Nome e cognome: ______________________________ Classe: ________

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"

Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (10 punti). Determinare il campo di esistenza delle seguenti espressioni.

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2-3}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

(b) $\sqrt[8]{\dfrac{1-x^2}{2x}}-\sqrt[6]{\dfrac{2x-3}{x^2+1}}$

Esercizio 2 (15 punti).

(a) Semplificare la seguente espressione:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})-2\sqrt{5}(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})$$

(b) Semplificare la seguente espressione, presupponendo che i fattori sotto radice siano tutti positivi e che i denominatori siano non nulli:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{3\sqrt{a}-1}{a-1}}{\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}\right)}-\frac{2}{a+2\sqrt{a}}$$

(c) Dare la definizione di *potenza con esponente razionale*. Assumendo $a>0$, semplificare l'espressione seguente e scrivere il risultato sotto forma di radice:

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^3\cdot a^{\frac{1}{2}}}.$$

Esercizio 3 (10 punti). Trasportare dentro il segno di radice i fattori esterni, discutendo il risultato a seconda del loro segno. Si dia adeguata motivazione dei passaggi svolti.

(a) $x\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x}}$

(b) $\dfrac{a}{a-2}\sqrt{\dfrac{a+2}{a^2}}$

Esercizio 4 (15 punti). Trasportare fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili.

(a) $\sqrt{x^3-4x^2+4x}$

(b) $\sqrt{\dfrac{a^3+2a^2}{9a^4+6a^2+1}}$

(c) $\sqrt[6]{4a^2b^4(a^2-2a+1)^4}$

(d) $\sqrt{\dfrac{4x^4}{y^5z^3}}$

Esercizio 5 (15 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni o disequazioni:

(a) $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}-\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=\dfrac{8}{2-x^2}$

(b) $(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}-1)\geq 4$

(c) $\dfrac{2\sqrt{3}x-\sqrt{2}x^2}{x-2\sqrt{2}}\geq 0$

Esercizio 6 (15 punti). Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando opportunamente la risposta.

(a) Dimostrare che $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, per ogni $n\geq 2$ e per ogni $a,b\in\mathbb{R}$ tali che tutti i radicali scritti esistano.

(b) Dimostrare che $\sqrt{3}+\sqrt{\frac{5}{2}}$ è un numero irrazionale.

(c) Dimostrare che, a dispetto delle apparenze, il numero

$$\alpha=\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$$

è razionale. Determinare anche il valore di α.

Esercizio 7 (5 punti).

(a) Per $n\geq 1$ intero, si razionalizzi il denominatore dell'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

(b) Usando quanto dimostrato al punto precedente, calcolare la somma

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2018}}+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2020}}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7

Voto: ________