

Markovian Traffic Equilibrium

Nikita Deniskin

Università di Pisa

Teoria e Metodi dell'Ottimizzazione
prof. Giancarlo Bigi

12 Ottobre 2021

Rete trafficata

- È data una rete, rappresentata da un grafo orientato $\mathcal{G} = (V, A)$, con $|V| = n$ nodi e $|A| = m$ archi.

Rete trafficata

- È data una rete, rappresentata da un grafo orientato $\mathcal{G} = (V, A)$, con $|V| = n$ nodi e $|A| = m$ archi.
- Ci sono g_i^d utenti che partono dal vertice i e hanno destinazione d . Gli utenti si muovono sugli archi. L'insieme dei cammini da i a d è R_i^d .

Rete trafficata

- È data una rete, rappresentata da un grafo orientato $\mathcal{G} = (V, A)$, con $|V| = n$ nodi e $|A| = m$ archi.
- Ci sono g_i^d utenti che partono dal vertice i e hanno destinazione d . Gli utenti si muovono sugli archi. L'insieme dei cammini da i a d è R_i^d .
- Ogni arco a ha tempo di percorrenza t_a , che dipende dal flusso w_a sull'arco. Il legame è tramite la funzione $s_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Rete trafficata

- È data una rete, rappresentata da un grafo orientato $\mathcal{G} = (V, A)$, con $|V| = n$ nodi e $|A| = m$ archi.
- Ci sono g_i^d utenti che partono dal vertice i e hanno destinazione d . Gli utenti si muovono sugli archi. L'insieme dei cammini da i a d è R_i^d .
- Ogni arco a ha tempo di percorrenza t_a , che dipende dal flusso w_a sull'arco. Il legame è tramite la funzione $s_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- Ogni utente vuole minimizzare il tempo totale del suo percorso.

Rete trafficata

- È data una rete, rappresentata da un grafo orientato $\mathcal{G} = (V, A)$, con $|V| = n$ nodi e $|A| = m$ archi.
- Ci sono g_i^d utenti che partono dal vertice i e hanno destinazione d . Gli utenti si muovono sugli archi. L'insieme dei cammini da i a d è R_i^d .
- Ogni arco a ha tempo di percorrenza t_a , che dipende dal flusso w_a sull'arco. Il legame è tramite la funzione $s_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- Ogni utente vuole minimizzare il tempo totale del suo percorso.
- **Obiettivo:** ottimizzare la distribuzione del flusso degli utenti.

Approccio tramite cammini

- 1 Costo di un arco $t_a = s_a(w_a)$

Approccio tramite cammini

- 1 Costo di un arco $t_a = s_a(w_a)$
- 2 h_r flusso su un cammino $r \in R_i^d$, da origine i a destinazione d .

Approccio tramite cammini

- 1 Costo di un arco $t_a = s_a(w_a)$
- 2 h_r flusso su un cammino $r \in R_i^d$, da origine i a destinazione d .
- 3 Costo di un cammino $c_r = \sum_{a \in r} t_a$.

Approccio tramite cammini

- 1 Costo di un arco $t_a = s_a(w_a)$
- 2 h_r flusso su un cammino $r \in R_i^d$, da origine i a destinazione d .
- 3 Costo di un cammino $c_r = \sum_{a \in r} t_a$.
- 4 Flusso su un arco $w_a = \sum_{r \ni a} h_r$.

Approccio tramite cammini

- 1 Costo di un arco $t_a = s_a(w_a)$
- 2 h_r flusso su un cammino $r \in R_i^d$, da origine i a destinazione d .
- 3 Costo di un cammino $c_r = \sum_{a \in r} t_a$.
- 4 Flusso su un arco $w_a = \sum_{r \ni a} h_r$.
- 5 Conservazione del flusso $g_i^d = \sum_{r: i \rightarrow d} h_r$.

Approccio tramite cammini

- 1 Costo di un arco $t_a = s_a(w_a)$
- 2 h_r flusso su un cammino $r \in R_i^d$, da origine i a destinazione d .
- 3 Costo di un cammino $c_r = \sum_{a \in r} t_a$.
- 4 Flusso su un arco $w_a = \sum_{r \ni a} h_r$.
- 5 Conservazione del flusso $g_i^d = \sum_{r: i \rightarrow d} h_r$.
- 6 Costo ottimale $\tau_i^d = \min_{r: i \rightarrow d} c_r$.

Approccio tramite cammini

- 1 Costo di un arco $t_a = s_a(w_a)$
- 2 h_r flusso su un cammino $r \in R_i^d$, da origine i a destinazione d .
- 3 Costo di un cammino $c_r = \sum_{a \in r} t_a$.
- 4 Flusso su un arco $w_a = \sum_{r \ni a} h_r$.
- 5 Conservazione del flusso $g_i^d = \sum_{r: i \rightarrow d} h_r$.
- 6 Costo ottimale $\tau_i^d = \min_{r: i \rightarrow d} c_r$.

Modello originario di Wardrop, con cammini, deterministico.

Sia H l'insieme delle coppie (w, h) che soddisfano la conservazione del flusso (equaz 4,5).

Equilibrio di Wardrop

Una coppia $(w, h) \in H$ si dice equilibrio di Wardrop se vale la seguente proprietà:

per ogni cammino r dall'origine i a destinazione d , se tale cammino ha un flusso non nullo di utenti, allora il suo costo è il minimo tra tutti i cammini da i a d .

$$h_r > 0 \implies c_r = \tau_i^d \quad \forall r \text{ da } i \text{ a } d$$

Funzione obiettivo: $F(h) = F(h, w(h)) = \sum_{a \in A} \int_0^{w_a} s_a(z) dz$

Teorema

Una coppia (w, h) è un equilibrio di Wardrop se e solo se è soluzione del seguente problema di minimizzazione:

$$\min_{(w, h)} F(h) = \min_{(w, h)} \sum_{a \in A} \int_0^{w_a} s_a(z) dz$$

Dimostrazione. Derivate parziali di $F(h)$:

$$\frac{\partial}{\partial h_r} F(h) = \sum_{a \in r} s_a(w_a(h)) = \sum_{a \in r} t_a = c_r$$

Dimostrazione. Derivate parziali di $F(h)$:

$$\frac{\partial}{\partial h_r} F(h) = \sum_{a \in r} s_a(w_a(h)) = \sum_{a \in r} t_a = c_r$$

$F(h)$ è **convessa**. Ogni addendo $F_a(h) = \int_0^{w_a(h)} s_a(z) dz$ è convesso nella direzione w_a , e costante nelle altre.

Dimostrazione. Derivate parziali di $F(h)$:

$$\frac{\partial}{\partial h_r} F(h) = \sum_{a \in r} s_a(w_a(h)) = \sum_{a \in r} t_a = c_r$$

$F(h)$ è **convessa**. Ogni addendo $F_a(h) = \int_0^{w_a(h)} s_a(z) dz$ è convesso nella direzione w_a , e costante nelle altre.

Sia (w, h) un minimo. Espansione al primo ordine:

$$F(h') - F(h) \approx \nabla F(h) \cdot (h' - h) = \sum_r \frac{\partial F}{\partial h_r}(h) (h'_r - h_r) =$$

Dimostrazione. Derivate parziali di $F(h)$:

$$\frac{\partial}{\partial h_r} F(h) = \sum_{a \in r} s_a(w_a(h)) = \sum_{a \in r} t_a = c_r$$

$F(h)$ è **convessa**. Ogni addendo $F_a(h) = \int_0^{w_a(h)} s_a(z) dz$ è convesso nella direzione w_a , e costante nelle altre.

Sia (w, h) un minimo. Espansione al primo ordine:

$$\begin{aligned} F(h') - F(h) &\approx \nabla F(h) \cdot (h' - h) = \sum_r \frac{\partial F}{\partial h_r}(h) (h'_r - h_r) = \\ &= \sum_r c_r (h'_r - h_r) = \sum_{(i,d)} \left(\sum_{r \in R_i^d} c_r (h'_r - h_r) \right) = \end{aligned}$$

Dimostrazione. Derivate parziali di $F(h)$:

$$\frac{\partial}{\partial h_r} F(h) = \sum_{a \in r} s_a(w_a(h)) = \sum_{a \in r} t_a = c_r$$

$F(h)$ è **convessa**. Ogni addendo $F_a(h) = \int_0^{w_a(h)} s_a(z) dz$ è convesso nella direzione w_a , e costante nelle altre.

Sia (w, h) un minimo. Espansione al primo ordine:

$$\begin{aligned} F(h') - F(h) &\approx \nabla F(h) \cdot (h' - h) = \sum_r \frac{\partial F}{\partial h_r}(h) (h'_r - h_r) = \\ &= \sum_r c_r (h'_r - h_r) = \sum_{(i,d)} \left(\sum_{r \in R_i^d} c_r (h'_r - h_r) \right) = \\ &= \sum_{(i,d)} \left(\sum_{r \in R_i^d} (c_r - \tau_i^d) (h'_r - h_r) \right) + \left(\sum_{r \in R_i^d} \tau_i^d (h'_r - h_r) \right) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Derivate parziali di $F(h)$:

$$\frac{\partial}{\partial h_r} F(h) = \sum_{a \in r} s_a(w_a(h)) = \sum_{a \in r} t_a = c_r$$

$F(h)$ è **convessa**. Ogni addendo $F_a(h) = \int_0^{w_a(h)} s_a(z) dz$ è convesso nella direzione w_a , e costante nelle altre.

Sia (w, h) un minimo. Espansione al primo ordine:

$$\begin{aligned} F(h') - F(h) &\approx \nabla F(h) \cdot (h' - h) = \sum_r \frac{\partial F}{\partial h_r}(h) (h'_r - h_r) = \\ &= \sum_r c_r (h'_r - h_r) = \sum_{(i,d)} \left(\sum_{r \in R_i^d} c_r (h'_r - h_r) \right) = \\ &= \sum_{(i,d)} \left(\sum_{r \in R_i^d} (c_r - \tau_i^d) (h'_r - h_r) \right) + \left(\sum_{r \in R_i^d} \tau_i^d (h'_r - h_r) \right) \end{aligned}$$

Il secondo termine è 0. Il primo, se ci fosse un $c_r > \tau_i^d$, potrebbe essere negativo. Allora ci sarebbe una direzione di decrescita, dunque h non sarebbe minimo. □

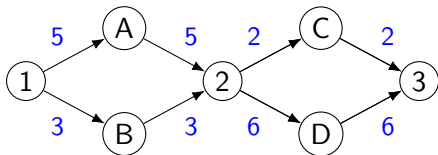
L'insieme H delle coppie (w, h) è compatto, dunque il problema ha sempre una soluzione.

$F = F(w)$ è strettamente convessa in w , per cui la soluzione w^* esiste ed è unica.

L'insieme H delle coppie (w, h) è compatto, dunque il problema ha sempre una soluzione.

$F = F(w)$ è strettamente convessa in w , per cui la soluzione w^* esiste ed è unica.

Non è possibile determinare univocamente h^* .



$$h_{r_1} = 1 \rightarrow A \rightarrow 2 \rightarrow C \rightarrow 3$$

$$h_{r_2} = 1 \rightarrow A \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 3$$

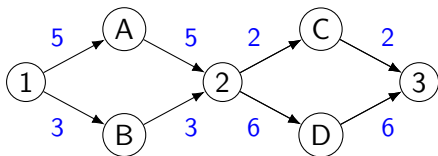
$$h_{r_3} = 1 \rightarrow B \rightarrow 2 \rightarrow C \rightarrow 3$$

$$h_{r_4} = 1 \rightarrow B \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 3$$

L'insieme H delle coppie (w, h) è compatto, dunque il problema ha sempre una soluzione.

$F = F(w)$ è strettamente convessa in w , per cui la soluzione w^* è esistente ed è unica.

Non è possibile determinare univocamente h^* .



$$h_{r_1} = 1 \rightarrow A \rightarrow 2 \rightarrow C \rightarrow 3$$

$$h_{r_2} = 1 \rightarrow A \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 3$$

$$h_{r_3} = 1 \rightarrow B \rightarrow 2 \rightarrow C \rightarrow 3$$

$$h_{r_4} = 1 \rightarrow B \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 3$$

Non c'è unicità: $(h_{r_1}, h_{r_2}, h_{r_3}, h_{r_4}) = (1, 4, 1, 2)$ o $(0, 5, 2, 1)$ sono soluzioni.

Modello Markoviano di traffico

Difetto del modello di Wardrop: è difficile calcolare tutti i cammini r .

Modello Markoviano di traffico

Difetto del modello di Wardrop: è difficile calcolare tutti i cammini r .
Al posto di (w, h) usiamo w e $v_a^d =$ flusso sull'arco a per destinazione d .

Modello Markoviano di traffico

Difetto del modello di Wardrop: è difficile calcolare tutti i cammini r .
Al posto di (w, h) usiamo w e $v_a^d =$ flusso sull'arco a per destinazione d .

Implementiamo la **stocasticità**: il costo di un cammino non è fisso, ma è una variabile aleatoria. Così è possibile tenere conto di fluttuazioni statistiche.

$$\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$$

Modello Markoviano di traffico

Difetto del modello di Wardrop: è difficile calcolare tutti i cammini r .
Al posto di (w, h) usiamo w e $v_a^d =$ flusso sull'arco a per destinazione d .

Implementiamo la **stocasticità**: il costo di un cammino non è fisso, ma è una variabile aleatoria. Così è possibile tenere conto di fluttuazioni statistiche.

$$\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$$

Costo cammino: $\tilde{c}_r = \sum_{a \in r} \tilde{t}_a$

Costo minimo, ovvero tempo di arrivo: $\tilde{\tau}_i^d = \min_{r: i \rightarrow d} \tilde{c}_r$.

Modello Markoviano di traffico

Difetto del modello di Wardrop: è difficile calcolare tutti i cammini r .
Al posto di (w, h) usiamo w e $v_a^d =$ flusso sull'arco a per destinazione d .

Implementiamo la **stocasticità**: il costo di un cammino non è fisso, ma è una variabile aleatoria. Così è possibile tenere conto di fluttuazioni statistiche.

$$\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$$

Costo cammino: $\tilde{c}_r = \sum_{a \in r} \tilde{t}_a$

Costo minimo, ovvero tempo di arrivo: $\tilde{\tau}_i^d = \min_{r: i \rightarrow d} \tilde{c}_r$.

La soluzione della versione stocastica assomiglia di più al traffico osservato, rispetto alla versione deterministica.

Come si muovono gli utenti?
Tramite una **catena di Markov**.

Come si muovono gli utenti?
Tramite una **catena di Markov**.

Fissiamo una destinazione d .

Per un arco $a = (i, j)$, definiamo $\tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_j^d$.

Come si muovono gli utenti?
Tramite una **catena di Markov**.

Fissiamo una destinazione d .

Per un arco $a = (i, j)$, definiamo $\tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_j^d$.

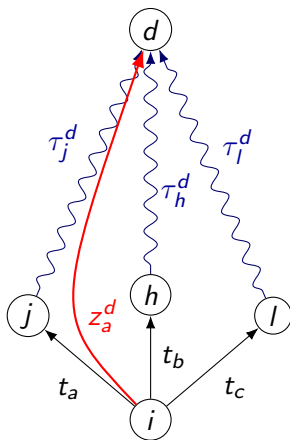
\tilde{z}_a^d è il tempo per raggiungere la destinazione, partendo da i e percorrendo per prima cosa l'arco a .

Come si muovono gli utenti?
Tramite una **catena di Markov**.

Fissiamo una destinazione d .

Per un arco $a = (i, j)$, definiamo $\tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_j^d$.

\tilde{z}_a^d è il tempo per raggiungere la destinazione, partendo da i e percorrendo per prima cosa l'arco a .



Un utente in i sceglie che arco prendere confrontando i \tilde{z}_a^d . Sceglie l'arco a con probabilità:

$$P_{ij}^d = \begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d, \forall b \in A_i^+) & \text{se } \exists a = (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Un utente in i sceglie che arco prendere confrontando i \tilde{z}_a^d . Sceglie l'arco a con probabilità:

$$P_{ij}^d = \begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d, \forall b \in A_i^+) & \text{se } \exists a = (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Visto che ci sono tanti utenti, il flusso entrante in i con destinazione d , viene diviso in proporzione ai P_{ij}^d sugli archi uscenti.

Un utente in i sceglie che arco prendere confrontando i \tilde{z}_a^d . Sceglie l'arco a con probabilità:

$$P_{ij}^d = \begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d, \forall b \in A_i^+) & \text{se } \exists a = (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Visto che ci sono tanti utenti, il flusso entrante in i con destinazione d , viene diviso in proporzione ai P_{ij}^d sugli archi uscenti.

Come possiamo calcolare P_{ij}^d ?

Minimo di variabili aleatorie

Analizziamo un altro problema più generale.

Siano $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ v.a. che rappresentano il prezzo di n oggetti; vogliamo comprare il meno costoso. Scriviamo $\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon_i$, con $x_i = \mathbb{E}[\tilde{x}_i]$ e ε_i la parte aleatoria.

Minimo di variabili aleatorie

Analizziamo un altro problema più generale.

Siano $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ v.a. che rappresentano il prezzo di n oggetti; vogliamo comprare il meno costoso. Scriviamo $\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon_i$, con $x_i = \mathbb{E}[\tilde{x}_i]$ e ε_i la parte aleatoria.

$$\varphi(x) = \mathbb{E}[\min(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)]$$

Fissate le v.a. ε_i , si ha $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione degli x_i .

Teorema

- $\varphi(x)$ è una funzione concava.
- $\varphi(x) \leq \min\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\varphi(x)$ è debolmente crescente su ogni variabile separatamente.
- Le sue derivate sono:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \mathbb{P}(\tilde{x}_i \leq \tilde{x}_j, \forall i \neq j) \quad (1)$$

Teorema

- $\varphi(x)$ è una funzione concava.
- $\varphi(x) \leq \min\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\varphi(x)$ è debolmente crescente su ogni variabile separatamente.
- Le sue derivate sono:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \mathbb{P}(\tilde{x}_i \leq \tilde{x}_j, \forall j) \quad (1)$$

Dim. Sia $m(x) = \min\{x_1, \dots, x_n\}$. Allora

$$\varphi(x) = \int m(x + \varepsilon) dF(\varepsilon)$$

Le derivate sono il limite del rapporto incrementale per $t \rightarrow 0$:

$$\frac{\varphi(x + te_i) - \varphi(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} q_t(\varepsilon) dF(\varepsilon), \quad q_t(\varepsilon) = \frac{m(x + \varepsilon + te_i) - m(x + \varepsilon)}{t}$$

Per $t \rightarrow 1$, $q_t(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{1}_{\{x_i + \varepsilon_i \leq x_j + \varepsilon_j, \forall j\}}$, per cui il rapporto incrementale tende a $\mathbb{P}(\tilde{x}_i \leq \tilde{x}_j, \forall j)$

Applichiamo il risultato al nostro modello.

Per ogni origine i e destinazione d :

$$\varphi_i^d(z^d) = \mathbb{E} \left[\min_{a \in A_i^+} \{ \tilde{z}_a^d \} \right]$$

Scrivendo $\tilde{z}_a^d = z_a^d + \varepsilon_a^d$, la funzione φ_i^d dipende implicitamente dalle ε_a^d , mentre le z_a^d sono l'argomento variabile.

Possiamo calcolare le probabilità P_{ij}^d :

$$P_{ij}^d = \mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d, \forall b \in A_i^+) = \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$$

Legame tra τ_i^d e z_a^d , con $a = (i, j_a)$.

$$\begin{cases} \tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{j_a}^d \\ \tilde{\tau}_i^d = \min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_a^d \end{cases}$$

Prendiamo i valori attesi

Legame tra τ_i^d e z_a^d , con $a = (i, j_a)$.

$$\begin{cases} \tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{j_a}^d \\ \tilde{\tau}_i^d = \min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_a^d \end{cases}$$

Prendiamo i valori attesi

$$\begin{cases} z_a^d = \mathbb{E}[\tilde{z}_a^d] = \mathbb{E}[\tilde{t}_a] + \mathbb{E}[\tilde{\tau}_{j_a}^d] \\ \tau_i^d = \mathbb{E}[\tilde{\tau}_i^d] = \mathbb{E}[\min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_a^d] \end{cases}$$

Legame tra τ_i^d e z_a^d , con $a = (i, j_a)$.

$$\begin{cases} \tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{j_a}^d \\ \tilde{\tau}_i^d = \min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_a^d \end{cases}$$

Prendiamo i valori attesi

$$\begin{cases} z_a^d = t_a + \tau_{j_a}^d \\ \tau_i^d = \varphi_i^d(\{z_a^d\}_{a \in A_i^+}) \end{cases}$$

Legame tra τ_i^d e z_a^d , con $a = (i, j_a)$.

$$\begin{cases} \tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{j_a}^d \\ \tilde{\tau}_i^d = \min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_a^d \end{cases}$$

Prendiamo i valori attesi

$$\begin{cases} z_a^d = t_a + \tau_{j_a}^d \\ \tau_i^d = \varphi_i^d(\{z_a^d\}_{a \in A_i^+}) \end{cases}$$

$$\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$$

Legame tra τ_i^d e z_a^d , con $a = (i, j_a)$.

$$\begin{cases} \tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{j_a}^d \\ \tilde{\tau}_i^d = \min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_a^d \end{cases}$$

Prendiamo i valori attesi

$$\begin{cases} z_a^d = t_a + \tau_{j_a}^d \\ \tau_i^d = \varphi_i^d(\{z_a^d\}_{a \in A_i^+}) \end{cases}$$

$$\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$$

I tempi τ_i^d sono la soluzione di questo sistema. La parte aleatoria è racchiusa nelle funzioni φ_i^d .

Matrici di transizione

Sia x_i^d il flusso entrante in i . Equazione di continuità:

$$x_i^d = g_i^d + \sum_{a \in A_i^+} v_a^d$$

Matrici di transizione

Sia x_i^d il flusso entrante in i . Equazione di continuità:

$$x_i^d = g_i^d + \sum_{a \in A_i^+} v_a^d$$

In i , il flusso viene distribuito tra gli archi in proporzione a P_{ij}^d :

$$v_a^d = x_i^d \cdot P_{ij}^d(z^d) = x_i^d \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$$

Matrici di transizione

Sia x_i^d il flusso entrante in i . Equazione di continuità:

$$x_i^d = g_i^d + \sum_{a \in A_i^+} v_a^d$$

In i , il flusso viene distribuito tra gli archi in proporzione a P_{ij}^d :

$$v_a^d = x_i^d \cdot P_{ij}^d(z^d) = x_i^d \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$$

Sia $Q_{ia}^d = P_{ij}^d$ per $a = (i, j)$. Q è $n \times m$. Forma vettoriale:

$$v^d = (Q^d)^T x^d$$

Matrici di transizione

Sia x_i^d il flusso entrante in i . Equazione di continuità:

$$x_i^d = g_i^d + \sum_{a \in A_i^+} v_a^d$$

In i , il flusso viene distribuito tra gli archi in proporzione a P_{ij}^d :

$$v_a^d = x_i^d \cdot P_{ij}^d(z^d) = x_i^d \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$$

Sia $Q_{ia}^d = P_{ij}^d$ per $a = (i, j)$. Q è $n \times m$. Forma vettoriale:

$$v^d = (Q^d)^\top x^d$$

$$x^d = g^d + (P^d)^\top x^d \Rightarrow x^d = (I - (P^d)^\top)^{-1} g^d$$

Trovare i tempi di arrivo

$$\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$$

Consideriamo l'insieme dei t per cui esiste una sottosoluzione:

$$\mathcal{C} = \left\{ t \in \mathbb{R}^m : \exists \hat{\tau}_i^d < \varphi_i^d \left(\{t_a + \hat{\tau}_{j_a}^d\} \right) \quad \forall i \neq d \right\}$$

\mathcal{C} è un cono aperto, convesso. È non vuoto perché per t grande, $\hat{\tau} = 0$ è soluzione.

Trovare i tempi di arrivo

$$\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$$

Consideriamo l'insieme dei t per cui esiste una sottosoluzione:

$$\mathcal{C} = \left\{ t \in \mathbb{R}^m : \exists \hat{\tau}_i^d < \varphi_i^d(\{t_a + \hat{\tau}_{j_a}^d\}) \quad \forall i \neq d \right\}$$

\mathcal{C} è un cono aperto, convesso. È non vuoto perché per t grande, $\hat{\tau} = 0$ è soluzione.

Sia $\bar{\tau}^d$ la soluzione al problema deterministico

$$\bar{\tau}_i^d = \bar{\varphi}_i^d(\{t_a + \bar{\tau}_{j_a}^d\}) = \min_{a \in A_i^+} \{t_a + \bar{\tau}_{j_a}^d\}$$

La catena di Markov è ben definita

Per ogni destinazione d , un utente in i si sposta sull'arco (i, j) con probabilità P_{ij}^d . Bisogna mostrare l'utente raggiunge sempre d con probabilità 1. Visto che il numero di stati è finito, basta che esista un percorso da i a d .

La catena di Markov è ben definita

Per ogni destinazione d , un utente in i si sposta sull'arco (i, j) con probabilità P_{ij}^d . Bisogna mostrare l'utente raggiunge sempre d con probabilità 1. Visto che il numero di stati è finito, basta che esista un percorso da i a d .

Proposizione

Dato $t \in \mathcal{C}$, sia $\hat{\tau}^d$ la relativa sottosoluzione, e supponiamo esista τ^d soluzione. Sia $\delta^d = \tau^d - \hat{\tau}^d$.

Allora per ogni $i \neq d$ esiste j tale che $P_{ij}^d > 0$ e $\delta_j^d < \delta_i^d$.

La catena di Markov è ben definita

Per ogni destinazione d , un utente in i si sposta sull'arco (i, j) con probabilità P_{ij}^d . Bisogna mostrare l'utente raggiunge sempre d con probabilità 1. Visto che il numero di stati è finito, basta che esista un percorso da i a d .

Proposizione

Dato $t \in \mathcal{C}$, sia $\hat{\tau}^d$ la relativa sottosoluzione, e supponiamo esista τ^d soluzione. Sia $\delta^d = \tau^d - \hat{\tau}^d$.

Allora per ogni $i \neq d$ esiste j tale che $P_{ij}^d > 0$ e $\delta_j^d < \delta_i^d$.

I δ_i^d sono da pensarsi come un monovariante decrescente: da qualsiasi vertice i , continuo il cammino scegliendo il δ_j^d minore. L'unico vertice per cui non può diminuire ulteriormente è $i = d$.

La catena di Markov è ben definita

Per ogni destinazione d , un utente in i si sposta sull'arco (i, j) con probabilità P_{ij}^d . Bisogna mostrare l'utente raggiunge sempre d con probabilità 1. Visto che il numero di stati è finito, basta che esista un percorso da i a d .

Proposizione

Dato $t \in \mathcal{C}$, sia $\hat{\tau}^d$ la relativa sottosoluzione, e supponiamo esista τ^d soluzione. Sia $\delta^d = \tau^d - \hat{\tau}^d$.

Allora per ogni $i \neq d$ esiste j tale che $P_{ij}^d > 0$ e $\delta_j^d < \delta_i^d$.

I δ_i^d sono da pensarsi come un monovariante decrescente: da qualsiasi vertice i , continuo il cammino scegliendo il δ_j^d minore. L'unico vertice per cui non può diminuire ulteriormente è $i = d$.

Corollario

La matrice $I - (P^d)^\top$ è invertibile, dunque sono ben definiti $x^d = (I - (P^d)^\top)^{-1} g^d$ e $v^d = (Q^d)^\top x^d$.

Esistenza e unicità dei tempi

Sia $t \in \mathcal{C}$. Allora esiste un'unica soluzione $\tau^d(t)$. Le mappe $t \rightarrow \tau^d(t)$ sono concave, lisce, debolmente crescenti. Inoltre $\tau^d(t) \leq \bar{\tau}^d(t)$.

Dimostrazione:

Esistenza e unicità dei tempi

Sia $t \in \mathcal{C}$. Allora esiste un'unica soluzione $\tau^d(t)$. Le mappe $t \rightarrow \tau^d(t)$ sono concave, lisce, debolmente crescenti. Inoltre $\tau^d(t) \leq \bar{\tau}^d(t)$.

Dimostrazione:

Sia $\hat{\tau}^d$ una sottosoluzione. Definiamo iterativamente:

$$\begin{cases} \tau^{(0),d} = \hat{\tau}^d \\ \tau_i^{(k+1),d} = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^{(k),d}\}_{a \in A_i^+}) \quad \forall i \end{cases}$$

Esistenza e unicità dei tempi

Sia $t \in \mathcal{C}$. Allora esiste un'unica soluzione $\tau^d(t)$. Le mappe $t \rightarrow \tau^d(t)$ sono concave, lisce, debolmente crescenti. Inoltre $\tau^d(t) \leq \bar{\tau}^d(t)$.

Dimostrazione:

Sia $\hat{\tau}^d$ una sottosoluzione. Definiamo iterativamente:

$$\begin{cases} \tau^{(0),d} = \hat{\tau}^d \\ \tau_i^{(k+1),d} = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^{(k),d}\}_{a \in A_i^+}) \quad \forall i \end{cases}$$

Usando la monotonia di φ_i^d , per induzione si mostra che la sequenza è crescente e limitata:

$$\hat{\tau}^d = \tau^{(0),d} \leq \tau^{(1),d} \leq \dots \leq \tau^{(k),d} \leq \tau^{(k+1),d} \leq \dots \leq \bar{\tau}^d$$

Esistenza e unicità dei tempi

Sia $t \in \mathcal{C}$. Allora esiste un'unica soluzione $\tau^d(t)$. Le mappe $t \rightarrow \tau^d(t)$ sono concave, lisce, debolmente crescenti. Inoltre $\tau^d(t) \leq \bar{\tau}^d(t)$.

Dimostrazione:

Sia $\hat{\tau}^d$ una sottosoluzione. Definiamo iterativamente:

$$\begin{cases} \tau^{(0),d} = \hat{\tau}^d \\ \tau_i^{(k+1),d} = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^{(k),d}\}_{a \in A_i^+}) \quad \forall i \end{cases}$$

Usando la monotonia di φ_i^d , per induzione si mostra che la sequenza è crescente e limitata:

$$\hat{\tau}^d = \tau^{(0),d} \leq \tau^{(1),d} \leq \dots \leq \tau^{(k),d} \leq \tau^{(k+1),d} \leq \dots \leq \bar{\tau}^d$$

Dunque esiste il limite $\tau^d = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau^{(k),d}$, soluzione del sistema.

Esistenza e unicità dei tempi

Sia $t \in \mathcal{C}$. Allora esiste un'unica soluzione $\tau^d(t)$. Le mappe $t \rightarrow \tau^d(t)$ sono concave, lisce, debolmente crescenti. Inoltre $\tau^d(t) \leq \bar{\tau}^d(t)$.

Dimostrazione:

Sia $\hat{\tau}^d$ una sottosoluzione. Definiamo iterativamente:

$$\begin{cases} \tau^{(0),d} = \hat{\tau}^d \\ \tau_i^{(k+1),d} = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^{(k),d}\}_{a \in A_i^+}) \quad \forall i \end{cases}$$

Usando la monotonia di φ_i^d , per induzione si mostra che la sequenza è crescente e limitata:

$$\hat{\tau}^d = \tau^{(0),d} \leq \tau^{(1),d} \leq \dots \leq \tau^{(k),d} \leq \tau^{(k+1),d} \leq \dots \leq \bar{\tau}^d$$

Dunque esiste il limite $\tau^d = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau^{(k),d}$, soluzione del sistema.

Le proprietà (monotonia nelle componenti, concavità, $\tau^d \leq \bar{\tau}^d$) si dimostrano usando le analoghe proprietà delle φ_i^d .

Equilibrio di traffico Markoviano

Aggreghiamo i flussi di destinazioni diverse.

$$w_a = \sum_{d \in V} v_a^d$$

Markovian Traffic Equilibrium

Dati i tempi di percorrenza degli archi t_a si ottengano le altre quantità τ_i^d , z_a^d , x^d , v^d . Il vettore dei flussi totali w è un MTE se, soddisfa:

$$t_a = s_a(w_a) \quad \forall a \in A$$

Caratterizzazione del MTE

Teorema

Sia $t_a^0 = s_a(0)$ e assumiamo che il vettore $t^0 \in \mathcal{C}$. Allora esiste un unico MTE, che chiamiamo $w_a^* = s_a^{-1}(t_a)$ dove t^* è l'unica soluzione al seguente problema di minimo (strettamente convesso):

$$\min_{t \in \mathcal{C}} \Phi(t) \quad \text{dove} \quad \Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Dimostrazione. Restringiamo la ricerca del minimo a $\{t \geq t_0\} \subseteq \mathcal{C}$. Infatti preso t fuori da questa regione, aumentando le componenti t_a che sono minori di t_a^0 , entrambi gli addendi decrescono.

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Dimostrazione. Restringiamo la ricerca del minimo a $\{t \geq t_0\} \subseteq \mathcal{C}$. Infatti preso t fuori da questa regione, aumentando le componenti t_a che sono minori di t_a^0 , entrambi gli addendi decrescono.

Nella regione $\{t \geq t_0\}$, $\Phi(t)$ è strettamente convessa. Le $\tau_i^d(t)$ sono concave, quindi il secondo termine $-\sum g_i^d \tau_i^d$ è convesso. Nella regione $\{t \geq t_0\}$, ogni funzione $f_a(t_a) = \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy$ è strettamente convessa nella variabile t_a .

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Il minimo t^* soddisfa $\nabla \Phi(t^*) = 0$. Calcoliamo $\nabla \Phi$.

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Il minimo t^* soddisfa $\nabla \Phi(t^*) = 0$. Calcoliamo $\nabla \Phi$.

Da $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$ si ottiene:

$$\frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a} = \sum_{b \in A_i^+} \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_b}(\{z_c\}) \cdot \left(1 + \frac{\partial \tau_{j_b}^d}{\partial t_a}\right) = \sum_{b \in A_i^+} P_{i j_b}^d \cdot \left(1 + \frac{\partial \tau_{j_b}^d}{\partial t_a}\right)$$

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Il minimo t^* soddisfa $\nabla \Phi(t^*) = 0$. Calcoliamo $\nabla \Phi$.

Da $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$ si ottiene:

$$\frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a} = \sum_{b \in A_i^+} \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_b}(\{z_c\}) \cdot \left(1 + \frac{\partial \tau_{j_b}^d}{\partial t_a}\right) = \sum_{b \in A_i^+} P_{ij_b}^d \cdot \left(1 + \frac{\partial \tau_{j_b}^d}{\partial t_a}\right)$$

Vettorialmente:
$$\frac{\partial \widehat{\tau}^d}{\partial t_a} = \widehat{Q}_{:b}^d + P^d \frac{\partial \widehat{\tau}^d}{\partial t_a} \implies \frac{\partial \widehat{\tau}^d}{\partial t_a} = (I - \widehat{P}^d)^{-1} \widehat{Q}_{:b}^d$$

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

Il minimo t^* soddisfa $\nabla \Phi(t^*) = 0$. Calcoliamo $\nabla \Phi$.

Da $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$ si ottiene:

$$\frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a} = \sum_{b \in A_i^+} \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_b}(\{z_c\}) \cdot \left(1 + \frac{\partial \tau_{j_b}^d}{\partial t_a}\right) = \sum_{b \in A_i^+} P_{ij_b}^d \cdot \left(1 + \frac{\partial \tau_{j_b}^d}{\partial t_a}\right)$$

Vettorialmente: $\frac{\partial \widehat{\tau}^d}{\partial t_a} = \widehat{Q}_{:b}^d + P^d \frac{\partial \widehat{\tau}^d}{\partial t_a} \implies \frac{\partial \widehat{\tau}^d}{\partial t_a} = (I - \widehat{P}^d)^{-1} \widehat{Q}_{:b}^d$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_a} \left(\sum_{i \neq d} \tau_i^d(t) g_i^d(t) \right) &= \left(\frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \right)^\top g^d = Q_a^d(t)^\top (I - P^d(t)^\top)^{-1} g^d = \\ &= Q_a^d(t)^\top x^d(t) = v_a^d(t) \end{aligned}$$

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t_a} \left(\sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy \right) - \sum_d v_a^d(t)$$

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t_a} \left(\sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy \right) - \sum_d v_a^d(t)$$

La derivata del primo termine è semplicemente $s_a^{-1}(t_a)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - \sum_d v_a^d(t)$$

$$\Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy - \sum_d \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(t)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t_a} \left(\sum_{a \in A} \int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(y) dy \right) - \sum_d v_a^d(t)$$

La derivata del primo termine è semplicemente $s_a^{-1}(t_a)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - \sum_d v_a^d(t)$$

Visto che $w_a = \sum_d v_a^d$, allora $\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t^*) = 0$ se e solo se $s_a^{-1}(t_a) = w_a$, che è la condizione MTE. □

Scelta delle funzioni

Funzione di congestione:

$$t_a = s_a(w_a) = t_a^0 \left(1 + b_a \left(\frac{w_a}{c_a} \right)^{p_a} \right)$$

c_a rappresenta la capacità dell'arco: per $w_a < c_a$ il tempo si discosta poco da t_a^0 ; per $w_a > c_a$ aumenta molto.

Scelta delle funzioni

Variabili Aleatorie: Teoricamente si parte da $\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$ e si ottengono le v.a. $\tilde{z}_a^d = z_a^d + \varepsilon_a^d$. Però l'espressione di ε_a^d in funzione delle ν_a è molto complicata.

Scelta delle funzioni

Variabili Aleatorie: Teoricamente si parte da $\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$ e si ottengono le v.a. $\tilde{z}_a^d = z_a^d + \varepsilon_a^d$. Però l'espressione di ε_a^d in funzione delle ν_a è molto complicata.

Assumeremo che le v.a. dei tempi di arrivo z_a^d siano indipendenti e abbiano una distribuzione di Gumbel. In questo modo è possibile calcolare esplicitamente:

Scelta delle funzioni

Variabili Aleatorie: Teoricamente si parte da $\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$ e si ottengono le v.a. $\tilde{z}_a^d = z_a^d + \varepsilon_a^d$. Però l'espressione di ε_a^d in funzione delle ν_a è molto complicata.

Assumeremo che le v.a. dei tempi di arrivo z_a^d siano indipendenti e abbiano una distribuzione di Gumbel. In questo modo è possibile calcolare esplicitamente:

$$P_{ij}^d = \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d) = \mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d \quad \forall b \in A_i^+) = \frac{e^{-\beta_i^d z_a^d}}{\sum_{b \in A_i^+} e^{-\beta_i^d z_b^d}}$$

Scelta delle funzioni

Variabili Aleatorie: Teoricamente si parte da $\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$ e si ottengono le v.a. $\tilde{z}_a^d = z_a^d + \varepsilon_a^d$. Però l'espressione di ε_a^d in funzione delle ν_a è molto complicata.

Assumeremo che le v.a. dei tempi di arrivo z_a^d siano indipendenti e abbiano una distribuzione di Gumbel. In questo modo è possibile calcolare esplicitamente:

$$P_{ij}^d = \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d) = \mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d \quad \forall b \in A_i^+) = \frac{e^{-\beta_i^d z_a^d}}{\sum_{b \in A_i^+} e^{-\beta_i^d z_b^d}}$$

Integrando si ricava $\varphi_i^d(z^d) = -\frac{1}{\beta_i^d} \ln \left(\sum_{a \in A_i^+} e^{-\beta_i^d z_a^d} \right)$.

Viene detto *Modello Logit*, perché ha la stessa formula della distribuzione logistica multinomiale.

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:
 - 1 Viene calcolato il punto fisso $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$. Questo viene fatto tramite un procedimento iterativo su τ^d .

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:
 - 1 Viene calcolato il punto fisso $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$. Questo viene fatto tramite un procedimento iterativo su τ^d .
 - 2 Si calcola $\frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$.

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:
 - 1 Viene calcolato il punto fisso $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$. Questo viene fatto tramite un procedimento iterativo su τ^d .
 - 2 Si calcola $\frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$.
 - 3 Si costruiscono le matrici P^d e Q^d .

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:
 - 1 Viene calcolato il punto fisso $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$. Questo viene fatto tramite un procedimento iterativo su τ^d .
 - 2 Si calcola $\frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$.
 - 3 Si costruiscono le matrici P^d e Q^d .
 - 4 Vengono calcolati i flussi $x^d = (I - (P^d)^\top)^{-1} g^d$ e $v^d = (Q^d)^\top x^d$.

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:
 - 1 Viene calcolato il punto fisso $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$. Questo viene fatto tramite un procedimento iterativo su τ^d .
 - 2 Si calcola $\frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$.
 - 3 Si costruiscono le matrici P^d e Q^d .
 - 4 Vengono calcolati i flussi $x^d = (I - (P^d)^\top)^{-1} g^d$ e $v^d = (Q^d)^\top x^d$.
- 3 Si aggregano i flussi per ogni destinazione $\hat{w} = \sum_d v^d$

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:
 - 1 Viene calcolato il punto fisso $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$. Questo viene fatto tramite un procedimento iterativo su τ^d .
 - 2 Si calcola $\frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$.
 - 3 Si costruiscono le matrici P^d e Q^d .
 - 4 Vengono calcolati i flussi $x^d = (I - (P^d)^\top)^{-1} g^d$ e $v^d = (Q^d)^\top x^d$.
- 3 Si aggregano i flussi per ogni destinazione $\hat{w} = \sum_d v^d$
- 4 Si usa un metodo del gradiente per calcolare i nuovi tempi di percorrenza $t^{(k+1)}$ a partire da $t^{(k)}$.

Algoritmo

- 1 Si inizializzano i tempi di percorrenza degli archi $t_a = t_a^{(0)}$ con valori casuali.
- 2 Per ogni destinazione $d = 1, 2, \dots, n$:
 - 1 Viene calcolato il punto fisso $\tau_i^d = \varphi_i^d(\{t_a + \tau_{j_a}^d\}_{a \in A_i^+})$. Questo viene fatto tramite un procedimento iterativo su τ^d .
 - 2 Si calcola $\frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$.
 - 3 Si costruiscono le matrici P^d e Q^d .
 - 4 Vengono calcolati i flussi $x^d = (I - (P^d)^\top)^{-1} g^d$ e $v^d = (Q^d)^\top x^d$.
- 3 Si aggregano i flussi per ogni destinazione $\hat{w} = \sum_d v^d$
- 4 Si usa un metodo del gradiente per calcolare i nuovi tempi di percorrenza $t^{(k+1)}$ a partire da $t^{(k)}$.
- 5 Si itera fino a raggiungere la convergenza.

Metodi di Discesa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - \widehat{w}_a(t)$$

Metodo del gradiente: $t_a^{(k+1)} = t_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(s_a^{-1}(t^{(k)})_a - \widehat{w}_a^{(k)} \right)$

Metodi di Discesa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - \widehat{w}_a(t)$$

Metodo del gradiente: $t_a^{(k+1)} = t_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(s_a^{-1}(t^{(k)})_a - \widehat{w}_a^{(k)} \right)$

Cambio di variabile: $\Psi(w) = \Phi(s(w)) = \Phi(t)$.

Metodi di Discesa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - \widehat{w}_a(t)$$

Metodo del gradiente: $t_a^{(k+1)} = t_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(s_a^{-1}(t^{(k)})_a - \widehat{w}_a^{(k)} \right)$

Cambio di variabile: $\Psi(w) = \Phi(s(w)) = \Phi(t)$.

Derivate parziali: $\frac{\partial \Psi}{\partial t_a}(w) = (w_a - \widehat{w}_a(s(w))) \cdot s'_a(w_a)$.

$$w_a^{(k+1)} = w_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(w_a^{(k)} - \widehat{w}_a^{(k)} \right) s'_a(w_a)$$

Metodi di Discesa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - \widehat{w}_a(t)$$

Metodo del gradiente: $t_a^{(k+1)} = t_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(s_a^{-1}(t^{(k)})_a - \widehat{w}_a^{(k)} \right)$

Cambio di variabile: $\Psi(w) = \Phi(s(w)) = \Phi(t)$.

Derivate parziali: $\frac{\partial \Psi}{\partial t_a}(w) = (w_a - \widehat{w}_a(s(w))) \cdot s'_a(w_a)$.

$$w_a^{(k+1)} = w_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(w_a^{(k)} - \widehat{w}_a^{(k)} \right) s'_a(w_a)$$

Algoritmo MSA (*Method of Successive Averages*):

$$w_a^{(k+1)} = w_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(w_a^{(k)} - \widehat{w}_a^{(k)} \right)$$

Metodi di Discesa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - \widehat{w}_a(t)$$

Metodo del gradiente: $t_a^{(k+1)} = t_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(s_a^{-1}(t^{(k)})_a - \widehat{w}_a^{(k)} \right)$

Cambio di variabile: $\Psi(w) = \Phi(s(w)) = \Phi(t)$.

Derivate parziali: $\frac{\partial \Psi}{\partial t_a}(w) = (w_a - \widehat{w}_a(s(w))) \cdot s'_a(w_a)$.

$$w_a^{(k+1)} = w_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(w_a^{(k)} - \widehat{w}_a^{(k)} \right) s'_a(w_a)$$

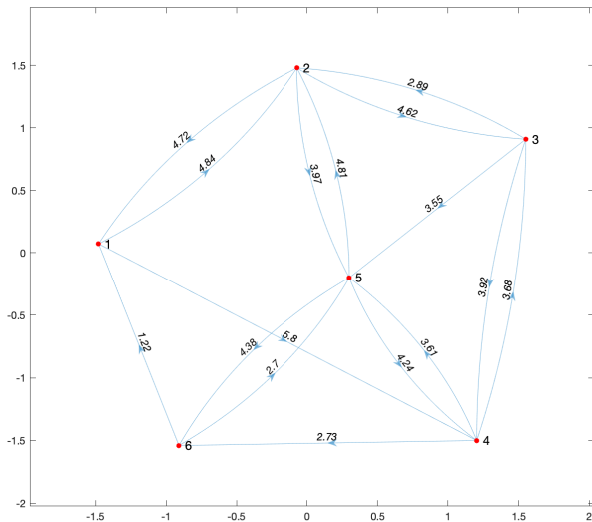
Algoritmo MSA (*Method of Successive Averages*):

$$w_a^{(k+1)} = w_a^{(k)} - \alpha_{(k)} \left(w_a^{(k)} - \widehat{w}_a^{(k)} \right)$$

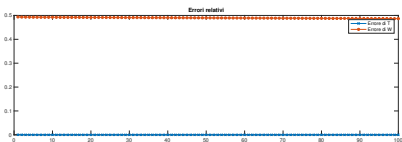
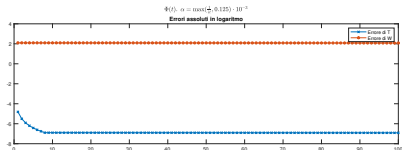
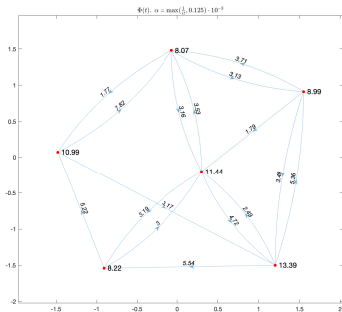
Nell'articolo viene implementato anche MSA + Newton.

Grafo con $n = 6$ vertici. MAXIT = 100 iterazioni, tolleranza = 10^{-8} .

Grafo con tempi di percorrenza t_a^0 .

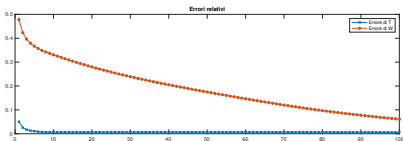
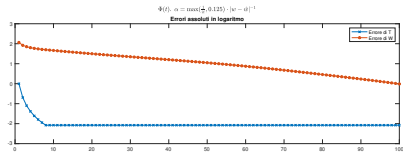
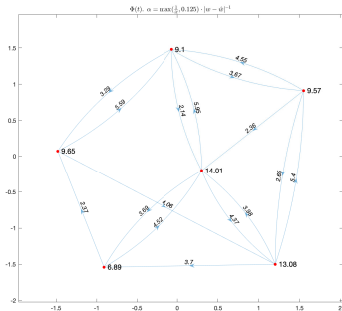


Metodo del gradiente su $\Phi(t)$, con $\alpha = \max(\frac{1}{it}, 0.125) \cdot 10^{-3}$

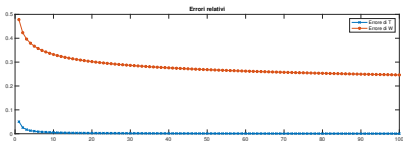
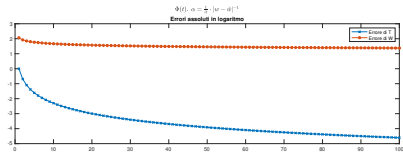
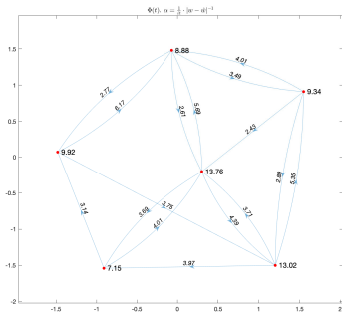


Qui e in tutte le figure successive, sugli archi sono rappresentati i w_a calcolati.

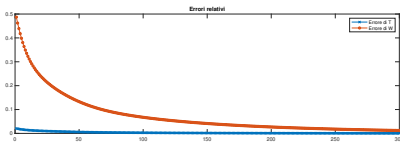
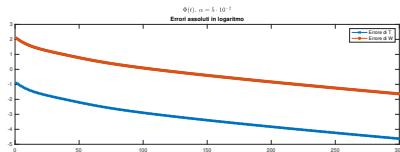
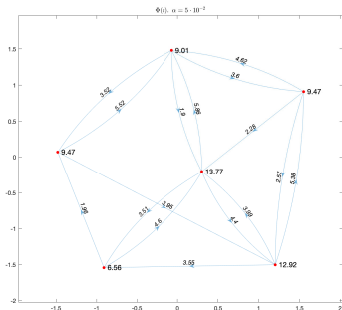
Metodo del gradiente su $\Phi(t)$, con $\alpha = \max(\frac{1}{it}, 0.125) \cdot |w - \hat{w}|^{-1}$



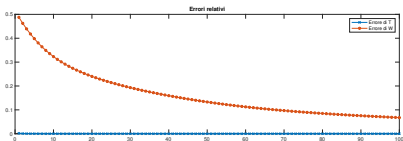
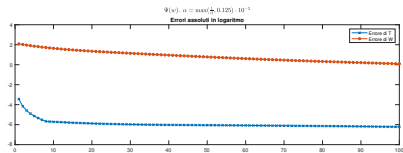
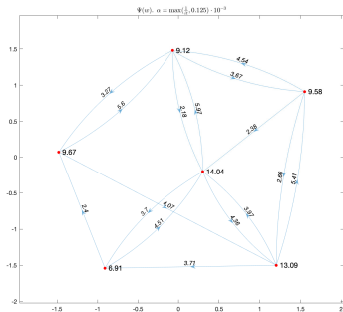
Metodo del gradiente su $\Phi(t)$, con $\alpha = \frac{1}{it} \cdot |w - \hat{w}|^{-1}$



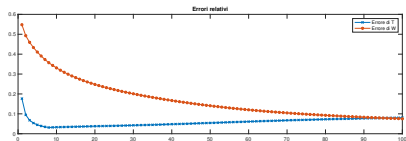
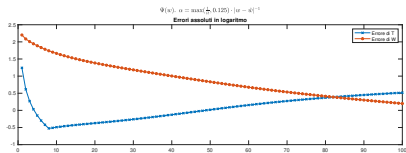
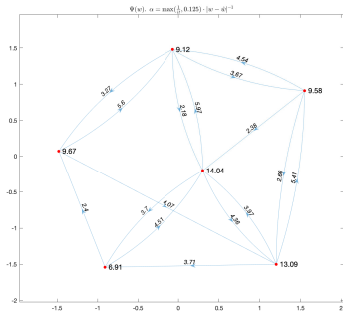
Metodo del gradiente su $\Phi(t)$, con passo costante $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$.
 MAXIT=300 iterazioni.



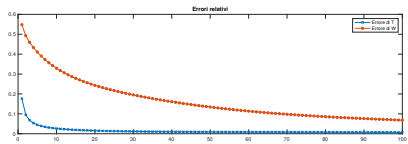
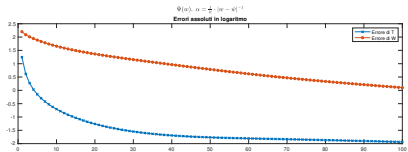
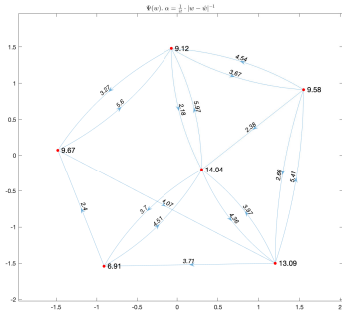
MSA su $\Psi(w)$, con $\alpha = \max(\frac{1}{it}, 0.125) \cdot 10^{-3}$



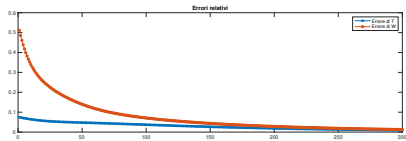
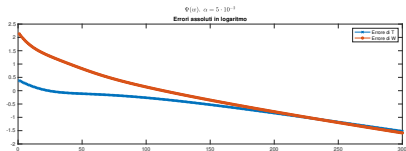
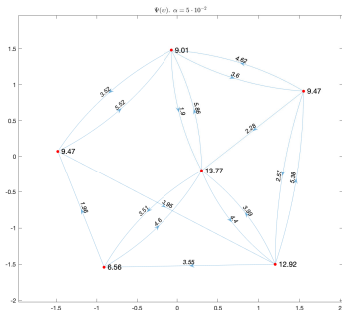
MSA su $\Psi(w)$, con $\alpha = \max(\frac{1}{it}, 0.125) \cdot |w - \hat{w}|^{-1}$



MSA su $\Psi(w)$, con $\alpha = \frac{1}{it} \cdot |w - \hat{w}|^{-1}$



MSA su $\Psi(w)$, con passo costante $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$. MAXIT=300 iterazioni.



Grazie per l'attenzione!

Bibliografia

- 1 BAILLON J.-B., COMINETTI R., *Markovian traffic equilibrium*, Mathematical Programming 111(1-2), Ser. B (2008), 33–56.
- 2 COMINETTI R., FACCHINEI F., LASSERRE J.B., *Modern Optimization Modelling Techniques*, Birkhäuser Basel, (2012).