

Nome e cognome: _____

Classe: _____

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (5 punti). Determinare il campo di esistenza delle seguenti frazioni algebriche e poi ridurle ai minimi termini:

$$\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^4 - b^4} \quad \text{e} \quad \frac{x^2 + 8x - 9}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}.$$

Attenzione! Nel denominatore della seconda frazione c'è un fattore di secondo grado riducibile, ma che non abbiamo ancora studiato come fattorizzare. Tuttavia si può comunque motivare perché, rimasto al denominatore solo tale fattore, la frazione è ridotta ai minimi termini.

Esercizio 2 (10 punti). Determinare il campo di esistenza e semplificare le seguenti espressioni ad un'unica frazione algebrica ridotta ai minimi termini:

$$(a) \left(\frac{2}{3x-4} - \frac{x-1}{x^2-2x+2} \right) \cdot \left(\frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x^2-3x} \right) + \frac{1}{2x^2-4x+4}$$

$$(b) \left(1 - \frac{2b}{a-b} - \frac{5b^2-ab}{b^2-a^2} + \frac{4b}{a+b} \right) : \frac{a+2b}{a^2-b^2}$$

Esercizio 3 (10 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti equazioni:

$$(a) \frac{2}{x^2-8x+12} - \frac{3}{x^2-6x} = \frac{2}{x^2-2x}$$

$$(b) \frac{1}{x+6} = \frac{2x+4}{x^2+4x-12} - \frac{1}{x^2-8x+12}$$

Esercizio 4 (10 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$(a) \frac{4x^3-9x}{4-2x} \leq 0$$

$$(b) \frac{x^3+3x-4}{x^3-4x^2+4x} \geq 0$$

Esercizio 5 (15 punti). Risolvere in \mathbb{R} il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - x + 3 \leq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \leq 0 \end{cases} .$$

Esercizio 6 (10 punti). Si consideri il polinomio $p(x) = x^2 + bx + c$ e si supponga che $b^2 - 4c < 0$.

- (a) Dimostrare che $p(x)$ non si annulla per nessun $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Dimostrare che $p(x)$ è positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: _____