Es. 2 (iii)

$f(x,y) = x^y$ piano tang. in $P=(2,1)$

$f(x,y) = x^y = \left(e^{\log x}\right)^y = e^{y \log x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \{x > 0\}$

P è p.to interno del dominio di f e f è diff. in P perché comp. di funz. diff.

$\Rightarrow$ $\exists$ piano tang. al grafico di f in P

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y \log x} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{y \log x} \cdot \log x$$

$$\nabla f(2,1) = \left(e^{\log 2} \cdot \frac{1}{2},\ e^{\log 2} \cdot \log 2\right) =$$

$$= (1,\ 2 \log 2)$$

$\Rightarrow$ $z = 2 + 1 \cdot (x-2) + 2\log 2\,(y-1)$
eq. del piano tang.

Es. 3 (iii)

$f(x,y) = \log^2\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ differenz.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$

Nei punti $(x,y) \neq (0,0)$ f si scrive come comp. di funzioni diff.

$\Rightarrow f$ differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Diff. in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\underline{e}_1) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\log^2(1+|t|)}{|t|^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{|t|}^{2}\, t}{\cancel{t}}}_{\to 0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\log^2(1+|t|)}{t} = 0$$

$\Rightarrow f$ ammette le derivate parziali in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log^2(1+\sqrt{x^2+y^2}) - 0 - 0\cdot x - 0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\log^2(1+\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\downarrow \, 0} = 0$$

$\Rightarrow f$ è diff. in $(0,0) \Rightarrow f$ è diff. in $\mathbb{R}^2$

CON TEOREMA DEL DIFF. TOTALE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\log(1+\sqrt{x^2+y^2}) \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x \log(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y \log(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Le due espressioni valgono per $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x \log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ continua in ogni $(x,y) \neq (0,0)$

In $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}_{\to 2} \overset{\to 0}{x} \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}}_{\to 1} = 0$$

$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ continua in $(0,0)$

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua su $\mathbb{R}^2$

$\underset{\text{Teo. diff. totale}}{\Longrightarrow}$ f è diff. in $(0,0)$

Es. 3 (viii)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y+y^5}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^2$$

f è diff. in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ perché quoziente di f. differenziabili

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{t^5/t^4}{t}=1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\frac{2x^2y+y^5}{x^2+y^4}-1\cdot y\right)=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{\underbrace{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}_{g(x,y)}}\quad\nexists\Rightarrow$$ f non diff. in $(0,0)$

$$\Uparrow$$

$$g|_{\{y=\lambda x\}}(x)=\frac{\lambda\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}\underbrace{(1+\lambda^4x^2)}_{\to1}|x|\sqrt{1+\lambda^2}}\quad\nexists \text{ per } \lambda\neq0$$

non ha lim.

Es. 3 (vii)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2y^2 + xy^4}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$

f è diff. in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché quoz. di funz. differenziabili

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2 \cdot h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(\frac{x^3+x^2y^2+xy^4}{x^2+y^4} - x \right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}}_{g(x,y)}$$

$g|_{\{x=0\}}$, $g|_{\{y=0\}}$ hanno limite 0

$$g\big|_{\{y=\lambda x\}}(x) = \frac{\lambda^2 \cancel{x^4}\, x^2 \quad |x| \to 0}{\cancel{x^2}\underbrace{(1+\lambda^4 x^2)}_{\to 1}\, \cancel{|x|}\, \sqrt{1+\lambda^2}} = 0$$

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^4}\,\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,|y| \leq$$

$$\leq 1 \cdot 1 \cdot |y| \longrightarrow 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq |y|$$

$$x^2 \leq x^2+y^4$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \Rightarrow f \text{ è diff. in } (0,0)$$

$$\Rightarrow f \text{ è diff. su } \mathbb{R}^2$$

Es. (non vale il viceversa del teo. del diff. totale)

$f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$ (i) f diff. in $(0,0)$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ (ii) $\frac{\partial f}{\partial y}$ non cont. in $(0,0)$

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt[3]{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$

definita e continua su $\mathbb{R}^2$ | definita su $\{y \neq 0\}$

$\Rightarrow f$ diff. su $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$

Studiamo nei p.ti $(k,0)$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(k,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((k,0)+t\underline{e}_2) - f(k,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{k\sqrt[3]{t} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} k \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} =$$

$$= \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \mathrm{sgn}(k) \cdot \infty & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \Leftarrow$$

$$0 \leq \left| \frac{x\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|\sqrt[3]{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \cdot \sqrt[3]{|y|} \to 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq |x|$$

$\Rightarrow$ f è diff. in $(0,0)$

(ii) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} & y \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}}_{g(x,y)} \quad \cancel{\exists} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \text{ non è cont in } (0,0)$$

$$\Uparrow$$

$$g\big|_{\{y=x^{3/2}\}}(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^{3/2})^2}} = 1 \quad \forall x \neq 0$$

$$g\big|_{\{x=0\}}(y) = 0 \quad \forall y \neq 0$$