

# Discussione di equazioni polinomiali

Alessio Del Vigna

13 giugno 2023

**Esercizio 1.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^4 + ax^3 - ax - 1 = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 2.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^4 + (a + 1)x^3 - ax = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 3.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^4 + (1 - a)x^3 + ax = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 4.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^3 + (1 - a^2)x - a = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 5.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^3 + 4ax^2 + (3a^2 + 1)x + a = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 6.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^3 - (a^2 + 1)x + a = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 7.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^4 - x^3 + (a - 2)x^2 - ax - 2a = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 8.** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^4 + (a - a^2)x^2 - a^3 = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che  $a$  e  $-a$  sono soluzioni dell'equazione.

## Risposte agli esercizi

Nel dare le risposte indicheremo sempre con  $S$  l'insieme delle soluzioni dell'equazione.

**Esercizio 1.** Discussione:

- se  $-2 < a < 2$  allora  $S = \{1, -1\}$ ;
- se  $a = 2$  allora  $S = \{1, -1\}$  con  $-1$  di molteplicità 3;
- se  $a = -2$  allora  $S = \{1, -1\}$  con  $1$  di molteplicità 3;
- se  $a < -2 \vee a > 2$  allora  $S = \left\{1, -1, \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right\}$ .

**Esercizio 2.** Discussione:

- se  $-4 < a < 0$  allora  $S = \{-1, 0\}$ ;
- se  $a = -4$  allora  $S = \{-1, 0, 2\}$  con  $2$  di molteplicità 2;
- se  $a = 0$  allora  $S = \{-1, 0\}$  con  $0$  di molteplicità 3;
- se  $a = \frac{1}{2}$  allora  $S = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}$ , con  $-1$  di molteplicità 2;
- se  $(a < -4 \vee a > 0) \wedge a \neq \frac{1}{2}$  allora  $S = \left\{-1, 0, \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right\}$ .

**Esercizio 3.** Discussione:

- se  $0 < a < 4$  allora  $S = \{-1, 0\}$ ;
- se  $a = -\frac{1}{2}$  allora  $S = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}$  con  $-1$  di molteplicità 2;
- se  $a = 0$  allora  $S = \{-1, 0\}$  con  $0$  di molteplicità 3;
- se  $a = 4$  allora  $S = \{-1, 0, 2\}$ , con  $2$  di molteplicità 2;
- se  $(a < 0 \vee a > 4) \wedge a \neq -\frac{1}{2}$  allora  $S = \left\{-1, 0, \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}\right\}$ .

**Esercizio 4.** Discussione:

- se  $-2 < a < 2$  allora  $S = \{a\}$ ;
- se  $a = 2$  allora  $S = \{-1, 2\}$  con  $-1$  di molteplicità 2;
- se  $a = -2$  allora  $S = \{-2, 1\}$  con  $1$  di molteplicità 2;
- se  $a < -2 \vee a > 2$  allora  $S = \left\{a, \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right\}$ .

**Esercizio 5.** Discussione:

- se  $-\frac{2}{3} < a < \frac{2}{3}$  allora  $S = \{-a\}$ ;
- se  $a = \frac{2}{3}$  allora  $S = \{-\frac{2}{3}, 1\}$  con 1 di molteplicità 2;
- se  $a = -\frac{2}{3}$  allora  $S = \{-1, \frac{2}{3}\}$  con  $-1$  di molteplicità 2;
- se  $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  allora  $S = \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$  con  $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  di molteplicità 3;
- se  $(a < -\frac{2}{3} \vee a > \frac{2}{3}) \wedge a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  allora  $S = \left\{-a, \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 4}}{2}\right\}$ .

**Esercizio 6.** Discussione:

- se  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  allora  $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right\}$  con  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  di molteplicità 2;
- se  $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  allora  $S = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right\}$  con  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  di molteplicità 2;
- se  $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge a \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$  allora  $S = \left\{a, \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right\}$ .

**Esercizio 7.** Discussione:

- se  $a > 0$  allora  $S = \{-1, 2\}$ ;
- se  $a = 0$  allora  $S = \{-1, 0, 2\}$  con 0 di molteplicità 2;
- se  $a = -1$  allora  $S = \{-1, 1, 2\}$  con  $-1$  di molteplicità 2;
- se  $a = -4$  allora  $S = \{-2, -1, 2\}$ , con 2 di molteplicità 2;
- se  $a < 0 \wedge a \neq -1 \wedge a \neq -4$  allora  $S = \{-1, 2, \pm\sqrt{-a}\}$ .

**Esercizio 8.** Discussione:

- se  $a = 0$  allora  $S = \{0\}$  con 0 di molteplicità 4;
- se  $a = -1$  allora  $S = \{-1, 1\}$  con  $-1$  e  $1$  entrambe di molteplicità 2;
- se  $a = 1$  allora  $S = \{-1, 1\}$ ;
- se  $a > 0 \wedge a \neq 1$  allora  $S = \{-a, a\}$ ;
- se  $a < 0 \wedge a \neq -1$  allora  $S = \{-a, a, \pm\sqrt{-a}\}$ .