Prodotti scalari e matrici

Alessio Del Vigna

7 maggio 2021

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Un *prodotto scalare* su V è un'applicazione $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ che sia

(i) *bilineare*, ossia per ogni $v_1, \ldots, v_k, w \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ valgono

$$\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \,|\, w \rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle v_j \,|\, w \rangle \quad \text{e} \quad \langle w \,|\, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle w \,|\, v_j \rangle;$$

(ii) *simmetrica*, ossia $\langle v \,|\, w \rangle = \langle w \,|\, v \rangle$ per ogni $v, w \in V$;

(iii) *definita positiva*, ossia $\langle v \,|\, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in V$ e $\langle v \,|\, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

1 Prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$ definiti da matrici

Ricordiamo che su $\mathbb{R}^n$ è definito il *prodotto scalare standard*

$$\langle X \,|\, Y \rangle_{st} = X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ove $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$. Questo è solo un caso particolare di una classe di prodotti scalari definibili tramite matrici [1]. Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ possiamo definire l'applicazione

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \langle X \,|\, Y \rangle_A = X^\top A Y.$$

La precedente relazione si può scrivere in maniera esplicita in funzione delle coordinate dei vettori X e Y e degli elementi della matrice A:

$$\begin{aligned} X^\top A Y &= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\ &= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \end{aligned} \tag{1}$$

Quest'ultima espressione risulta molto utile nelle applicazioni.

Osservazione 1. Il prodotto scalare standard corrisponde al caso in cui $A = I$, dove I è la matrice identità $n \times n$.

[1] Si veda l'Esempio 2.4-(2) del file di Berarducci, che si trova qui: `https://elearn.ing.unipi.it/pluginfile.php/215538/mod_resource/content/7/Geo1-scalari.pdf`.

Teorema 1. *Valgono le seguenti due proprietà.*

(i) *Quale che sia la matrice A, l'applicazione $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ è bilineare.*

(ii) *L'applicazione $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ è simmetrica se e solo se A è simmetrica.*

Dimostrazione. (i) Per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j X_j \,|\, Y \rangle_A = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j X_j \right)^{\top} AY = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j X_j^{\top} \right) AY =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (X_j^{\top} AY) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle X_j \,|\, Y \rangle,$$

il che mostra la linearità sulla prima componente. In modo del tutto analogo si mostra la linearità sulla seconda componente.

(ii) Dire che $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ è simmetrica significa che per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle X \,|\, Y \rangle_A = \langle Y \,|\, X \rangle_A$, ossia $X^{\top} AY = Y^{\top} AX$. Dato che è un numero reale, $Y^{\top} AX$ coincide con il suo trasposto, così

$$X^{\top} AY = Y^{\top} AX = (Y^{\top} AX)^{\top} = X^{\top} A^{\top} Y.$$

Questa uguaglianza vale per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $A = A^{\top}$, ossia se e solo se A è simmetrica. □

Dunque se A è una matrice simmetrica, l'applicazione $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ risulta bilineare e simmetrica. Affinché sia un prodotto scalare bisogna che sia anche definita positiva, e si può mostrare anche che ciò vale se e solo se A ha tutti gli autovalori positivi[2].

Corollario 1. *L'applicazione $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare se e solo se A è simmetrica e tutti i suoi autovalori sono positivi.*

Esempio 1. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo l'applicazione definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente si può scrivere

$$\langle X \,|\, Y \rangle_A = (x_1, \, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2.$$

La matrice A è simmetrica, dunque $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ è simmetrica per il Teorema 1. Gli autovalori di A sono $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e dato che sono entrambi positivi abbiamo che $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ è anche definita positiva, dunque è un prodotto scalare.

Consideriamo il sottospazio $U = \operatorname{Span}(e_1)$, ossia la retta di equazione $y = 0$. Vogliamo determinare il sottospazio ortogonale $U^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$. Un vettore $X = (x_1, \, x_2)^{\top}$ è in $U^{\perp}$ se e solo se

$$0 = \langle X \,|\, e_1 \rangle_A = 2x_1 + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -2x_1.$$

Dunque $U^{\perp} = \operatorname{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right) \right)$, ossia è la retta di equazione $y = -2x$.

[2]Si veda l'Esercizio 6 del foglio di esercizi del 04 maggio 2021.

2 Matrice associata ad un prodotto scalare rispetto ad una base

Nella sezione precedente abbiamo visto come, data una matrice simmetrica A, si possa costruire un'applicazione bilineare e simmetrica $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ (Teorema 1). Se poi la matrice A ha tutti gli autovalori positivi allora $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare. Qui vogliamo far vedere che si può procedere anche in senso contrario, ossia che ad ogni prodotto scalare $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ si può associare una matrice, una volta fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1. La *matrice associata* a $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice $M_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ tale che

$$(M_{\mathcal{B}})_{ij} = \langle\, v_i \,|\, v_j \,\rangle$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$.

Osservazione 2. La matrice associata ad un prodotto scalare è simmetrica. Ciò segue dalla simmetria del prodotto scalare, infatti $(M_{\mathcal{B}})_{ij} = \langle\, v_i \,|\, v_j \,\rangle = \langle\, v_j \,|\, v_i \,\rangle = (M_{\mathcal{B}})_{ji}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$.

Il prossimo teorema fornisce un modo equivalente di vedere la matrice associata ad un prodotto scalare. Sia la Definizione 1 che il Teorema 2 sono molto utili nelle applicazioni.

Teorema 2. *La matrice M è la matrice associata al prodotto scalare $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ se e solo se per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\langle\, X \,|\, Y \,\rangle = [X]_{\mathcal{B}}^{\top} M [Y]_{\mathcal{B}}.$$

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Assumiamo che M sia la matrice che rappresenta il prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dato che $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base scriviamo

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j,$$

dove quindi $(x_1, \ldots, x_n)^{\top} = [X]_{\mathcal{B}}$ e $(y_1, \ldots, y_n)^{\top} = [Y]_{\mathcal{B}}$ sono le coordinate di X e Y nella base $\mathcal{B}$. Allora

$$\langle\, X \,|\, Y \,\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \,|\, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \,\rangle \overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle\, v_i \,|\, v_j \,\rangle \overset{(b)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j M_{ij} \overset{(c)}{=} [X]_{\mathcal{B}}^{\top} M [Y]_{\mathcal{B}},$$

dove in (a) abbiamo usato la bilinearità, in (b) la definizione di matrice associata, e in (c) lo stesso calcolo che abbiamo fatto nell'Equazione (1).

($\Leftarrow$) Assumiamo che valga $\langle\, X \,|\, Y \,\rangle = [X]_{\mathcal{B}}^{\top} M [Y]_{\mathcal{B}}$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Se scegliamo $X = v_i$ e $Y = v_j$ si ottiene

$$\langle\, v_i \,|\, v_j \,\rangle = [v_i]_{\mathcal{B}}^{\top} M [v_j]_{\mathcal{B}} = e_i^{\top} M e_j = M_{ij},$$

ossia M è la matrice associata al prodotto scalare secondo la Definizione 1. □

Osservazione 3. Se prendiamo una matrice simmetrica A e gli associamo il prodotto scalare $\langle\, X \,|\, Y \,\rangle_A = X^{\top} A Y$ come fatto nella precedente sezione, allora A è proprio la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica. Infatti

$$\langle\, X \,|\, Y \,\rangle_A = X^{\top} A Y = [X]_{\mathcal{C}}^{\top} A [Y]_{\mathcal{C}},$$

dato che $X = [X]_{\mathcal{C}}$ e $Y = [Y]_{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$ è la base canonica), e adesso basta usare il Teorema 2.

Esempio 2. Consideriamo di nuovo il prodotto scalare dell'Esempio 1, ossia quello associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo dall'Osservazione 3 che la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica è esattamente A. Consideriamo ora la base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcoliamo la matrice $M_{\mathcal{B}}$ del prodotto scalare rispetto a $\mathcal{B}$, sfruttando la definizione, ossia calcolando tutte le entrate della matrice. Si ha

$$\begin{aligned}(M_{\mathcal{B}})_{11} &= \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_A = \langle 3e_1 - e_2 \mid 3e_1 - e_2 \rangle_A = \\ &= 9\langle e_1 \mid e_1 \rangle_A - 3\langle e_1 \mid e_2 \rangle_A - 3\langle e_2 \mid e_1 \rangle_A + \langle e_2 \mid e_2 \rangle_A = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 13,\end{aligned}$$

dove questo calcolo poteva essere fatto anche sfruttando la scrittura matriciale del prodotto scalare (provare a farlo). Analogamente si ottiene $(M_{\mathcal{B}})_{12} = 9$ e $(M_{\mathcal{B}})_{22} = 10$, così che

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

3 Cambiamento di base

Esiste una formula di cambiamento di base anche per le matrici associate ad un prodotto scalare.

Teorema 3 (formula di cambiamento di base)**.** *Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e siano $M_{\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B}'}$ le matrici che rappresentano uno stesso prodotto scalare $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ rispetto alle due basi. Allora*

$$M_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)^\top \cdot M_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id).$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2 segue che per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle X \mid Y \rangle = [X]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}} [Y]_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \langle X \mid Y \rangle = [X]_{\mathcal{B}'}^\top M_{\mathcal{B}'} [Y]_{\mathcal{B}'}.$$

Ricordando che $[X]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)[X]_{\mathcal{B}'}$ si ha

$$[X]_{\mathcal{B}'}^\top M_{\mathcal{B}'} [Y]_{\mathcal{B}'} = [X]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}} [Y]_{\mathcal{B}} = [X]_{\mathcal{B}'}^\top M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)^\top M_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) [Y]_{\mathcal{B}'}$$

per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$, da cui la tesi. □

Esempio 3. La matrice che abbiamo trovato nell'Esempio 2 poteva anche essere determinata con la formula di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Poiché

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha

$$M_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id)^\top \cdot A \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$