Unità 11

Gli angoli e le funzioni goniometriche

1. Angoli e loro misure

In questa Unità introdurremo e studieremo una classe di funzioni che non hai ancora incontrato, le **funzioni goniometriche**. Esse sono importanti soprattutto perché costituiscono uno strumento matematico indispensabile per l'ideazione e lo studio di modelli matematici con i quali si rappresentano numerosi fenomeni fisici. Per introdurre queste funzioni è necessario rivedere anzitutto i concetti di *angolo* e di *misura di un angolo*.

Definizione di angolo

Ricordiamo la definizione di angolo che abbiamo dato in geometria.

ANGOLO

Consideriamo in un piano due semirette aventi la stessa origine. L'insieme dei punti del piano che **non** appartengono alle semirette viene suddiviso da queste ultime in due sottoinsiemi disgiunti; si chiama **angolo** l'unione di questi due sottoinsiemi con le semirette stesse.

L'origine delle due semirette è detta **vertice** dell'angolo; le due semirette si dicono **lati** dell'angolo.

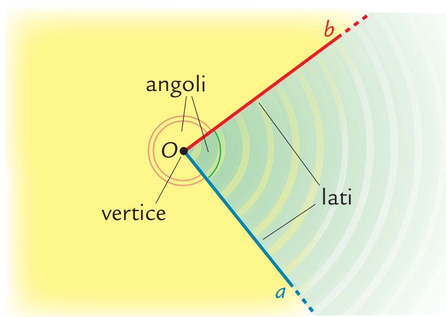
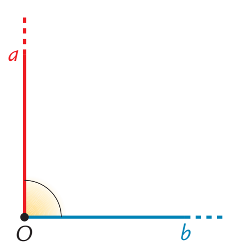
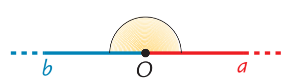


Figura 11.1

Come puoi osservare dalla **fig. 11.1**, due semirette aventi la stessa origine (che non siano una il prolungamento dell'altra) dividono il piano in *due* angoli, uno **concavo** (quello colorato in giallo) e l'altro **convesso** (quello colorato in verde).

Vi sono alcuni angoli particolari ai quali si è dato un nome specifico; li riportiamo in tabella:

			
Si chiama **angolo nullo** ogni angolo che ha come lati due semirette coincidenti e che non contiene altri punti oltre a quelli dei suoi lati.	Si chiama **angolo retto** ogni angolo che ha come lati due semirette perpendicolari.	Si chiama **angolo piatto** ogni angolo che ha come lati una coppia di semirette opposte.	Si chiama **angolo giro** ogni angolo che ha come lati due semirette coincidenti e che coincide con l'intero piano.

In vista delle nozioni che introdurremo nel proseguimento di questa Unità, d'ora in avanti sarà utile osservare un angolo da un nuovo punto di vista, non «statico» come quello della definizione poc'anzi ricordata, ma «dinamico»: sarà utile cioè pensare un angolo come descritto dalla *rotazione* di un suo lato intorno al vertice. In quest'ottica la semiretta che viene fatta ruotare viene chiamata **primo lato dell'angolo** (o **lato origine**) e la semiretta ottenuta dopo aver effettuato la rotazione viene chiamata secondo lato dell'angolo (o **lato termine**), come illustrato in fig. 11.2. Un angolo viene allora detto in **posizione normale** quando è riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali rispetto al quale il vertice coincide con l'origine degli assi e il primo lato coincide con il semiasse delle x positive, come illustrato in fig. 11.3.

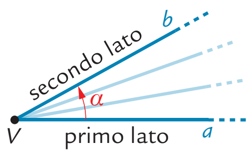


Figura 11.2 Definizione «dinamica» di angolo.

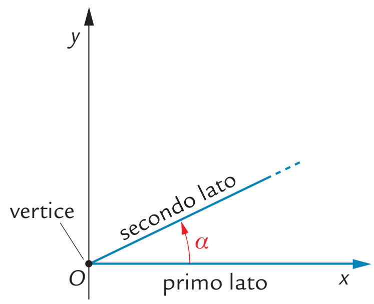


Figura 11.3 Un angolo in posizione normale.

Notazioni

Solitamente, per indicare gli angoli si utilizzano lettere greche minuscole quali α, β, γ, ...

Misure di angoli in gradi

Fino a questo punto dei tuoi studi hai misurato gli angoli in gradi. Il **grado**, ricordiamo, è definito come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro ed è indicato nelle misure con un piccolo cerchietto che segue il valore numerico: °.
Il sistema di misurazione degli angoli in cui l'unità di misura è il grado è detto **sistema sessagesimale**. In esso ogni grado viene suddiviso in 60 parti, ciascuna chiamata **minuto**, indicata con un apice:

$$1 \text{ minuto} = 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$$

Ogni minuto viene a sua volta suddiviso in 60 parti, ciascuna delle quali è chiamata **secondo** ed è indicata con due apici:

$$1 \text{ secondo} = 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$$

Per esempio, per indicare che un angolo misura 40 gradi, 15 minuti e 35 secondi si scrive che la sua misura è:

$$40^{\circ}\ 15'\ 35''$$

In sintesi:

$$1 \text{ angolo giro} = 360^{\circ}; \quad 1^{\circ} = 60'; \quad 1' = 60''$$

Come sottomultipli del grado, invece dei primi e dei secondi si può considerare la sua decima parte, la sua centesima parte, e così via. In tal caso si ottiene una misura in gradi espressa in **forma decimale**. Poiché le calcolatrici scientifiche eseguono le operazioni sulle misure in gradi espresse in forma decimale, si pone talvolta il problema di convertire una misura in gradi, primi e secondi in gradi decimali, e viceversa. Vediamo come procedere tramite un esempio.

Modi di dire

Il sistema di misura in gradi decimali viene detto sessa*decimale*, anziché sessa*gesimale*.

ESEMPI **Dai gradi decimali ai gradi, primi e secondi e viceversa**

Convertiamo:

a. la misura di $45^{\circ}\ 12'\ 21''$ in gradi decimali;

b. la misura di $21{,}347^{\circ}$ in gradi, primi e secondi.

→

a. Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ e $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$, abbiamo:

$$45°\ 12'\ 21'' =$$
$$= 45° + 12' + 21'' =$$
$$= 45° + 12 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^\circ + 21 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ \simeq$$
$$\simeq 45° + 0{,}2° + 0{,}005833° =$$

Con una calcolatrice si trova che $\frac{12}{60} = 0{,}2$ e $\frac{21}{3600} = 0{,}0058\overline{3}$

$$= 45{,}205833°$$

b. Procediamo come segue:

$$21{,}347° = 21° + 0{,}347° =$$
$$= 21° + 0{,}347 \cdot 60' =$$

Ricorda che $1° = 60'$

$$= 21° + 20{,}82' = 21° + 20' + 0{,}82' =$$
$$= 21° + 20' + 0{,}82 \cdot 60'' =$$

Ricorda che $1' = 60''$

$$= 21° + 20' + 49{,}2'' \simeq$$
$$\simeq 21°\ 20'\ 49''$$

Arrotondando il numero dei secondi a meno dell'unità

Misure di angoli in radianti

Le misure degli angoli espresse in gradi vengono utilizzate soprattutto nelle applicazioni pratiche. Nelle discipline scientifiche e nel proseguimento dei tuoi corsi di Matematica (per esempio nello studio dell'analisi matematica) è più conveniente invece misurare gli angoli in **radianti**.

Per definire la misura in radianti di un angolo pensiamo che l'angolo sia in posizione normale e consideriamo la circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo (cioè nell'origine) e **di raggio 1**: tale circonferenza viene detta **circonferenza goniometrica**. Si può allora dare la seguente definizione.

MISURA DI UN ANGOLO IN RADIANTI

La misura di un angolo in **radianti** è la misura dell'arco che esso intercetta sulla circonferenza goniometrica, una volta che l'angolo sia posto in posizione normale (fig. 11.4).

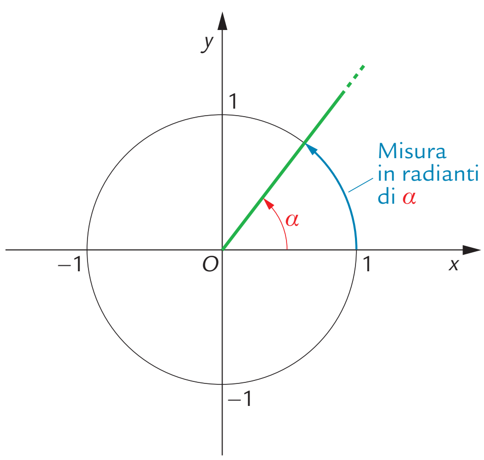


Figura 11.4

ESEMPI Misure di angoli in radianti

a. Un **angolo retto** individua sulla circonferenza goniometrica un arco la cui misura è un quarto della circonferenza, cioè $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$, quindi la misura in radianti di un **angolo retto** è $\frac{\pi}{2}$.

b. Un angolo piatto individua sulla circonferenza goniometrica una semicirconferenza, la cui misura è $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$, quindi la misura in radianti di un **angolo piatto** è π.

c. Un angolo giro individua sulla circonferenza goniometrica l'intera circonferenza, la cui misura è 2π, quindi la misura in radianti dell'**angolo giro** è 2π.

Per convertire la misura α° di un generico angolo, espressa in *gradi*, nella corrispondente misura α_{rad} in *radianti* si può usare la seguente proporzione:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \alpha_{\text{rad}} : 2\pi$$

Da essa si ricavano le seguenti formule di conversione:

$$\boxed{\alpha^\circ = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}} \qquad \boxed{\alpha_{\text{rad}} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} \qquad [11.1]$$

ESEMPI **Conversione dai gradi ai radianti e viceversa/1**

Determiniamo:

a. la misura in gradi dell'angolo che misura $\frac{\pi}{3}$ radianti;

b. la misura in radianti dell'angolo che misura 135°.

a. Per la prima formula **[11.1]** abbiamo: $\alpha^\circ = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{180^\circ}^{60^\circ}}{\cancel{\pi}} = 60^\circ$

b. Per la seconda formula **[11.1]** abbiamo: $\alpha_{\text{rad}} = \cancel{135^\circ}^{3} \cdot \frac{\pi}{\cancel{180^\circ}_{4}} = \frac{3}{4}\pi$

Attenzione!
Come avrai notato, quando gli angoli vengono misurati in gradi si è soliti indicare esplicitamente l'unità di misura (cioè il grado, indicato con il simbolo °), mentre quando vengono misurati in radianti si è soliti trascurare l'unità di misura (cioè l'angolo di 1 radiante, indicato con 1 rad).

ESEMPI **Conversione dai gradi ai radianti e viceversa/2**

Determiniamo:

a. la misura in gradi dell'angolo che misura 1 radiante;

b. la misura in radianti dell'angolo che misura 1 grado.

a. Per la prima formula **[11.1]** abbiamo:

$$\alpha^\circ = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57{,}29577951^\circ \simeq 57^\circ\ 17'\ 45''$$

b. Per la seconda formula **[11.1]** abbiamo:

$$\alpha_{\text{rad}} = 1\cancel{^\circ} \cdot \frac{\pi}{180\cancel{^\circ}} \simeq 0{,}01745$$

I risultati di quest'ultimo esempio ci consentono di confrontare in modo efficace l'angolo che misura 1 grado e l'angolo che misura 1 radiante (**fig. 11.5**).

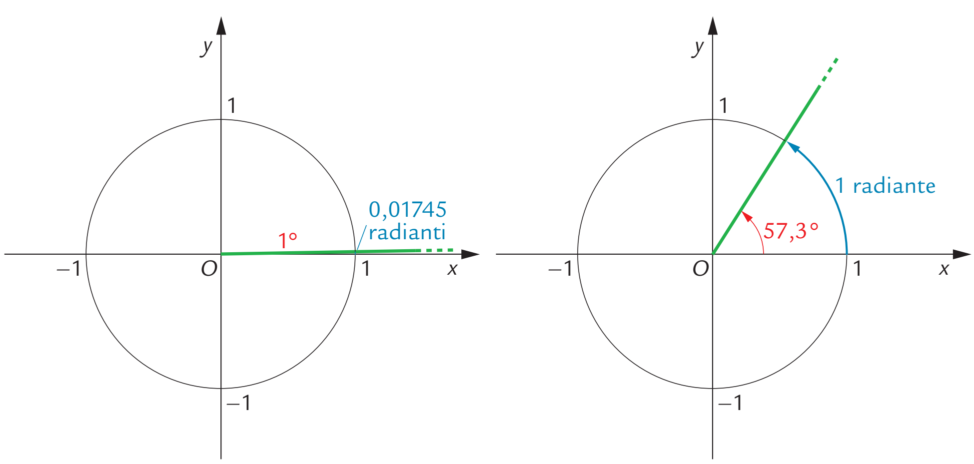


Figura 11.5 Confronto tra 1 grado e 1 radiante.

Attenzione!

Spesso identificheremo un angolo con la sua misura (in gradi o in radianti); scriveremo per esempio $\alpha = \frac{\pi}{3}$, per indicare che α è un angolo la cui misura (in radianti) è $\frac{\pi}{3}$, oppure $\alpha \in (0, \pi)$ per indicare che α è un angolo la cui misura (in radianti) è compresa tra 0 e π.

Nella **fig. 11.6** sono invece visualizzate le misure, in gradi e radianti, degli angoli più comuni.

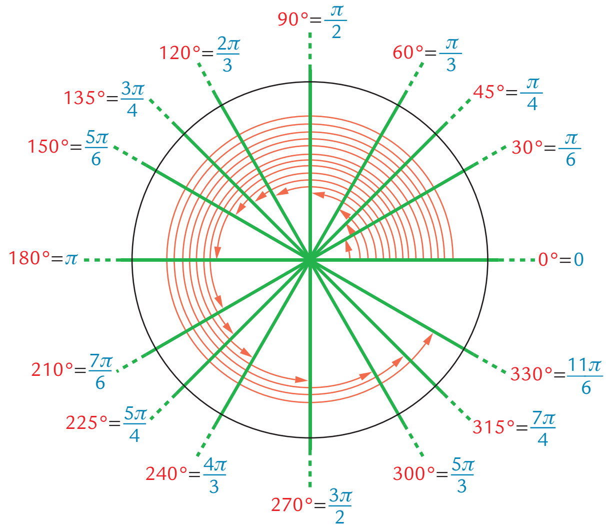


Figura 11.6 Misure di angoli notevoli.

Misura relativa di un angolo e misure di angoli maggiori dell'angolo giro

L'interpretazione «dinamica» di un angolo come descritto dalla *rotazione* di una semiretta intorno al suo vertice apre alcuni nuovi scenari:

1. da una parte, pone il problema di precisare il concetto di misura di un angolo in modo da tenere conto del *verso* della rotazione e porta così a introdurre il concetto di *misura relativa* di un angolo;
2. dall'altra, apre la possibilità di estendere il concetto stesso di angolo considerando angoli *maggiori* di un angolo giro.

Vediamo, nell'ordine, come sia possibile affrontare questi due argomenti.

1. Per assegnare a un angolo una **misura relativa** (cioè con segno) occorre anzitutto *orientare* l'angolo, cioè fissare il suo *primo lato*; dopodiché si considera la **misura assoluta** (cioè senza segno) dell'angolo (in gradi o in radianti) e si attribuisce a essa:

- segno *più* se la rotazione che occorre compiere per sovrapporre il primo lato dell'angolo al secondo è *antioraria*;
- segno *meno* se la rotazione che occorre compiere per sovrapporre il primo lato dell'angolo al secondo è *oraria*.

Osserva gli esempi in **fig. 11.7**.

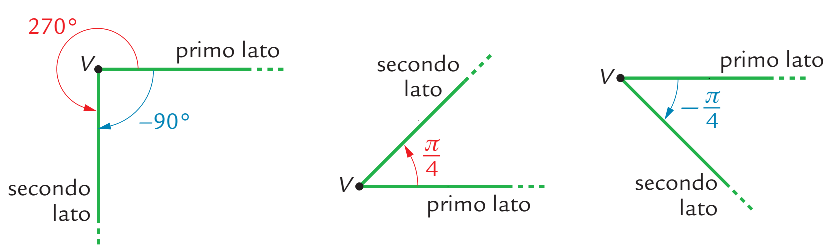


Figura 11.7

2. Per introdurre **angoli maggiori di un angolo giro** fissiamo l'attenzione su un angolo (orientato) in cui il primo lato è la semiretta a e il secondo lato è la semiretta b, descritto dalla rotazione in senso antiorario della semiretta a. Sia α la misura in gradi dell'angolo (**fig. 11.8a**).

Se supponiamo che la semiretta a, nella sua rotazione in senso antiorario, non si fermi la prima volta che raggiunge b ma percorra un giro completo fino a ritornare nuovamente in b, si genera ancora un angolo in cui il primo lato è a e il secondo lato è b, ma a questo nuovo angolo dovremo assegnare una misura che tenga

conto del giro in più fatto. È naturale assegnare a tale angolo la misura (in gradi) di $\alpha + 360°$ (**fig. 11.8b**), dove il segno *positivo* tiene conto del fatto che il giro in più è stato effettuato in senso *antiorario*.
Se la semiretta *a* ruotasse invece in senso *orario* fino a raggiungere *b*, allora verrebbe descritto un angolo la cui misura, in gradi, sarebbe $\alpha - 360°$: infatti la misura *assoluta* dell'angolo sarebbe $360° - \alpha$, mentre la misura relativa è l'opposto perché tiene conto del fatto che la rotazione della semiretta *a* è avvenuta questa volta in senso *orario*, cioè nel verso *negativo* (**fig. 11.8c**).
Più in generale, se la semiretta *a* ruota in senso *antiorario* fino a sovrapporsi alla semiretta *b*, in funzione del numero di giri effettuati otterremo angoli le cui misure in gradi sono, ordinatamente:

$$\alpha, \quad \alpha + 360°, \quad \alpha + 2 \cdot 360°, \quad \alpha + 3 \cdot 360°, \quad \alpha + 4 \cdot 360°, \quad \ldots$$

Se invece la semiretta *a* ruota in senso *orario* fino a sovrapporsi alla semiretta *b*, in funzione del numero di giri effettuati otterremo angoli le cui misure in gradi sono, ordinatamente:

$$\alpha - 360°, \quad \alpha - 2 \cdot 360°, \quad \alpha - 3 \cdot 360°, \quad \alpha - 4 \cdot 360°, \quad \ldots$$

Gli infiniti angoli che così si ottengono possono dunque essere rappresentati in forma sintetica con la scrittura:

$\alpha + k360°$ al variare di k in **Z**

Se la misura α dell'angolo fosse espressa in radianti anziché in gradi, la scrittura sintetica sarebbe invece:

$\alpha + 2k\pi$ al variare di k in **Z**

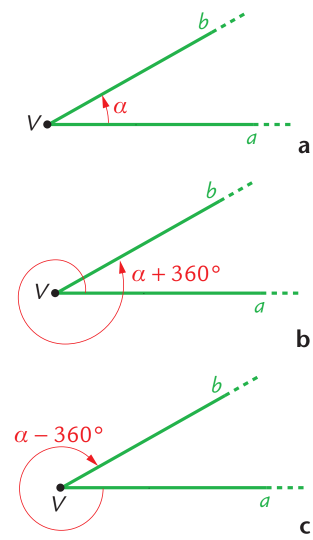
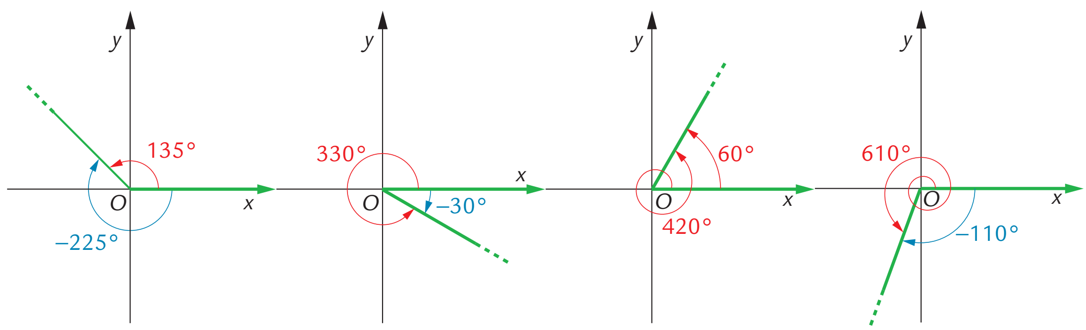


Figura 11.8

Attenzione!
Nel seguito, quando utilizzeremo la scrittura compatta $\alpha + k360°$ o $\alpha + 2k\pi$, a volte sottintenderemo che k varia nell'insieme Z, senza specificarlo.

ESEMPIO Misure di angoli orientati e di angoli maggiori di un angolo giro

Nelle seguenti figure puoi osservare alcune misure di angoli orientati, posti in posizione normale (ricorda che il primo lato è sempre quello sull'asse x).



Prova tu ESERCIZI a p. 561

1. Qual è la misura in radianti di un angolo di 150°? E di un angolo di 330°?
2. Qual è la misura in gradi di un angolo che, in radianti, misura $\frac{5\pi}{4}$? E di un angolo che misura $\frac{7\pi}{8}$?
3. Considera due semirette *a* e *b*, fra loro ortogonali, di origine O. La semiretta *a* (semiretta origine) ruota intorno a O in senso *antiorario* fino a raggiungere *b*, poi effettua, a partire da *b*, altri 3 giri completi intorno a O e si arresta. Quanto misura, in radianti, l'angolo così generato?
4. Rispondi a un quesito analogo a quello precedente nel caso in cui la semiretta *a* ruoti in senso *orario*.

2. Le definizioni delle funzioni goniometriche

Vedremo ora come sia possibile associare a ogni angolo tre numeri, detti **seno**, **coseno** e **tangente** dell'angolo, che dipendono esclusivamente dall'*ampiezza* dell'angolo stesso, che ci consentiranno di definire nuove funzioni.

Definizioni di seno, coseno e tangente di un angolo

Dato un angolo α, riferiamolo a un sistema di assi cartesiani ortogonali in modo che si trovi in posizione normale e tracciamo la circonferenza goniometrica. Il seno, il coseno e la tangente di α sono definiti come segue (fig. 11.9).

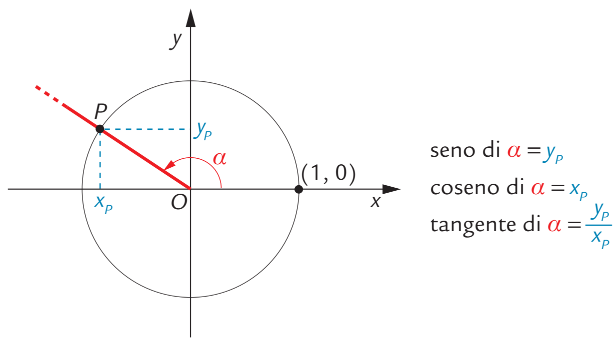


Figura 11.9 Funzioni goniometriche di un angolo.

Attenzione!

1. Alcuni testi utilizzano per il seno la notazione **sen** e per la tangente la notazione **tg**. Noi abbiamo utilizzato le notazioni più diffuse nella moderna letteratura scientifica; tali notazioni sono anche quelle utilizzate dalle calcolatrici.
2. Vedremo nel Paragrafo 5 che il seno, il coseno e la tangente di un angolo consentono di definire delle vere e proprie funzioni reali di variabile reale, quindi l'appellativo di *funzioni* è completamente coerente.

SENO, COSENO E TANGENTE DI UN ANGOLO

Dato un angolo α in posizione normale, sia P il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica. Chiamiamo:

- **seno** di α l'**ordinata** di P;
- **coseno** di α l'**ascissa** di P;
- **tangente** di α il **rapporto tra l'ordinata e l'ascissa** di P.

Indicheremo il seno di α con il simbolo **sin** α, il coseno di α con il simbolo **cos** α e la tangente di α con il simbolo **tan** α.
Poiché il seno, il coseno e la tangente di un angolo α variano *in funzione* dell'angolo, vengono chiamate **funzioni goniometriche** di α.
È importante fare subito alcune osservazioni.

- Il punto P, le cui coordinate definiscono il coseno e il seno di α, viene detto **punto associato** all'angolo α. Poiché P appartiene alla circonferenza goniometrica (che è di raggio 1), l'ascissa di P (cioè il coseno di α) e l'ordinata di P (cioè il seno di α) variano tra -1 e 1, potendo anche essere uguali a -1 o a 1. Dunque per ogni angolo α si ha:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

- La tangente di un angolo, essendo definita come *rapporto* tra seno e coseno dell'angolo, è definita purché il coseno dell'angolo sia *diverso da zero*:

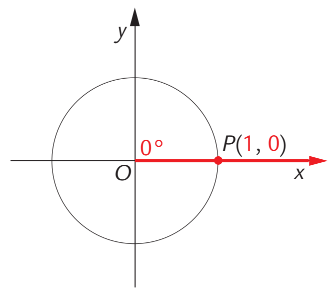
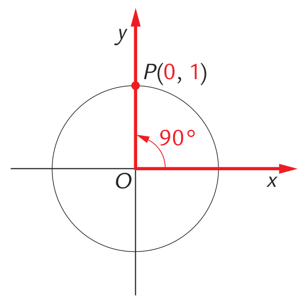
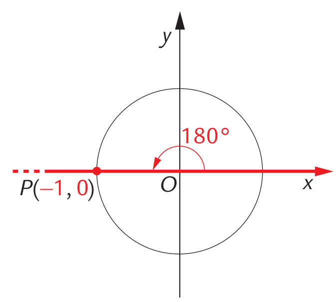
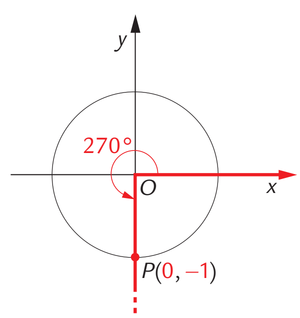
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ è definita per } \alpha \text{ tali che } \cos\alpha \neq 0$$

Calcolo delle funzioni goniometriche di un angolo

Dato un angolo, come possiamo determinarne il seno, il coseno e la tangente? In generale, per determinare i valori delle funzioni goniometriche di un angolo *qualsiasi* bisogna ricorrere a una calcolatrice. In alcuni **casi particolari**, che capitano di frequente, è possibile tuttavia ricavare le funzioni goniometriche dell'angolo direttamente dalla definizione.

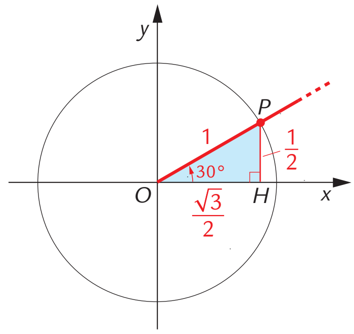
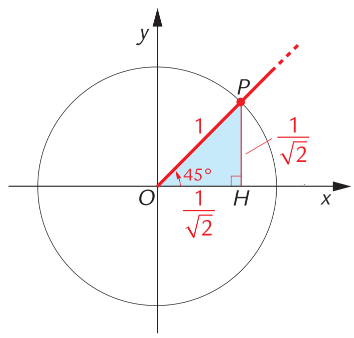
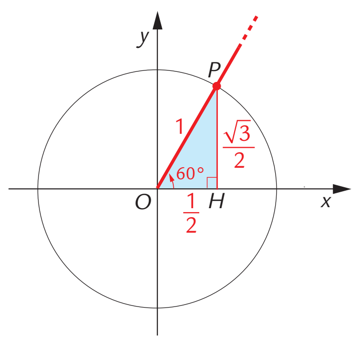
1. Seno, coseno e tangente degli angoli che hanno i lati sugli assi

Determiniamo, se esistono, il seno, il coseno e la tangente degli angoli di misura uguale a 0°, 90°, 180°, 270°.

Misura dell'angolo (in gradi e in radianti)	Funzioni goniometriche	Rappresentazione grafica
$\alpha = 0° = 0$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle x positive e incontra la circonferenza goniometrica nel punto $P(1, 0)$, quindi: • $\sin 0° = \sin 0 = 0$ • $\cos 0° = \cos 0 = 1$ • $\tan 0° = \tan 0 = \frac{0}{1} = 0$	
$\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle y positive e interseca la circonferenza goniometrica nel punto $P(0, 1)$, quindi: • $\sin 90° = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ • $\cos 90° = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ • $\tan 90° = \tan \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ non esiste! La tangente di 90° non è definita, perché non è definita la divisione per 0.	
$\alpha = 180° = \pi$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle x negative e interseca la circonferenza goniometrica nel punto $P(-1, 0)$, quindi: • $\sin 180° = \sin \pi = 0$ • $\cos 180° = \cos \pi = -1$ • $\tan 180° = \tan \pi = \frac{0}{-1} = 0$	
$\alpha = 270° = \frac{3\pi}{2}$	Il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse delle y negative e interseca la circonferenza goniometrica nel punto $P(0, -1)$, quindi: • $\sin 270° = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$ • $\cos 270° = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ • $\tan 270° = \tan \frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{0}$ non esiste! La tangente di 270° non è definita, perché non è definita la divisione per 0.	

2. Seno, coseno e tangente degli angoli di 30°, 45° e 60°

Determiniamo il seno, il coseno e la tangente degli angoli di misura uguale a 30°, 45° e 60°.

Misura dell'angolo (in gradi e in radianti)	**Funzioni goniometriche**	**Rappresentazione grafica**
$\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$	Osserviamo che nel triangolo OPH è $\overline{OP} = 1$. Ricordando le relazioni che sussistono tra le misure dei lati di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°, deduciamo che: $\overline{PH} = \frac{1}{2}$ e $\overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi: • $\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ • $\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ • $\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	
$\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$	Osserviamo che nel triangolo OPH è $\overline{OP} = 1$. Ricordando le relazioni che sussistono tra le misure dei lati di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 45°, deduciamo che: $\overline{OH} = \overline{PH} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dunque $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, quindi: • $\sin 45° = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ • $\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ • $\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	
$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$	Osserviamo che nel triangolo OPH è $\overline{OP} = 1$. Ricordando le relazioni che sussistono tra le misure dei lati di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°, deduciamo che: $\overline{OH} = \frac{1}{2}$ e $\overline{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Dunque $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, quindi: • $\sin 60° = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ • $\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ • $\tan 60° = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	

SINTESI

Funzioni goniometriche di angoli notevoli

- **Angoli con i lati sugli assi cartesiani**

α	sin α	cos α	tan α
$0°$	0	1	0
$90°$	1	0	Non definita
$180°$	0	-1	0
$270°$	-1	0	Non definita
$360°$	0	1	0

- **Angoli di 30°, 45°, 60°**

α	sin α	cos α	tan α
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

3. Seno, coseno e tangente di angoli qualsiasi

Vediamo infine come si può utilizzare una calcolatrice per il calcolo del seno, del coseno della tangente di angoli qualsiasi.

ESEMPI **Calcolo di funzioni goniometriche tramite la calcolatrice**

Calcoliamo, ricorrendo a una calcolatrice:

a. $\sin 25{,}6°$ **b.** $\cos(15°\,20'\,10'')$ **c.** $\tan\frac{3\pi}{5}$

a. Occorre anzitutto controllare che sul display della calcolatrice compaia la scritta «DEG»: ciò significa che stiamo lavorando con misure di angoli espresse in gradi. In caso contrario, bisogna passare al sistema sessadecimale utilizzato dalla calcolatrice, premendo più volte sulla calcolatrice il tasto $\boxed{\text{DRG}}$. Una volta che ciò sia stato accertato, digitiamo **25.6** e poi premiamo il tasto $\boxed{\text{SIN}}$.

Otteniamo così che $\sin 25{,}6° = 0{,}4320857488...$ Arrotondando a meno di un centesimo, possiamo scrivere che

$\sin 25{,}6° \simeq 0{,}43$

b. Occorre preliminarmente trasformare la misura data da gradi, primi e secondi a gradi decimali. Possiamo effettuare questa operazione ricordando che:

$$15°\,20'\,10'' = \left(15 + \frac{20}{60} + \frac{10}{3600}\right)^{\circ}$$

Calcoliamo:

$$15 + \frac{20}{60} + \frac{10}{3600} \simeq 15{,}33611111$$

Ottenuto questo valore, è sufficiente premere il tasto $\boxed{\text{COS}}$.

La trasformazione da gradi, primi e secondi a gradi decimali può essere effettuata anche in modo automatico, se la calcolatrice che stiamo utilizzando possiede il tasto DMS-DD. In tal caso bisogna digitare le cifre dei gradi, poi il punto decimale, quindi far seguire le cifre dei primi e dei secondi. La sequenza di operazioni da svolgere è quindi la seguente:

si digita **15.2010**, si preme il tasto DMS-DD e infine il tasto COS.

In ogni caso, otterremo:

$\cos 15° \, 20' \, 10'' = 0{,}9643909188...$

Arrotondando a meno di un centesimo:

$\cos 15° \, 20' \, 10'' \simeq 0{,}96$

c. Controlliamo che sul display compaia la scritta RAD (in caso contrario, premiamo il tasto DRG finché non compare tale scritta). Poi premiamo la seguente sequenza di tasti:

$\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5}$ TAN

Otterremo così:

$$\tan \frac{3\pi}{5} = -3{,}077683537...$$

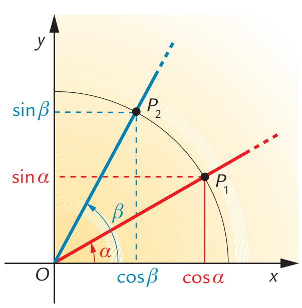
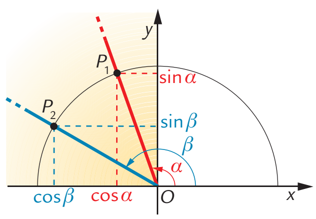
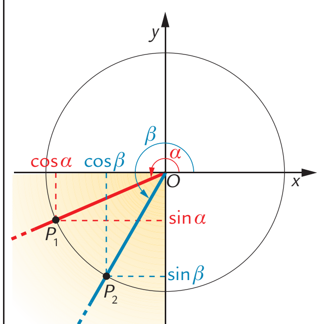
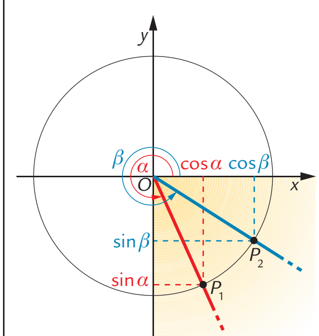
Arrotondando a meno di un centesimo:

$$\tan \frac{3\pi}{5} \simeq -3{,}08$$

3. Le prime proprietà delle funzioni goniometriche

Come variano il seno e il coseno di un angolo

In questo paragrafo approfondiamo la conoscenza delle funzioni goniometriche, studiandone le prime proprietà.
Cominciamo con l'esaminare come variano il seno e il coseno di un angolo quando la misura dell'angolo cresce **da 0 a 2π**. Ciò equivale a studiare come variano l'ordinata e l'ascissa del punto P associato all'angolo. I valori del seno e coseno in corrispondenza degli angoli notevoli li abbiamo già studiati. Tenendo presente i valori del seno e del coseno degli angoli aventi i lati sugli assi (visti nel paragrafo precedente), possiamo costruire la seguente tabella.

Angoli compresi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$	Angoli compresi tra $\frac{\pi}{2}$ e π	Angoli compresi tra π e $\frac{3\pi}{2}$	Angoli compresi tra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π
			
Quando la misura di un angolo cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$ l'ascissa di P decresce da 1 a 0 e l'ordinata cresce da 0 a 1, mantenendosi entrambe *positive*. Quindi il **coseno decresce**, il **seno cresce** e **sia il seno sia il coseno sono positivi**.	Quando la misura di un angolo cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π, l'ascissa di P decresce da 0 a -1 e si mantiene negativa, l'ordinata decresce da 1 a 0 e si mantiene positiva. Quindi **il coseno decresce ed è negativo, il seno decresce ed è positivo**.	Quando la misura di un angolo cresce da π a $\frac{3\pi}{2}$, l'ascissa di P cresce da -1 a 0 e l'ordinata decresce da 0 a -1, mantenendosi entrambe negative. Quindi **il coseno cresce**, **il seno decresce** e **sia il seno sia il coseno sono negativi**.	Quando la misura di un angolo cresce da $\frac{3\pi}{2}$ a 2π l'ascissa di P cresce da 0 a 1 e si mantiene positiva, l'ordinata cresce da -1 a 0 e si mantiene negativa. Quindi **il coseno cresce ed è positivo, il seno cresce ed è negativo**.

In particolare, come abbiamo già osservato, il seno e il coseno **sono sempre numeri compresi tra -1 e 1**.
Ma che cosa accade se la misura dell'angolo è **maggiore di 2π**? Consideriamo un angolo α, con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, e l'angolo $\alpha + 2\pi$ (**fig. 11.11**).

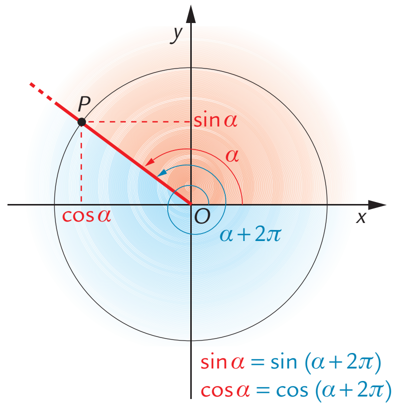


Figura 11.11

Il secondo lato di questi due angoli è lo stesso, quindi il seno e il coseno di $\alpha + 2\pi$ sono uguali al seno e al coseno di α. Per ragioni analoghe, in generale l'angolo di misura $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, ha lo stesso seno e lo stesso coseno di α, ossia valgono le relazioni:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

Per esprimere questa proprietà, cioè che il seno e il coseno riprendono, per angoli di misura maggiore di 2π, gli stessi valori assunti fra 0 e 2π, si dice che il seno e il coseno sono **funzioni periodiche** di periodo 2π.

SINTESI

Proprietà del seno e del coseno

- **Dominio**
  Il seno e il coseno sono definiti per qualsiasi angolo.
- **Segno**
  Il seno è positivo nel primo e nel secondo quadrante, è negativo nel terzo e nel quarto quadrante.
  Il coseno è positivo nel primo e nel quarto quadrante, è negativo nel secondo e nel terzo quadrante.
- **Crescere e decrescere**
  Il seno è crescente nel primo e nel quarto quadrante, è decrescente nel secondo e nel terzo quadrante.
  Il coseno è crescente nel terzo e nel quarto quadrante, è decrescente nel primo e nel secondo quadrante.
- **Valori assunti**
  Il seno e il coseno di un angolo α sono numeri compresi tra -1 e 1, potendo essere uguali a -1 e a 1, vale a dire:
  $-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \sin\alpha \leq 1$
- **Periodicità**
  Il seno e il coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π, vale a dire:
  $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$
  $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$

Come varia la tangente di un angolo

Dopo aver studiato come variano il seno e il coseno di un angolo, studiamo come varia la tangente di un angolo quando la misura dell'angolo stesso cresce da 0 a π. Per effettuare questo studio, è utile osservare che la tangente può essere definita in un modo diverso da quello del paragrafo precedente.

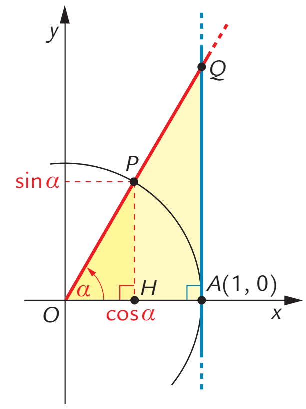


Figura 11.12

Consideriamo, per fissare le idee, un angolo α tale che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e indichiamo, come puoi vedere in fig. 11.12:

- con P il punto associato all'angolo e con H la sua proiezione sull'asse x;
- con Q il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la *retta tangente* alla circonferenza goniometrica nel punto $A(1, 0)$.

Osserviamo ora che:

$$\tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \qquad \text{Per la definizione di tangente}$$

$$= \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{QA}}{1} = \overline{QA} \qquad \text{Perché } OHP \text{ e } OAQ \text{ sono triangoli simili}$$

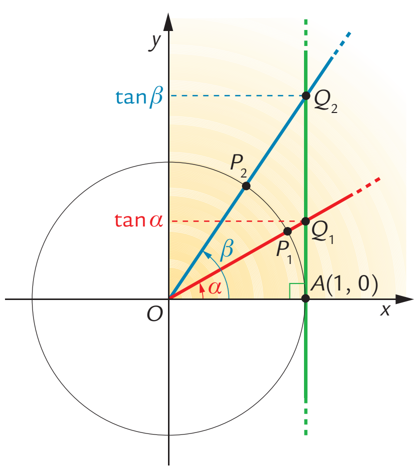
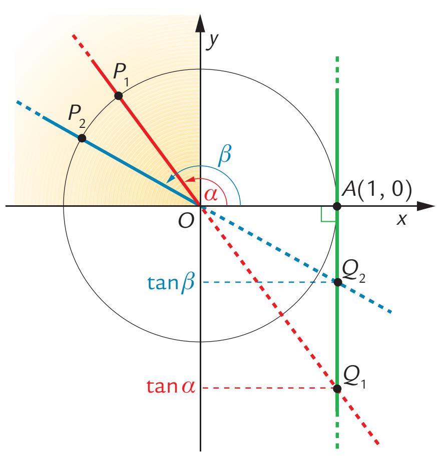
quindi: $\tan\alpha = \overline{QA} = y_Q$

Si potrebbe dimostrare che questa relazione continua a valere anche se α **non** appartiene al primo quadrante. Pertanto, possiamo formulare la seguente definizione alternativa di tangente di un angolo.

DEFINIZIONE ALTERNATIVA DI TANGENTE DI UN ANGOLO

Dato un angolo α, in posizione normale, definiamo **tangente** dell'angolo, se esiste, l'*ordinata* del punto di intersezione tra il secondo lato dell'angolo (o il suo prolungamento) e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto di coordinate (1, 0).

Questa definizione fornisce un'immagine geometrica utile per capire come varia la tangente di un angolo al variare della misura dell'angolo.

Angoli compresi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$	**Angoli compresi tra $\frac{\pi}{2}$ e π**
	
Quando la misura di un angolo cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, l'ordinata del punto Q cresce indefinitamente (si dice che tende a $+\infty$), mantenendosi sempre positiva. Quindi **la tangente cresce ed è positiva**.	Quando la misura di un angolo cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π, l'ordinata di Q cresce, mantenendosi negativa, fino a divenire 0 quando la misura dell'angolo è π. Quindi **la tangente cresce ed è negativa**.

Avevamo già osservato nel paragrafo precedente che la tangente dell'angolo $\frac{\pi}{2}$ **non esiste**; di ciò abbiamo ulteriore prova osservando che quando la misura dell'angolo è $\frac{\pi}{2}$ il suo secondo lato diviene parallelo alla retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $A(1, 0)$, quindi non ha con tale retta tangente alcun punto di intersezione.
Ma che cosa accade se la misura dell'angolo è **maggiore di** π? Consideriamo un angolo α, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e l'angolo $\alpha + \pi$ (**fig. 11.13**).

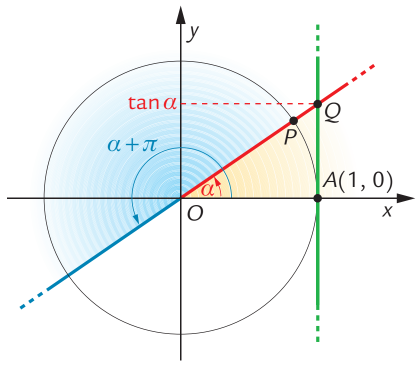


Figura 11.13

Il secondo lato di $\alpha + \pi$ è il prolungamento del secondo lato di α, quindi la retta che contiene i secondi lati dei due angoli α e $\alpha + \pi$ interseca la retta tangente alla circonferenza goniometrica in A nello stesso punto Q, ovvero i due angoli hanno la stessa tangente goniometrica.
Per ragioni analoghe, in generale l'angolo di misura $\alpha + k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, ha la stessa tangente di α, ossia vale la relazione:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \qquad \forall\alpha \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}, \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Per esprimere questa proprietà, cioè che la tangente riprende, per angoli di misura maggiore di π, gli stessi valori assunti fra 0 e π, si dice che la tangente è una **funzione periodica** di periodo π.

SINTESI

Proprietà della tangente

- **Dominio**
  La tangente è definita per ogni angolo α tale che $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- **Segno**
  La tangente di un angolo è positiva nel primo quadrante, è negativa nel secondo quadrante.
- **Crescere e decrescere**
  La tangente di un angolo *cresce* sia nel primo quadrante sia nel secondo quadrante.
- **Valori assunti**
  La tangente di un angolo α assume, al variare di α, *tutti* i valori reali.
- **Periodicità**
  La tangente è periodica di periodo π, vale a dire:
  $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}, \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Le relazioni tra seno, coseno e tangente

Il seno, il coseno e la tangente di un angolo sono legati da relazioni che consentono, una volta nota una delle tre funzioni goniometriche dell'angolo, di determinare le altre due. Queste relazioni seguono immediatamente dalle definizioni di seno, coseno e tangente che abbiamo dato.
Il **seno** e il **coseno** di un angolo α sono stati definiti come ordinata e ascissa del punto P associato all'angolo:

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

~~Poiché il punto P appartiene alla circonferenza goniometrica, che ha equazione $x^2 + y^2 = 1$, ne segue la relazione:~~

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad [11.2]$$

detta **prima relazione fondamentale della goniometria**.
La **tangente** di un angolo è stata definita nel paragrafo precedente come rapporto tra seno e coseno dell'angolo. Vale quindi la relazione:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad [11.3]$$

detta **seconda relazione fondamentale della goniometria**.

Notazioni
- $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$
- $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$

1. Angoli e loro misure

TEORIA a p. 530

Misure in gradi

Converti le seguenti misure di angoli, espresse in gradi, primi e secondi, in forma decimale. Arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale.

1 $13° 25' 12''$ [13,42°]

2 $56° 44' 30''$ [56,74°]

3 $-15° 45' 30''$ [−15,76°]

4 $26° 5' 18''$ [26,09°]

5 $70° 17' 17''$ [70,29°]

6 $55° 20' 5''$ [55,33°]

7 $40° 10' 45''$ [40,18°]

8 $30° 55' 15''$ [30,92°]

Converti le seguenti misure di angoli, espresse in forma decimale, in gradi, primi e secondi. Arrotonda il numero che esprime i secondi a meno dell'unità.

9 $85{,}5°$ [85° 30′]

10 $25{,}4°$ [25° 24′]

11 $-50{,}8°$ [−50° 48′]

12 $20{,}6°$ [20° 36′]

13 $20{,}123°$ [20° 7′ 23″]

14 $55{,}25°$ [55° 15′]

15 $45{,}27°$ [20° 16′ 12″]

16 $51{,}246°$ [51° 14′ 46″]

17 Stabilisci in quale quadrante cade il secondo lato di un angolo avente la misura indicata, posto in posizione normale.

a. $750°$
b. $335° 26' 50''$
c. $-260°$
d. $880° 50' 30''$
e. $650°$

18 Dato l'angolo α di misura $30°$, determina le misure, in gradi:

a. del complementare di α;
b. del supplementare di α;
c. dell'angolo di misura appartenente all'intervallo $[360°, 720°]$ il cui secondo lato coincide con il secondo lato di α.

19 Dato l'angolo α di misura $35°$, determina le misure, in gradi:

a. del complementare di α;
b. del supplementare di α;
c. dell'angolo di misura appartenente all'intervallo $[360°, 720°]$ il cui secondo lato coincide con il secondo lato di α.

Misure in radianti

Converti in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi.

20 $30°; \quad 45°; \quad 60°$ $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$

21 $15°; \quad 135°; \quad 300°$ $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$

22 $75°; \quad 150°; \quad 225°$ $\left[\frac{5\pi}{12}; \frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right]$

23 $20°; \quad 50°; \quad 200°$ $\left[\frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{18}; \frac{10\pi}{9}\right]$

24 $210°; \quad 220°; \quad 315°$ $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{9}; \frac{7\pi}{4}\right]$

25 $10°; \quad 100°; \quad 270°$ $\left[\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{9}; \frac{3\pi}{2}\right]$

26 $180°; \quad 330°; \quad 105°$ $\left[\pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{12}\right]$

27 $18°; \quad 40°; \quad 405°$ $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{2\pi}{9}; \frac{9\pi}{4}\right]$

Converti in gradi, primi e secondi le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.

28 $\frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{4}$ [30°; 60°; 45°]

29 $\frac{7\pi}{2}; \quad \frac{5\pi}{4}; \quad \frac{11\pi}{3}$ [630°; 225°; 660°]

30 $\frac{5\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{8}; \quad \frac{11\pi}{6}$ [150°; 22° 30′; 330°]

31 $\frac{2\pi}{3}; \quad 4\pi; \quad \frac{\pi}{9}$ [120°; 720°; 20°]

32 $6\pi; \quad \frac{3\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{12}$ [1080°; 135°; 15°]

33 $\frac{11\pi}{12}; \quad \frac{10\pi}{3}; \quad \frac{7\pi}{6}$ [165°; 600°; 210°]

34 $\frac{13\pi}{8}; \quad \frac{9\pi}{4}; \quad \frac{2\pi}{9}$ [292° 30′; 405°; 40°]

35 $\frac{7\pi}{3}; \quad \frac{6\pi}{5}; \quad \frac{3\pi}{10}$ [420°; 216°; 54°]

Converti in gradi decimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti. Utilizza una calcolatrice e arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale.

36 2,5; 1,5; 3,8 [143,24°; 85,94°; 217,72°]

37 0,6; 4,2; 3,7 [34,38°; 240,64°; 211,99°]

Converti in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi decimali. Utilizza una calcolatrice e arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale.

38 32,4°; 50,8°; 22,15° [0,57; 0,89; 0,39]

39 24,8°; 35,6°; 80,32° [0,43; 0,62; 1,40]

40 Stabilisci in quale quadrante cade il secondo lato di un angolo posto in posizione normale avente la misura in radianti indicata.

a. $\frac{2\pi}{3}$ **b.** $\frac{5\pi}{4}$ **c.** 58,6 **d.** $\frac{11\pi}{6}$ **e.** 100,58

41 Dato l'angolo α di misura $\frac{\pi}{6}$, determina le misure, in radianti:

a. del complementare di α;
b. del supplementare di α;
c. dell'angolo di misura appartenente all'intervallo $[2\pi, 4\pi]$ il cui secondo lato coincide con il secondo lato di α.

42 Dato l'angolo α di misura $\frac{2\pi}{5}$, determina le misure, in radianti:

a. del complementare di α;
b. del supplementare di α;
c. dell'angolo di misura appartenente all'intervallo $[2\pi, 4\pi]$ il cui secondo lato coincide con il secondo lato di α.

43 In un triangolo isoscele ciascun angolo alla base misura 35°. Qual è la misura in radianti dell'angolo al vertice? $\left[\frac{11\pi}{18}\right]$

44 Un triangolo ha un angolo che supera un altro di 20° e il terzo angolo misura 30°. Esprimi le misure in radianti dei tre angoli del triangolo. $\left[\frac{13\pi}{36}, \frac{17\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right]$

45 L'angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 1 radiante. Qual è la misura in gradi, primi e secondi degli angoli alla base? Arrotonda a meno dell'unità il numero che esprime i secondi. [61° 21′ 8″]

2. Le definizioni delle funzioni goniometriche

TEORIA a p. 536

Esercizi preliminari

46 Spiega se può esistere:

a. un angolo α tale che $\sin\alpha = -0{,}001$
b. un angolo β tale che $\cos\beta = 1{,}001$
c. un angolo γ tale che $\tan\gamma = 3$

47 Completa la seguente tabella, supponendo che gli angoli siano tutti acuti.

Angolo	Seno	Coseno	Tangente
....	....	$\frac{1}{2}$	....
....	....	....	1
30°	....	....	....

48 Per quale dei seguenti angoli **non** è definita la tangente di α?

a. $\alpha = 0$ **b.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$ **c.** $\alpha = \pi$ **d.** $\alpha = 2\pi$

49 **Vero o falso?**

a. $\sin 30° + \sin 60° = \sin 90°$ V F
b. $\sin 60° = 2\sin 30°$ V F
c. $\cos(180° + 90°) =$
$= \cos 180° \cos 90° - \sin 180° \sin 90°$ V F
d. $\sin 180° = \sin 90° + \sin 90°$ V F
e. $\sin 90° = \cos 360°$ V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

50 Con l'aiuto di una calcolatrice, determina le funzioni goniometriche degli angoli indicati. Arrotonda i risultati a meno di un centesimo.

a. sin 70° **b.** tan 25° **c.** cos 52°

51 Con l'aiuto di una calcolatrice, determina le funzioni goniometriche degli angoli indicati. Arrotonda i risultati a meno di un centesimo.

a. $\cos\frac{\pi}{7}$ **b.** $\tan\frac{2\pi}{5}$ **c.** $\sin\frac{7\pi}{36}$

Calcolo del valore di funzioni goniometriche di angoli notevoli

Semplifica le seguenti espressioni, ricordando i valori delle funzioni goniometriche degli angoli che hanno il secondo lato su uno degli assi cartesiani.

52 $\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)$ [1]

53 $\sin 90° \cos 90° + \sin 180° \cos 180°$ [0]

54 $\sin\pi(\cos\pi - \sin\pi) + \cos\pi$ $[-1]$

55 $(\sin 90° - \cos 270°)(\sin 180° - \cos 90°) + \cos 180°$ $[-1]$

56 $\sin 270° \cdot (\cos 90° - \sin 90°) + \cos 0°(\sin 90° - \cos 270°)$ $[2]$

57 $(\sin\pi + \cos\pi)^3 + \left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)^3$ $[0]$

58 $\sin 180° \cos 90° + \cos 180° \sin 270°$ $[1]$

59 $\dfrac{\sin\pi + \tan\pi}{\cos\pi + \sin 2\pi}$ $[0]$

60 $\left(\sin^7\frac{\pi}{2}\cos^8\frac{3}{2}\pi + \sin^6\frac{3\pi}{2}\cos^5\frac{\pi}{2}\right)^3$ $[0]$

61 $(\sin 180° - \cos 180°)(\cos 90° - \sin 90°)(\sin 270° + \cos 270°)$ $[1]$

62 $\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 1\right)\left(\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2} - 1\right) + \sin\pi\cos\pi$ $[-1]$

63 $(\sin 180° + \tan 180°)^3 - (\cos 180° - \tan 0°)^3$ $[1]$

64 $\left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right)(\sin\pi - \cos\pi)\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2}\right)$ $[-1]$

65 $\cos 0° \sin 90° + \cos 180° \sin 90° + \cos 270° \sin 270° + \cos 180° \sin 90° + \sin 270° \cos 360°$ $[-2]$

66 $[(a-b)\cos 180° + (a+b)\sin 90°]^2 + 3b^2 \sin 270°$ $[b^2]$

67 $\dfrac{a^2\sin\frac{3\pi}{2} + b^2\cos 0}{a\sin\frac{\pi}{2} - b\cos\pi} + \dfrac{a^2\cos 2\pi + b^2\cos\pi}{a\sin\frac{3\pi}{2} - b\cos 2\pi}$, con $a \neq -b$ $[2b - 2a]$

Semplifica le seguenti espressioni, ricordando anche i valori della funzioni goniometriche degli angoli di 30°, 45° e 60°.

68 $\sin 30° - \cos 60° + \tan 30° - \tan 60°$ $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

69 $(\sin 30° - \cos 60°)^2$ $[0]$

70 $\sqrt{2}\sin 45° + \sqrt{3}\sin 60° - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan 30°$ $\left[\frac{13}{6}\right]$

71 $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{4}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

72 $\left(\sin\pi + \cos\pi + \tan\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$ $[0]$

73 $\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\right)^2$ $[0]$

74 $\left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)^2$ $[4]$

75 $\tan\frac{\pi}{4}\left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right)$ $[0]$

76 $\left(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right)\left(\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)$ $[-2\sqrt{2}]$

77 $\tan 30° \tan 60° + \sin 30° \cos 60° + \sin 60° \cos 30°$ $[2]$

78 $(\sin 30° + \cos 60°)(\cos 60° - \sin 30°)(\tan 45° - \sin 90°)$ $[0]$

79 $2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\tan\pi - \tan\frac{\pi}{4}\right)$ $[2 - \sqrt{3}]$

80 $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} - \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \dfrac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 1$ $\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

81 $\dfrac{\sin 30° - \cos 30°}{\sin 60° - \cos 60°}$ $[-1]$

82 $\dfrac{\sin 30°}{\tan 30°} - \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$ $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

83 $\dfrac{\tan 45° - \tan 30°}{\tan 60° - \tan 45°}$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

84 $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{3}}{\sin\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}}$ $[2\sqrt{6} - 5]$

85 $\dfrac{\sin 30° - \sin 60°}{\cos 30° - \cos 60°}$ $[-1]$

86 $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{6}}{\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{6}}$ $[3 - 2\sqrt{2}]$

3. Le prime proprietà delle funzioni goniometriche

TEORIA a p. 541

Esercizi preliminari

Test

95 Un angolo α, in posizione normale, è tale che $\sin\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$; in quale quadrante cade il secondo lato dell'angolo α?

A Primo
B Secondo
C Terzo
D Quarto

96 Un angolo α, in posizione normale, è tale che $\sin\alpha > 0$ e $\tan\alpha < 0$; in quale quadrante cade il secondo lato dell'angolo α?

A Primo
B Secondo
C Terzo
D Quarto

97 Un angolo α, in posizione normale, è tale che $\tan\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$; in quale quadrante cade il secondo lato dell'angolo α?

A Primo
B Secondo
C Terzo
D Quarto

98 Un angolo α, in posizione normale, è tale che $\sin\alpha < 0$ e $\tan\alpha > 0$; in quale quadrante cade il secondo lato dell'angolo α?

A Primo
B Secondo
C Terzo
D Quarto

Senza utilizzare la calcolatrice, calcola i valori delle seguenti funzioni goniometriche.

194 $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\frac{19\pi}{6}$; $\tan\frac{7\pi}{3}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right]$

195 $\sin 150°$; $\cos(-300°)$; $\tan 135°$

196 $\sin 120°$; $\cos 420°$; $\tan(-390°)$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

197 $\sin\frac{7\pi}{4}$; $\cos(-4\pi)$; $\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

198 $\sin\frac{7\pi}{2}$; $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; $\tan\frac{7\pi}{4}$ $\left[-1; -\frac{1}{2}; -1\right]$

199 $\sin 150°$; $\cos 135°$; $\tan 300°$

200 $\sin 315°$; $\cos 225°$; $\tan 150°$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

201 $\sin\frac{5\pi}{3}$; $\cos\frac{7\pi}{6}$; $\tan\frac{5\pi}{4}$

202 $\sin\frac{7\pi}{4}$; $\cos\frac{11\pi}{4}$; $\tan\frac{5\pi}{3}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{3}\right]$

203 $\sin 240°$; $\cos 420°$; $\tan 315°$

204 $\sin 405°$; $\cos 150°$; $\tan 180°$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right]$

205 $\sin\frac{7\pi}{3}$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

206 $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; $\cos\frac{5\pi}{3}$; $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right]$

207 $\sin 150°$; $\cos 405°$; $\tan 225°$

208 $\sin(-390°)$; $\cos 480°$; $\tan 480°$ $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni.

209 $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

210 $\dfrac{\sin 135° - \cos 210°}{\cos 225° + \sin 300°}$ $[-1]$

211 $\left(\sin\frac{7\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3}\right)\left(\sin\frac{7\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{6}\right)\tan\frac{5\pi}{4}$ $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right]$

212 $\dfrac{\sin 135°(\sin 60° - \sin 240°)}{\cos(-45°) - \cos 225°}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

213 $\dfrac{\tan\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}}{\tan\frac{4\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{6}} \cdot \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{6}}{\cos\pi - \cos\frac{\pi}{4}} \cdot \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

214 $\dfrac{\tan\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{11\pi}{6} + \tan 3\pi}{\sin\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6}}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

215 $(\sin 135° - \cos 135°)(\sin 150° - \cos 150°)(\sin 60° - \cos 60°) + (\sin 225° - \cos 225°)(\sin 210° - \cos 210°)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Trigonometria

Unità 14

1. Teoremi sui triangoli rettangoli

Nelle Unità precedenti abbiamo introdotto le funzioni goniometriche degli angoli e abbiamo studiato alcune delle loro proprietà. In questa Unità affronteremo lo studio della **trigonometria**, cioè di quella parte della matematica che tratta le relazioni fra le misure dei lati e le funzioni goniometriche degli angoli di un *triangolo*.
Premettiamo che d'ora in avanti adotteremo le seguenti convenzioni per indicare gli elementi di un triangolo di vertici A, B e C (**fig. 14.1**):

- con le lettere minuscole a, b, c indicheremo le misure dei *lati opposti*, rispettivamente, ai vertici A, B, C;
- con le lettere greche α, β, γ indicheremo gli *angoli* aventi vertici, rispettivamente, in A, B, C, o le loro misure.

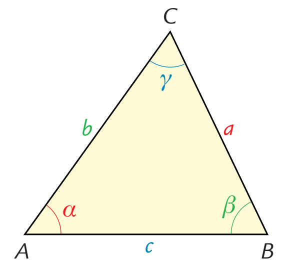


Figura 14.1

I teoremi fondamentali sui triangoli rettangoli

Iniziamo la nostra esplorazione della trigonometria a partire da una figura geometrica ben nota: il *triangolo rettangolo*. Supponiamo che il triangolo abbia l'angolo retto in A e indichiamo le misure dei lati e degli angoli secondo le convenzioni stabilite (**fig. 14.2**).
Riferiamo il triangolo a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale rispetto al quale l'angolo β si trovi in posizione normale; indichiamo con P il punto in cui la semiretta OC interseca la circonferenza goniometrica e con H la proiezione di P sull'asse x. A seconda che la misura dell'ipotenusa del triangolo sia minore o maggiore di 1 si possono ottenere i due casi rappresentati nelle **figg. 14.3a** e **14.3b**.

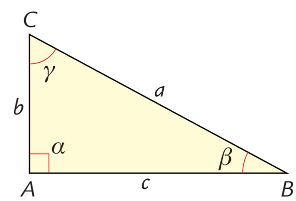


Figura 14.2

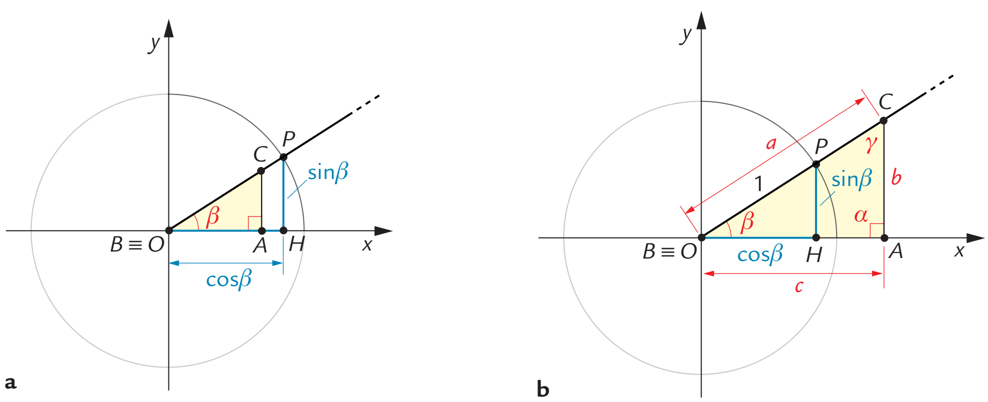


Figura 14.3

In entrambi i casi (fai riferimento alla seconda delle figure), il triangolo ABC è *simile* al triangolo HOP (perché?), quindi possiamo scrivere la proporzione:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{1} \qquad AC : BC = PH : OP$$

da cui si ricava:

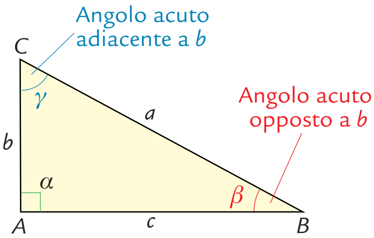
$$\boxed{b = a\sin\beta} \qquad [14.1]$$

Osservando poi che $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ e ricordando le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli complementari si può scrivere la **[14.1]** nella forma equivalente:

$$\boxed{b = a\cos\gamma} \qquad [14.2]$$

Riflettiamo ora sulle due uguaglianze [14.1] e [14.2], osservando la fig. 14.4.

Figura 14.4



Ci possiamo rendere conto che:

$$\underbrace{b}_{\substack{\text{misura di}\\ \text{un cateto}}} = \underbrace{a}_{\substack{\text{misura}\\ \text{dell'ipotenusa}}} \cdot \underbrace{\sin\beta}_{\substack{\text{seno dell'angolo}\\ \text{opposto al cateto}}}$$

$$\underbrace{b}_{\substack{\text{misura di}\\ \text{un cateto}}} = \underbrace{a}_{\substack{\text{misura}\\ \text{dell'ipotenusa}}} \cdot \underbrace{\cos\gamma}_{\substack{\text{coseno dell'angolo}\\ \text{acuto adiacente al cateto}}}$$

Ragionando in modo del tutto simile si potrebbe provare che valgono analoghe relazioni circa la misura *c* dell'altro cateto. Vale quindi il seguente teorema.

TEOREMA 14.1 **Primo teorema sui triangoli rettangoli**

In un triangolo rettangolo la misura di un **cateto** è uguale a quella dell'**ipotenusa** moltiplicata per il **seno dell'angolo opposto** al cateto, o moltiplicata per il **coseno dell'angolo acuto adiacente** al cateto.

Dal teorema 14.1 seguono in particolare le due uguaglianze:

$$b = a\sin\beta$$
$$c = a\cos\beta$$

Dividendole membro a membro otteniamo:

$$\frac{b}{c} = \frac{a\sin\beta}{a\cos\beta} = \tan\beta$$

cioè:

$$\boxed{b = c\tan\beta} \qquad [14.3]$$

$$\underbrace{b}_{\substack{\text{misura di}\\ \text{un cateto}}} = \underbrace{c}_{\substack{\text{misura}\\ \text{dell'altro cateto}}} \cdot \underbrace{\tan\beta}_{\substack{\text{tangente dell'angolo}\\ \text{opposto al primo cateto}}}$$

Ragionando in modo del tutto simile si potrebbe provare che valgono analoghe relazioni circa la misura *c* dell'altro cateto. Vale quindi il seguente teorema.

Secondo teorema sui triangoli rettangoli — TEOREMA 14.2

In un triangolo rettangolo la misura di un **cateto** è uguale a quella dell'**altro cateto** moltiplicata per la **tangente dell'angolo opposto** al primo cateto, ~~o moltiplicata per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo cateto.~~

Risoluzione di un triangolo rettangolo

I teoremi sui triangoli rettangoli possono essere utilizzati sia per determinare le *misure dei lati* di un triangolo rettangolo, sia (inversamente) per risalire alle *misure degli angoli* acuti di un triangolo rettangolo. Ciò consente di **risolvere un triangolo rettangolo**, cioè di determinarne le misure di tutti i lati e tutti gli angoli, una volta noti *due* elementi del triangolo, *fra cui almeno un lato*.
Analizziamo tramite alcuni esempi i vari casi che si possono presentare.

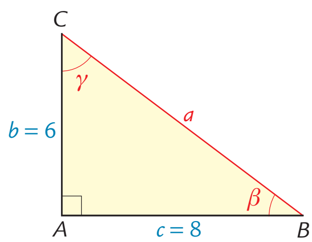
ESEMPIO **Risoluzione di un triangolo rettangolo, dati i due cateti**

Risolviamo un triangolo rettangolo di cui conosciamo le misure dei due cateti: $b = 6$, $c = 8$.

- Applicando il teorema di Pitagora al triangolo possiamo ricavare la misura dell'ipotenusa:

  $$a = \sqrt{36 + 64} = 10$$

  Le misure dei lati sono così determinate.



- Per ricavare le misure degli angoli acuti del triangolo applichiamo i teoremi sui triangoli rettangoli. Dalle relazioni:

  $$b = a \sin\beta \quad \text{e} \quad c = a\sin\gamma$$

  possiamo ricavare che:

  $$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \sin\gamma = \frac{c}{a} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

  da cui segue:

  $\beta \simeq 37°$ Con una calcolatrice, arrotondando a meno di un grado

  $\gamma \simeq 53°$ Con una calcolatrice, arrotondando a meno di un grado

Osserva

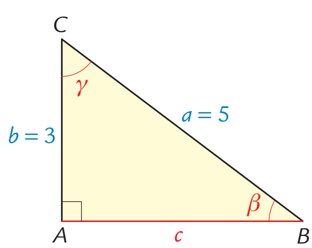
In alternativa, per determinare le misure degli angoli del triangolo avremmo potuto utilizzare il secondo teorema sui triangoli rettangoli; da esso si ricava che $\tan\beta = \frac{3}{4}$ e $\tan\gamma = \frac{4}{3}$. In questo caso si risale agli angoli con la calcolatrice utilizzando la funzione inversa della tangente.

ESEMPIO **Risoluzione di un triangolo rettangolo, dati l'ipotenusa e un cateto**

Risolviamo un triangolo rettangolo di cui conosciamo le misure dell'ipotenusa e di un cateto: $a = 5$, $b = 3$.

- Applicando il teorema di Pitagora, possiamo ricavare la misura dell'altro cateto:

  $$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$



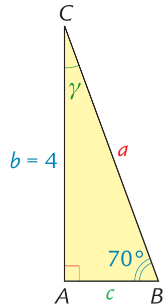
- Per ricavare le misure degli *angoli acuti*, come nell'esempio precedente, utilizziamo il primo teorema sui triangoli rettangoli; da esso seguono le relazioni:

  $$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \sin\gamma = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

da cui:

$\beta \simeq 37°$ Con una calcolatrice, arrotondando a meno di un grado

$\gamma \simeq 53°$ Con una calcolatrice, arrotondando a meno di un grado



Osserva

In alternativa, avremmo potuto determinare la misura dell'ipotenusa mediante il primo teorema sui triangoli rettangoli. Da $b = a \sin 70°$ segue $a = \dfrac{b}{\sin 70°}$.

ESEMPIO Risoluzione di un triangolo rettangolo, dati un cateto e un angolo acuto

Risolviamo un triangolo rettangolo di cui conosciamo:

$b = 4,\ \beta = 70°.$

- Poiché gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari, è immediato ricavare la misura di γ:

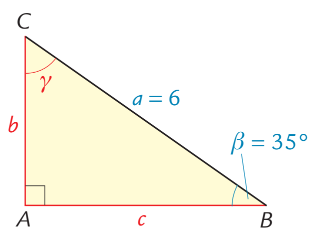
  $\gamma = 90° - 70° = 20°$

- Per ricavare la misura del cateto AB utilizziamo il secondo teorema sui triangoli rettangoli:

  $c = b \tan \gamma \Rightarrow c = 4 \tan 20° \simeq 1{,}46$ Con una calcolatrice, arrotondando ai centesimi

- Infine, determiniamo la misura dell'ipotenusa mediante il teorema di Pitagora; con una calcolatrice, arrotondando ai centesimi abbiamo:

  $$a = \sqrt{b^2 + c^2} \simeq \sqrt{4^2 + (1{,}46)^2} \simeq 4{,}26$$



ESEMPIO Risoluzione di un triangolo rettangolo, dati l'ipotenusa e un angolo acuto

Risolviamo un triangolo rettangolo di cui conosciamo: $a = 6,\ \beta = 35°$.

- Possiamo anzitutto ricavare la misura di γ:

  $\gamma = 90° - 35° = 55°$

- Per determinare le misure dei cateti, utilizziamo il primo teorema sui triangoli rettangoli; osserviamo che, non conoscendo le funzioni goniometriche di un angolo di 35°, dobbiamo ricorrere necessariamente ai valori approssimati forniti dalla calcolatrice:

  $c = a \cos \beta = 6 \cdot \cos 35° \simeq 4{,}91$ Arrotondando ai centesimi

  $b = a \sin \beta = 6 \cdot \sin 35° \simeq 3{,}44$ Arrotondando ai centesimi

Risolvi i triangoli rettangoli di cui sono note le misure indicate, con l'aiuto della calcolatrice.

Nota Nei risultati le misure in gradi sono espresse in forma decimale, arrotondate a meno di un centesimo.

6 $a = 10,\ \beta = 40°$ $[\gamma = 50°;\ b \simeq 6{,}43;\ c \simeq 7{,}66]$

7 $b = 5,\ \gamma = 35°$ $[\beta = 55°;\ a \simeq 6{,}10;\ c \simeq 3{,}50]$

8 $a = 10,\ c = 6$ $[b = 8;\ \beta \simeq 53{,}13°;\ \gamma \simeq 36{,}87°]$

9 $b = 5,\ c = 10$ $[a = 5\sqrt{5} \simeq 11{,}18;\ \beta \simeq 26{,}57°;\ \gamma \simeq 63{,}43°]$

10 $a = 8,\ b = 6$ $[c = 2\sqrt{7} \simeq 5{,}29;\ \beta \simeq 48{,}59°;\ \gamma \simeq 41{,}41°]$

11 $c = 10,\ \beta = 82°$ $[\gamma = 8°;\ a \simeq 71{,}85;\ b \simeq 71{,}15]$

Risolvi i triangoli rettangoli di cui sono note le misure indicate, senza utilizzare la calcolatrice.

12 $a = 4,\ \beta = 30°$ $[\gamma = 60°;\ b = 2;\ c = 2\sqrt{3}]$

13 $b = 6,\ \gamma = 30°$ $[\beta = 60°;\ a = 4\sqrt{3};\ c = 2\sqrt{3}]$

14 $a = 8,\ c = 4$ $[\beta = 60°;\ \gamma = 30°;\ b = 4\sqrt{3}]$

15 $b = 6,\ c = 6$ $[\beta = \gamma = 45°;\ a = 6\sqrt{2}]$

16 $a = 4,\ b = 2\sqrt{3}$ $[\beta = 60°;\ \gamma = 30°;\ c = 2]$

17 $c = 4,\ \beta = 45°$ $[\gamma = 45°;\ a = 4\sqrt{2};\ b = 4]$

Problemi da risolvere con l'utilizzo della calcolatrice

Nota Nei risultati le misure in gradi sono espresse in forma decimale, arrotondate a meno di un centesimo. Lasciamo a te convertire le misure in gradi, primi e secondi.

18 Nel triangolo rettangolo *ABC* l'ipotenusa *BC* è lunga 10 cm e $A\widehat{C}B = 40°$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro $\simeq$ 24,09 cm; Area $\simeq$ 24,62 cm^2]

19 In un triangolo rettangolo *ABC* il cateto *AC* è lungo 10 cm e il cateto *AB* è lungo 5 cm. Determina il perimetro e l'area del triangolo e l'ampiezza degli angoli acuti.
[Perimetro $= (15 + 5\sqrt{5})$ cm $\simeq$ 26,18 cm; Area = 25 cm^2; 63,43° e 26,57°]

20 In un triangolo *ABC* risulta $AC = 3$ cm, $B\widehat{A}C = 40°$ e $A\widehat{B}C = 60°$. Determina il perimetro del triangolo.
(*Suggerimento:* traccia l'altezza *CH* relativa ad *AB*) [8,64 cm]

21 Nel trapezio rettangolo *ABCD* il lato obliquo *BC* è perpendicolare alla diagonale *AC*. Sapendo che l'altezza del trapezio è 6 cm e che $A\widehat{B}C = 50°$, determina il perimetro del trapezio. [33,17 cm]

22 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 10 cm e l'ampiezza di uno dei due angoli acuti è 38°. Qual è la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa? [4,85 cm]

23 In un trapezio isoscele *ABCD* la base minore *CD* è lunga 10 cm e i lati obliqui *BC* e *DA* sono lunghi 8 cm. Sapendo che gli angoli adiacenti alla base maggiore sono di 53°, determina il perimetro e l'area del trapezio. [Perimetro $\simeq$ 45,63 cm; Area $\simeq$ 94,65 cm^2]

Problemi da risolvere senza l'utilizzo della calcolatrice

24 In un triangolo rettangolo *ABC* l'ipotenusa *BC* è lunga 10 cm e $\sin A\widehat{B}C = \frac{4}{5}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro $=$ 24 cm; Area $=$ 24 cm^2]

25 Nel triangolo rettangolo *ABC* l'ipotenusa *BC* è lunga 10 cm e $\sin A\widehat{C}B = \frac{1}{5}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro $= (12 + 4\sqrt{6})$ cm; Area $= 4\sqrt{6}$ cm^2]

26 Nel triangolo rettangolo *ABC* il cateto *AB* è lungo 3 cm e $\tan A\widehat{C}B = 3$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [$(4 + \sqrt{10})$ cm; 1,5 cm^2]

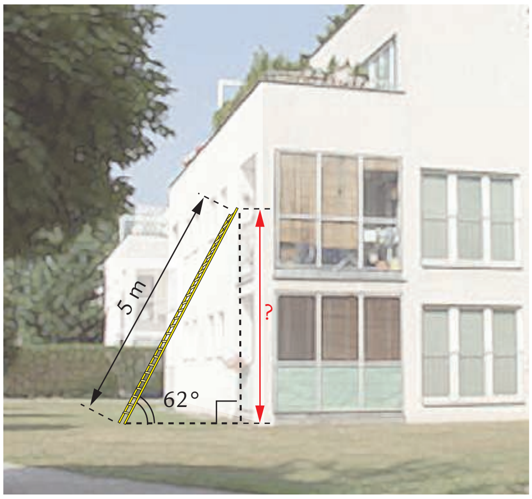
27 Nel triangolo rettangolo *ABC* il cateto *AB* è lungo 12 cm e $\cos A\widehat{C}B = \frac{3}{5}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [Perimetro $=$ 36 cm; Area $=$ 54 cm^2]

3. Applicazioni della trigonometria

TEORIA a p. 682

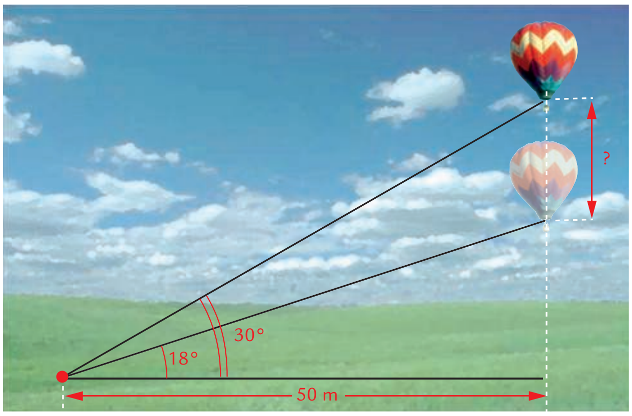
Problemi vari che hanno come modello triangoli rettangoli

147 **La scala.** Una scala lunga 5 m è appoggiata a un muro. La scala forma con il terreno un angolo di 62°. Quanto dista la cima della scala dal suolo?



[Circa 4,41 m]

148 **Pallone aerostatico.** Un pallone aerostatico sta salendo verticalmente. Da una postazione al suolo distante 50 m dal punto da dove il pallone si è alzato in volo si vede il pallone secondo un angolo di elevazione di 18°. Un minuto dopo, dalla stessa postazione, si vede il pallone secondo un angolo di elevazione di 30°. Di quanto è salito il pallone in quel minuto?

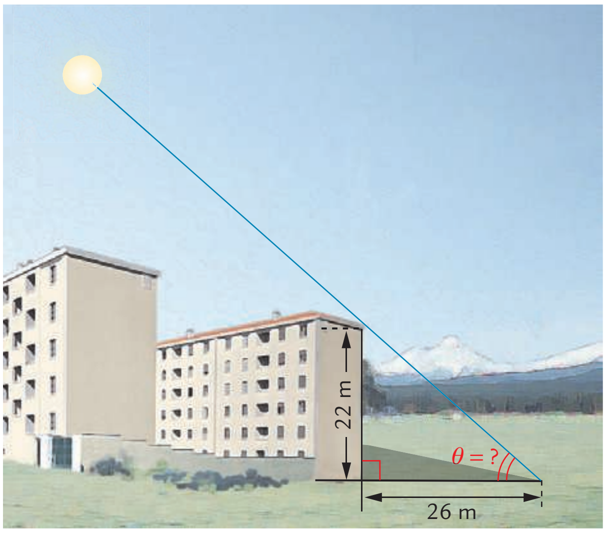


[Circa 12,62 m]

149 **La Statua della libertà.** La Statua della libertà è alta circa 92 m. Una nave vede la cima della statua sotto un angolo di elevazione di 18,3°. Quanto è lontana l'imbarcazione dalla base della statua?

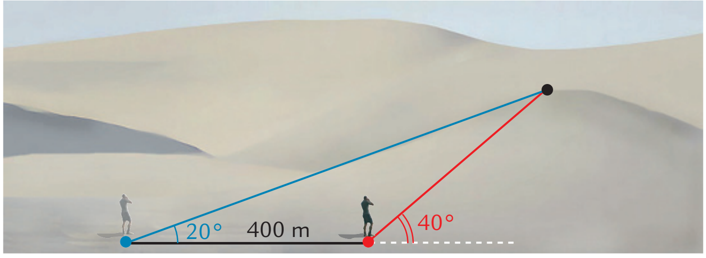
[Circa 278,18 m]

150 **L'ombra.** Qual è l'angolo di elevazione del Sole se un edificio alto 22 m genera un'ombra di 26 m?



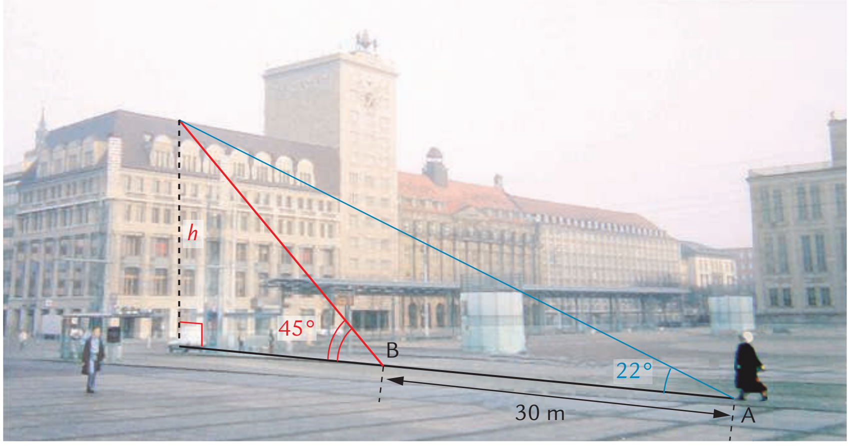
[Circa 40,24°]

151 **Altezza di una duna.** Paolo vede la cima di una duna sotto un angolo di elevazione di 20°. Dopo essersi avvicinato camminando in linea retta di 400 m, l'angolo di elevazione diventa di 40°. Qual è l'altezza della duna?



[Circa 257,12 m]

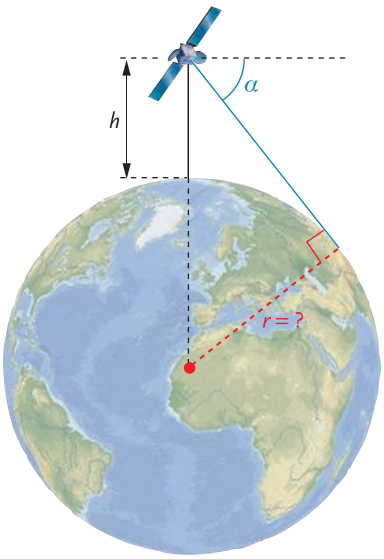
152 **Altezza di un edificio.** L'angolo di elevazione della cima di un palazzo varia da 22° a 45° se un osservatore avanza in linea retta di 30 m dalla posizione A alla posizione B. Trova l'altezza della costruzione.



[Circa 20,34 m]

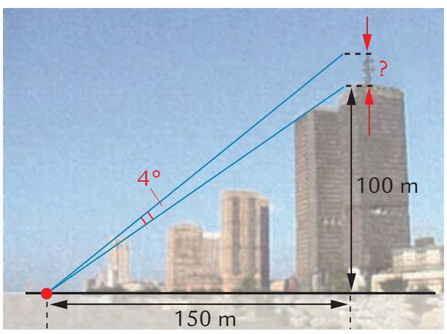
153 **Raggio della Terra.** Un satellite che si trova h metri sopra la superficie della Terra vede l'orizzonte a un angolo di depressione α.

a. Determina r in funzione di h e $\cos\alpha$.
b. Sapendo che $\alpha = 22°47'$ e $h = 539{,}1$ km, quale puoi dedurre che sia il raggio della Terra?



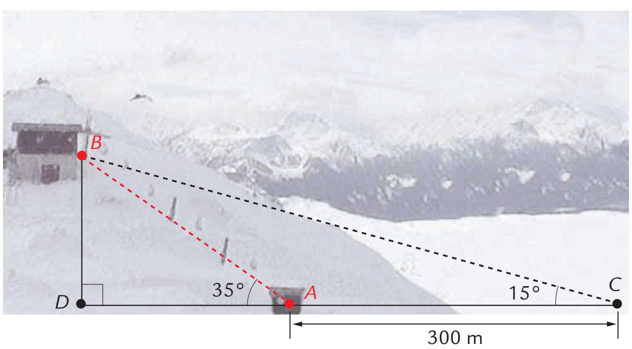
[Circa 6370,3 m]

154 **Altezza di un ripetitore.** Un ripetitore è posto sulla cima di un grattacielo alto 100 m. Da un punto al suolo distante 150 m dalla base del grattacielo il ripetitore viene visto sotto un angolo di 4°. Quanto è alto il ripetitore?



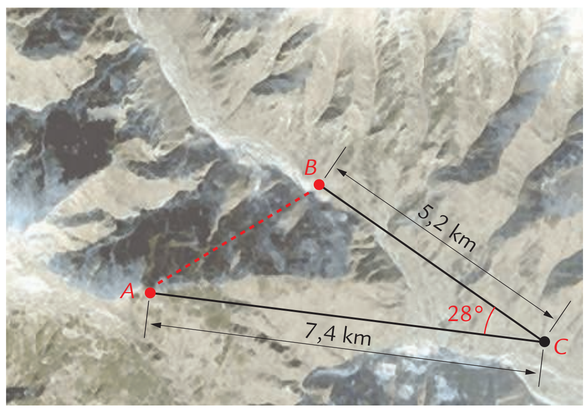
[Circa 15,89 m]

155 **La seggiovia.** In base ai dati indicati in figura, determina la distanza tra il punto di partenza, A, e il punto di arrivo, B, della seggiovia raffigurata.



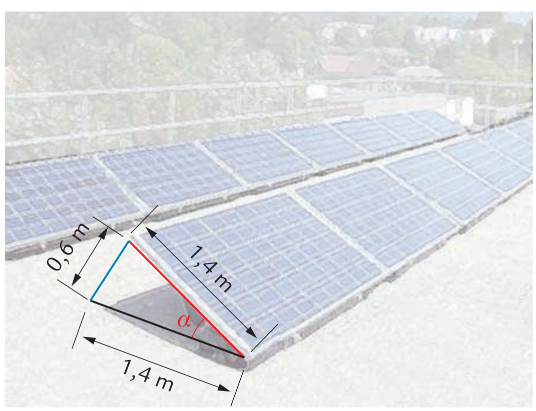
[Circa 227 m]

156 **La galleria.** Si vuole costruire una galleria che colleghi i due punti A e B in figura. In base alle misure indicate, quanto dovrà essere lunga la galleria?



[Circa 3,72 km]

157 **Pannello solare.** In base ai dati in figura, determina la misura, approssimata a meno di un grado, dell'angolo α che il pannello solare forma con il piano orizzontale.



[25°]