

Compitino di Matematica Discreta e Algebra Lineare

2 aprile 2020

Esercizio 1. Consideriamo il sottospazio di \mathbb{R}^3 dato da

$$V := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Decidere se uno dei due vettori seguenti appartiene a V :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(ii) Dare un esempio di un'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con nucleo uguale a V .

Esercizio 2. Sia $t \in \mathbb{R}$ e si considerino i due sottospazi di \mathbb{R}^4 definiti da

$$V := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad W_t := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Determinare la dimensione di V e la dimensione di W_t al variare di t .

(ii) Determinare la dimensione di $V \cap W_t$ al variare di t .

(iii) Scrivere le equazioni cartesiane del sottospazio W_{-1} .

Esercizio 3. Sia $(a_n)_{n \geq 0}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 5a_n + a_{n-1} \quad \text{per } n \geq 1 \end{cases}.$$

(i) Dimostrare che il numero 123456789 non appartiene alla successione.

(ii) Dimostrare che $5 \nmid (a_n + a_{n+1})$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2^x \equiv 9 \pmod{17} \\ 5x \equiv a \pmod{12} \end{cases}.$$

(i) Si determinino i valori del parametro intero a per cui il sistema è risolubile.

(ii) Si determini la soluzione del sistema per $a = 3$.