Foglio di esercizi

Alessio Del Vigna

25 maggio 2021

1 Sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$

Esercizio 1. Sia $m \in \mathbb{R}$. In $\mathbb{R}^3$ si considerano i tre punti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ i tre punti sono allineati.

(ii) Per il valore di m determinato al punto precedente, si scrivano le equazioni cartesiane della retta r che passa da p_1, p_2 e p_3.

(iii) Si calcoli la distanza di r dall'origine e il punto di r che realizza la minima distanza.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ si considerano i tre punti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che p_1, p_2 e p_3 non sono allineati, si determini l'equazione del piano che li contiene.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ si considerano le due rette parallele

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Si determinino le equazioni cartesiane del piano π che contiene entrambe le rette e si calcoli la distanza di π dall'origine.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ si considerano le due rette seguenti:

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad s : \begin{cases} y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}.$$

(i) Determinare la posizione reciproca di r e s e calcolare la loro distanza.

(ii) Determinare una trasformazione affine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che mandi s in r, ossia tale che $f(s) = r$.

Esercizio 5. Consideriamo il piano π e la retta r in $\mathbb{R}^4$ definiti dalle seguenti equazioni:

$$\pi : \begin{cases} x + w = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r : \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2w = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} .$$

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta s che interseca sia r che π e che è parallela a $v = (1, -1, 0, 1)^\top$, se esiste.

Esercizio 6. Discutere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca dei due sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$

$$\pi_\lambda : x + y - 2z = \lambda - 2 \quad \text{e} \quad \ell_\lambda : \begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 3 \end{cases} .$$

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^3$ sono date le tre rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} , \qquad r_2 : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} .$$

Si determinino le equazioni cartesiane di una retta r che intersechi tutte e tre le rette.

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^4$ sono date le rette seguenti:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad r_2 = \operatorname{Span}\left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)\right) .$$

(i) Determinare la dimensione di $\operatorname{Span}(r_1 \cup r_2)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Per $\lambda = 0$, determinare la distanza tra r_1 e r_2 e i punti di r_1 e r_2 dove si realizza la minima distanza tra r_1 e r_2.

2 Coniche

Esercizio 9. Si considerino le coniche date dalle seguenti equazioni:

(i) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

(ii) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

(iii) $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 32\sqrt{3}x = 0$

(iv) $34x^2 - 24xy + 41y^2 + 40x + 30y = 0$

(v) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

(vi) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

Si classifichi ciascuna conica $\mathcal{C}$ e si determinino le equazioni dell'isometria di $\mathbb{R}^2$ che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica.

Esercizio 10. Classificare la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$.

Esercizio 11. Sia $\mathcal{P}$ la parabola con vertice $V = (2, -2)^\top$, passante per $P = (0, 2)^\top$ e con asse parallelo alla retta di equazione $x - y = 0$. Determinare l'equazione di $\mathcal{P}$.

Esercizio 12. Sia $\mathcal{E}$ l'ellisse di semiassi 3 e 1, con centro in $(0,0)^\top$ e asse maggiore lungo la retta di equazione cartesiana $x - \sqrt{3}y = 0$. Determinare l'equazione di $\mathcal{E}$ ed anche le equazioni dell'isometria che porta $\mathcal{E}$ nella sua forma canonica.

Esercizio 13. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si consideri la conica $\mathcal{C}_{a,b}$ di equazione

$$x^2 + 6xy - by^2 - a = 0.$$

(i) Si classifichi il tipo di $\mathcal{C}_{a,b}$ al variare di a e b.

(ii) Esistono valori di a e b per cui $\mathcal{C}_{a,b}$ è una parabola non degenere?