Nome e cognome: ________________________________ Classe: ________

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"

Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (15 punti). Rappresentare i seguenti insiemi nel modo indicato.

(a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ per proprietà caratteristica.

(b) $B = \{n \in \mathbb{N} : n = k^2 - 1,\ k \in \mathbb{N},\ 2 \leq k < 6\}$ per elencazione.

(c) $C = \{n \in \mathbb{N} : 3 \text{ divide } n\}$ per elencazione.

(d) $D = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$ per proprietà caratteristica.

(e) $E = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$ per proprietà caratteristica.

Esercizio 2 (20 punti). Si considerino i seguenti insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{e} \quad B = \{2, 4, 6\}.$$

(a) Determinare $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $\mathfrak{P} \cap A$, dove $\mathfrak{P}$ è l'insieme dei numeri primi.

(b) Determinare il complementare di A e di B dentro l'insieme $A \cup B$.

(c) Determinare $(A \setminus B) \times B$ e $P(B)$, l'insieme delle parti di B.

(d) Calcolare la cardinalità di $A \times B$ e dire quanti sottoinsiemi ha $A \times B$.

Esercizio 3 (10 punti + ☠). Le proprietà distributive della differenza insiemistica rispetto all'intersezione e rispetto all'unione sarebbero rispettivamente le seguenti:

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \quad \text{e} \quad (A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C).$$

(a) Dimostrare con i diagrammi di Eulero-Venn che la prima proprietà è valida.

(b) Costruendo un controesempio, mostrare che la seconda proprietà non è valida.

(☠) Stessa richiesta del punto (a), ricordando che $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ e usando solo le proprietà delle operazioni insiemistiche.

Esercizio 4 (10 punti). Si consideri la formula logica $\overline{\overline{p} \wedge (p \vee q)}$.

(a) Costruire la tavola di verità della formula.

(b) Usando le tavole di verità, dimostrare che la formula è equivalente a $p \vee \overline{q}$.

(c) Stessa richiesta del punto (b), ma utilizzando soltanto le proprietà dei connettivi logici.

Esercizio 5 (20 punti). Si dica se le seguenti proposizioni sono vere o false, fornendo la dimostrazione della risposta data.

(a) $\forall n \in \mathbb{Z}\ n^2 + 1 > 0$

(b) $\exists n \in \mathbb{Z} : 3n$ è pari

(c) $\exists n \in \mathbb{N} : 4n$ è dispari

(d) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : y - x = 1$

(e) $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}\ xy = y$

(f) $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}\ x - y = 0$

Esercizio 6 (5 punti). Scrivere la negazione dei seguenti enunciati, specificando quale equivalenza logica è stata utilizzata.

(a) Tutti i numeri primi sono dispari

(b) $x = 2 \vee x = -2$

(c) In ogni classe c'è almeno un alunno a cui piace la Matematica

(d) Se ho sete allora bevo

Esercizio 7 (5 punti). In una scuola superiore è stata condotta un'indagine interna sugli sport praticati dagli studenti. È stato rilevato che 30 alunni giocano a basket, 50 a tennis, 150 a calcio, 8 solo a basket e a tennis, 12 solo a basket e a calcio, 5 solo a basket, 17 solo a tennis, mentre 70 studenti non praticano nessuno sport. Determinare il numero di studenti che frequentano la scuola e quanti di essi praticano almeno uno sport.

Esercizio 8 (5 punti). Dire se le seguenti deduzioni sono logicamente corrette e, se sì, su quale schema di ragionamento si basano.

(a) Se un triangolo è isoscele allora ha due angoli congruenti. Il triangolo ABC ha tutti gli angoli diversi, dunque ABC non è isoscele.

(b) Ogni numero intero multiplo di 5 termina con 0 o con 5. Il numero 3505 termina con 5, quindi è multiplo di 5.

(c) Un numero primo > 2 è sempre dispari. Poiché 17 è dispari allora è un numero primo.

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Es. 6**	**Es. 7**	**Es. 8**

Voto: ________