

Dati n e q interi definiamo $M_n(q)$ come il numero di soluzioni della congruenza

$$m_1^k + \cdots + m_s^k \equiv n \pmod q,$$

con $1 \le m_i \le q$. Denotiamo invece con $M_n^*(q)$ il numero di soluzioni della stessa congruenza con l'ulteriore proprietà che $(m_1, q) = 1$.

Teorema 17. *Supponiamo che $s \ge \max(4, k+1)$ e $M_n^*(p^\gamma) > 0$ per ogni primo p. Allora $\mathfrak{S}(n) \gg 1$.*

Dimostrazione. Ricordiamo due lemmi mostrati durante il corso[3]: il primo afferma che per ogni q vale

$$\sum_{d|q} S_n(d) = q^{1-s} M_n(q).$$

[3]Tali lemmi sono il Lemma 2.12 e il Lemma 2.13 in [3].

Il secondo afferma che se $M_n^*(p^\gamma) > 0$ e $t \geq \gamma$ allora $M_n^*(p^t) \geq p^{(t-\gamma)(s-1)}$. Ricordando che la serie $\mathfrak{S}(n)$ converge assolutamente grazie al Teorema 13 possiamo scrivere

$$\sum_{l=0}^{\infty} S_n(p^l) = \lim_{N\to\infty} \sum_{l=0}^{N} S_n(p^l) = \lim_{N\to\infty} \sum_{d|p^N} S_n(d) =$$
$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\geq\gamma}} p^{N(1-s)} M_n(p^N) \geq \lim_{N\to\infty} p^{N(1-s)+(N-\gamma)(s-1)} = p^{\gamma(1-s)}.$$

A questo punto per avere la tesi è sufficiente mostrare che se $p > k$ allora si ha $\sum_{l=1}^{\infty} S_n(p^l) \geq -Cp^{-3/2}$: infatti poi

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_p \sum_{l=0}^{\infty} S_n(p^l) \gg \prod_p \left(1 - Cp^{-3/2}\right) \gg 1.$$

Con argomenti analoghi a quelli del Lemma 12 possiamo mostrare i seguenti due lemmi.

Lemma 18. *Se $l = uk + v$ con $2 \leq v \leq k$ allora*

$$p^{(u+1)s-l} S_n(p^l) = \begin{cases} 1 - 1/p & \text{se } p^l \mid n \\ -1/p & \text{se } p^{l-1} \mid\mid n \\ 0 & \text{se } p^{l-1} \nmid n \end{cases}.$$

Dimostrazione. Se $p^{l-v} \mid n$ allora dal Lemma 12 abbiamo

$$p^{ls-us(k-1)} S_n(p^l) = p^{l-v} p^{(v-1)s} \sum_{\substack{y=1 \\ p\nmid y}}^{p^v} e^{-2\pi i y \frac{n}{p^l}},$$

da cui, ponendo $n = rp^{l-v}$, otteniamo

$$p^{(u+1)s-l} S_n(p^l) = p^{-v} c_{p^v}(r) = p^{-v} \frac{\varphi(p^v)\mu\left(\frac{p^v}{(r,p^v)}\right)}{\varphi\left(\frac{p^v}{(r,p^v)}\right)}.$$

Nei casi $p^l \mid n$ e $p^{l-1} \mid\mid n$ la tesi segue sviluppando l'espressione precedente. Per l'ultimo caso dobbiamo osservare che se $p^{l-v} \nmid n$ allora $S_n(p^l) = 0$ e abbiamo concluso. Se invece $p^{l-v} \mid n$ ma $p^{l-1} \nmid n$ allora scriviamo $n = p^{l-v+x} n'$, dove $0 \leq x \leq v-2$ e $(n', p) = 1$, e si ha

$$(r, p^v) = p^x.$$

Così $\mu(p^{v-x}) = 0$ in quanto $v - x \geq 2$. □

Lemma 19. *Se $l \equiv 1 \pmod k$ allora $S_n(p^l) = 0$ tranne quando $p^{l-1} \mid n$, caso in cui*

$$p^{-[l/k](k-s)} S_n(p^l) =$$
$$= p^{-s} \sum_{\chi_1, \ldots, \chi_s \in \mathscr{A}} \tau(\chi_1) \cdots \tau(\chi_s) \sum_{a=1}^{p-1} \overline{\chi_1} \cdots \overline{\chi_s}(a) e^{-2\pi i a \frac{n}{p^l}}.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 12 abbiamo che

$$p^{ls-us(k-1)}S_n(p^l) = S =$$
$$= p^{-s}p^{l-1+s} \sum_{\chi_1,\,\dots,\,\chi_s\in\mathscr{A}} \tau(\chi_1)\cdots\tau(\chi_s)\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\chi_1}\cdots\overline{\chi_s}(a)e^{-2\pi i a\frac{n}{p^l}}.$$

Portando p^{l-1+s} al primo membro otteniamo $p^{-u(k-s)}S_n(p^l)$, e si conclude osservando che se $v=1$ allora $[l/k]=u$. □

Adesso dobbiamo dare una stima per le somme di $S_n(p^l)$ su l nei due casi in cui $l\equiv 1 \pmod k$ e $l\not\equiv 1 \pmod k$. Iniziamo dapprima da una stima per $\sum_{l\not\equiv 1 \pmod k} S_n(p^l)$. Sia ϑ tale che $p^\vartheta \mid\mid n$, allora grazie al Lemma 18

$$\sum_{l\not\equiv 1 \pmod k} S_n(p^l) = \sum_{\substack{l\not\equiv 1 \pmod k\\ p^l\mid n}} S_n(p^l) + \sum_{\substack{l\not\equiv 1 \pmod k\\ p^{l-1}\mid\mid n}} S_n(p^l) =$$
$$= \sum_{\substack{l\not\equiv 1 \pmod k\\ l\le\vartheta}} S_n(p^l) + \sum_{\substack{l\not\equiv 1 \pmod k\\ l=\vartheta+1}} S_n(p^l).$$

Se $\vartheta\not\equiv 0 \pmod k$ allora compare l'addendo dato dalla seconda sommatoria, ossia compare

$$S_n(p^{\vartheta+1}) = -\frac{1}{p}p^{l-(u+1)s} = -p^{\vartheta-(u+1)s},$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato nuovamente il Lemma 18. Così nel caso $\vartheta\not\equiv 0 \pmod k$ abbiamo

$$\sum_{l\not\equiv 1 \pmod k} S_n(p^l) \ge -p^{\vartheta-(u+1)s}.$$

Un semplice calcolo mostra che

$$\left[\frac{\vartheta}{k}\right] = u \quad \text{e} \quad \frac{1}{k} \le \left\{\frac{\vartheta}{k}\right\} \le \frac{k-1}{k},$$

dove u è tale che $l=\vartheta+1=uk+v$ con $2\le v\le k$. In questo modo

$$\vartheta-(u+1)s = \left[\frac{\vartheta}{k}\right]k + \left\{\frac{\vartheta}{k}\right\}k - \left[\frac{\vartheta}{k}\right]s - s \le \left[\frac{\vartheta}{k}\right](k-s)+k-1-s,$$

e si deve osservare che tale esponente, che chiamiamo λ, soddisfa $\lambda\le -2$. Così nel caso $\vartheta\not\equiv 0 \pmod k$ abbiamo ottenuto

$$\sum_{l\not\equiv 1 \pmod k} S_n(p^l) \ge -p^\lambda, \tag{8}$$

e questa stima del resto vale banalmente se $\vartheta\equiv 0 \pmod k$. Adesso invece consideriamo $\sum_{l\equiv 1 \pmod k} S_n(p^l)$: grazie al Lemma 19 intanto abbiamo

$$\sum_{l\equiv 1 \pmod k} S_n(p^l) = \sum_{\substack{l\equiv 1 \pmod k\\ p^l\mid n}} S_n(p^l) + \sum_{\substack{l\equiv 1 \pmod k\\ p^{l-1}\mid\mid n}} S_n(p^l),$$

dato che $S_n(p^l)=0$ se $p^{l-1}\nmid n$. Nei casi restanti sviluppiamo ora $S_n(p^l)$ grazie al Lemma 19. Dal Lemma 6 segue che i termini in cui $\chi_1\cdots\chi_s\ne\chi_0$ contribuiscono $\ll p^{(s+1)/2}$, mentre per quelli con

$\chi_1 \cdots \chi_s = \chi_0$ dobbiamo distinguere due casi: se $p \nmid np^{1-l}$ (ossia $p^{l-1} \parallel n$) questi termini danno un contributo $\ll p^{s/2}$, mentre se $p^l \mid n$ danno un contributo $\ll p^{s/2+14}$. Dunque

$$\sum_{\substack{l \equiv 1 \pmod k \\ p^{l-1} \| n}} S_n(p^l) = p^{[l/k](k-s)} p^{-s/2+1/2} \ll p^{-3/2},$$

dato che se $p^{l-1} \parallel n$ allora $l = \vartheta + 1$, $[l/k] = u$ e dunque $[l/k](k-s) = uk - us \leq -u$. Così intanto abbiamo ottenuto

$$\sum_{l \equiv 1 \pmod k} S_n(p^l) = \sum_{\substack{l \equiv 1 \pmod k \\ p^l | n}} S_n(p^l) + \mathcal{O}\Big(p^{-3/2}\Big).$$

Adesso ci rimane da stimare la sommatoria in cui $p^l \mid n$: in questo caso

$$S_n(p^l) \ll p^{[l/k](k-s)} p^{-s/2+1}.$$

Così se $s \geq 5$ allora sempre dal Lemma 6 abbiamo $S_n(p^l) \ll p^{[l/k](k-s)-3/2}$, e dunque

$$\sum_{\substack{l \equiv 1 \pmod k \\ p^l | n}} S_n(p^l) \ll p^{-3/2}.$$

Dunque rimane da considerare $S_n(p^l)$ quando $p^l \mid n$ e $s = 4$. Si ha

$$\begin{aligned}
p^{-[l/k](k-s)} S_n(p^l) &= p^{-u(k-s)} \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p^l} \left(\frac{S(p^l, a)}{p^l} \right)^s = \\
&= p^{-u(k-s)} \frac{p^{u(k-1)s}}{p^{(l-1)s}} \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p^l} \left(\frac{S(p, a)}{p} \right)^s = \\
&= p^{-u(k-s)} \frac{p^{u(k-1)s}}{p^{(l-1)s}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \sum_{\substack{a=jp+1 \\ p \nmid a}}^{(j+1)p} \left(\frac{S(p, a)}{p} \right)^s = \\
&= p^{-u(k-s)} \frac{p^{u(k-1)s}}{p^{(l-1)s}} p^{l-1} S_p(p) = S_p(p),
\end{aligned}$$

ed è quindi sufficiente mostrare che $S_p(p) \geq 0$. Notiamo che

$$S_p(p) = \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{S(p, a)}{p} \right)^4,$$

e dunque la dimostrazione è conclusa mostrando che quando $k = 2$ o 3 e $p > k$ allora $S(p, a)$ è reale o immaginario puro. I due valori di k indicati provengono dal fatto che $s \geq \max(4, k + 1)$ e $s = 4$. Se $k = 2$ allora il Lemma 6 dà

$$S(p, a) = \chi(a)\tau(\chi),$$

dove χ è il simbolo di Legendre $\chi(a) = (a/p)$. Così

$$\overline{S(p, a)} = S(p, -a) = \chi(-a)\tau(\chi) = \chi(-1)S(p, a),$$

[4]Basta ricordare che $|\tau(\chi_i)| = p^{1/2}$ e poi stimare $\sum_{a=1}^{p-1} \overline{\chi_1} \cdots \overline{\chi_s}(a) e^{-2\pi i a \frac{n}{p^l}}$ nei vari casi.

e dunque $S(p,a)$ è reale o immaginario puro a seconda che $\chi(-1)=1$ o $\chi(-1)=-1$. Quando $k=3$ invece vale $(-x)^k=-x^k$ e dunque

$$\overline{S(p,a)}=S(p,-a)=S(p,a),$$

e dunque $S(p,a)$ è reale. $\square$

Teorema 20. *Supponiamo che $s \geq 5$ quando $k=2$, che $s \geq 4k$ quando k è una potenza di 2 e che $s \geq \frac{3}{2}k$ altrimenti. Allora $\mathfrak{S}(n) \gg 1$.*

Dimostrazione. Ricordiamo un lemma del testo: se

$$s \geq \begin{cases} p/(p-1)(k,p^\tau(p-1)) & \text{se } \gamma=\tau+1 \\ 2^{\tau+2} & \text{se } \gamma=\tau+2 \text{ e } k>2 \\ 5 & \text{se } p=k=2 \end{cases}$$

allora per ogni n vale $M_n^*(p^\gamma)>0$ [3], Lemma 2.15. La dimostrazione di questo teorema consiste nel far vedere che sotto le ipotesi date sono rispettate le condizioni appena scritte su s. In questo modo otteniamo la positività di $M_n(p^\gamma)$ per ogni p, e questo grazie al teorema precedente ci dà $\mathfrak{S}(n) \gg 1$. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1976

[2] H. Loo Keng, *Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982

[3] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood Method*, Cambridge University Press, 1997

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Email address: alessio.delvigna@dm.unipi.it